

WYKŁAD 3

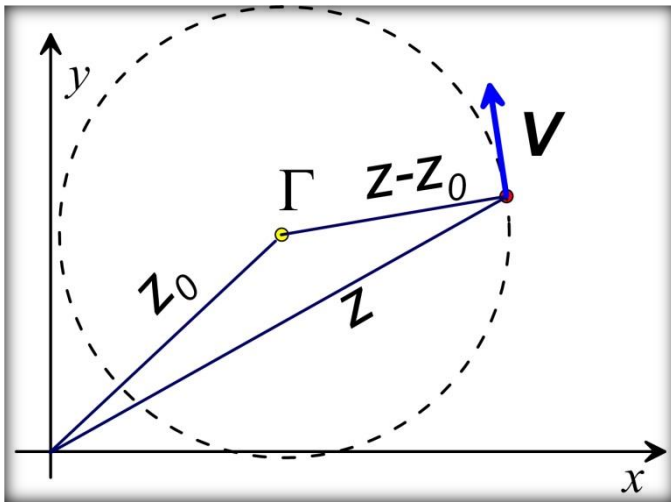
**TEORIA CIENKIEGO PROFILU
LOTNICZEGO**

AERODYNAMIKA I

TEMATYKA I CEL WYKŁADU:

- Przedstawić koncepcję modelowania dwuwymiarowego przepływu potencjalnego płynu nieściśliwego bazującego na wykorzystaniu rozłożonych nośników cyrkulacji
- Zastosować to podejście do przepływu w otoczeniu cienkiego profilu lotniczego
- Wyprowadzić i przedyskutować znaczenie formuł opisujących siłę i moment aerodynamiczny oraz współczynniki aerodynamiczne
- Określić położenie środka parcia i środka aerodynamicznego
- Zademonstrować wykorzystanie teorii cienkiego profilu do profilu w klapą

1. Pole prędkości indukowane przez linię wirową na płaszczyźnie



Wyprowadziliśmy wcześniej prawo indukcji pola prędkości dla punktowego wiru potencjalnego.

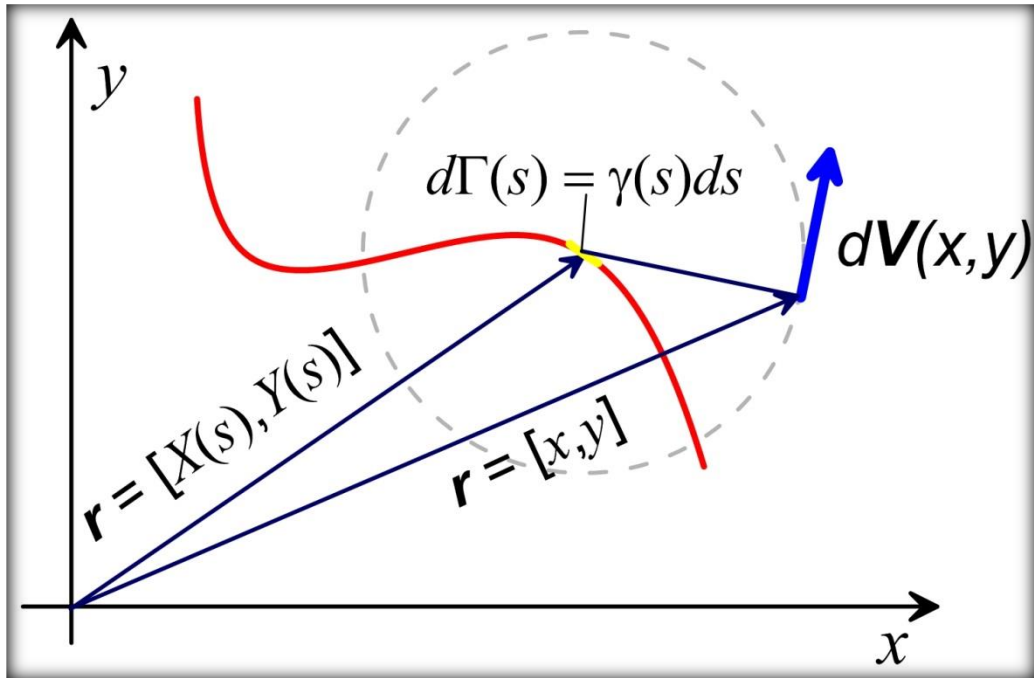
W zapisie zespolonym prawo to ma postać (środek wiru położony jest w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$)

$$\begin{aligned} V_{\Gamma}(z) &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|^2} = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0 - i(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = u - iw \end{aligned}$$

Zatem, składowe kartezjańskie indukowanego pola prędkości wyrażają się następująco

$$u_{\Gamma} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad , \quad v_{\Gamma} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

AERODYNAMIKA I



Rozważmy teraz pole prędkości indukowane przez cyrkulację rozłożoną w sposób ciągły na linii opisanej równaniami $x = X(s)$, $y = Y(s)$.

Liniowa gęstość cyrkulacji na tej linii opisana jest funkcją $\gamma = \gamma(s)$.

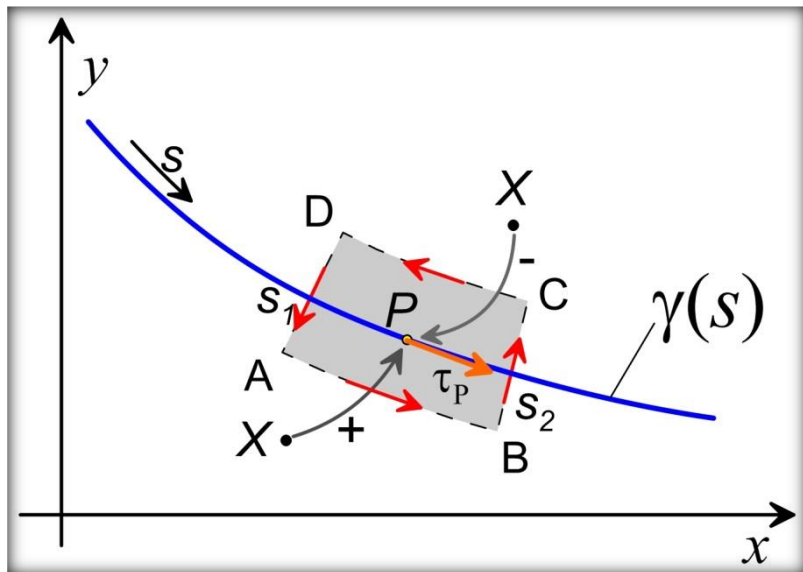
Pole prędkości indukowane przez **linię wirową** zadane jest wzorami

$$u_\gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^s \frac{\gamma(s)[y - Y(s)]}{[x - X(s)]^2 + [y - Y(s)]^2} ds, \quad v_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^s \frac{\gamma(s)[x - X(s)]}{[x - X(s)]^2 + [y - Y(s)]^2} ds$$

AERODYNAMIKA I

Jeżeli prędkość indukowana przez linię wirową w pewnym punkcie leżącym na tej linii jest skończona to:

- Prędkość normalna obliczona wzdłuż dowolnego odcinka przecinającego linię wirową w tym punkcie zmienia się w sposób ciągły.
- Prędkość styczna obliczona wzdłuż dowolnego odcinka przecinającego linię wirową w tym punkcie zmienia się skokowo, przy czym wielkość skoku składowej stycznej jest równa wartości funkcji γ w tym punkcie linii.



Uzasadnienie ostatniego stwierdzenia polega na wykorzystaniu **Twierdzenia Stokesa** zastosowanego do zacięzionego obszaru na rysunku

$$\oint_{ABCD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{ABCD} \omega \, dx \, dy = \int_{s_1}^{s_2} \gamma(s) \, ds$$

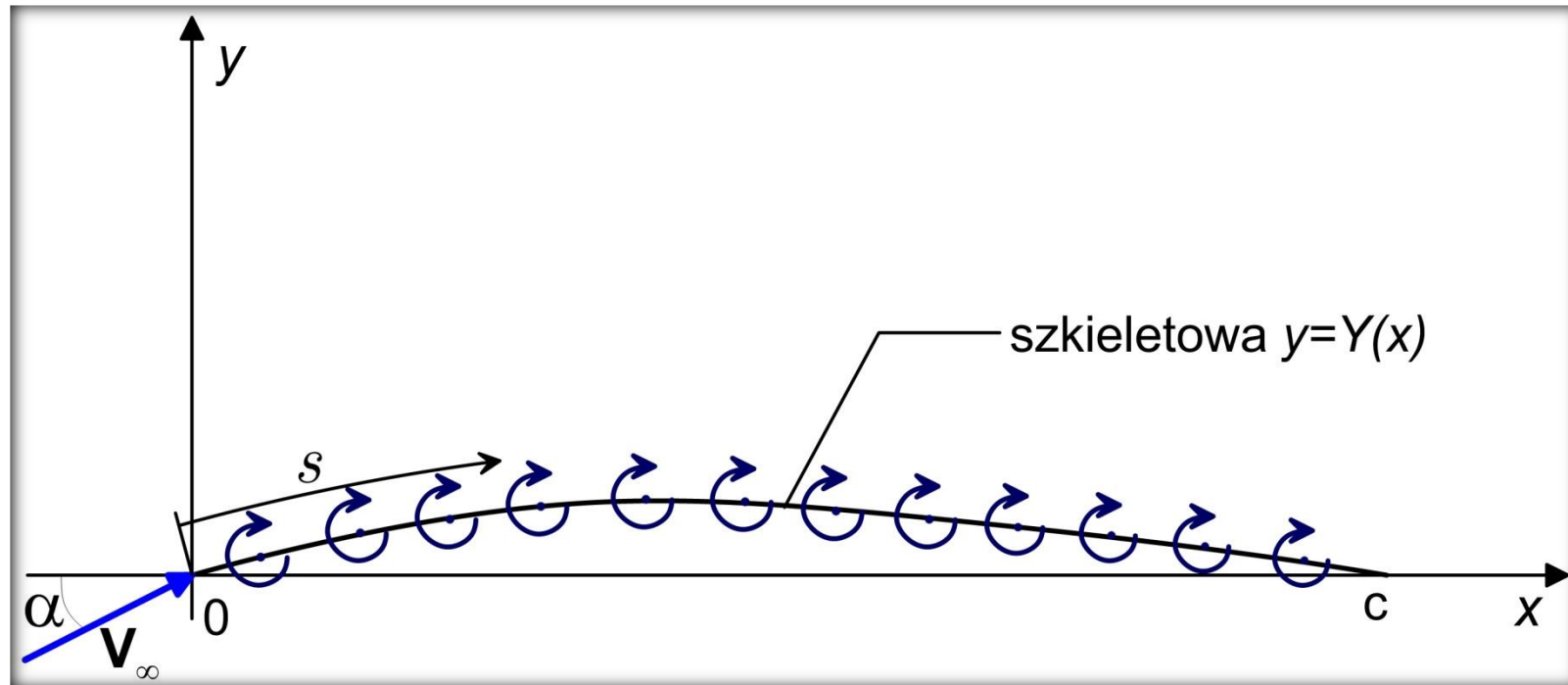
oraz ciągłości prędkości normalnej.

Ćwiczenie: przeprowadź rozumowanie prowadzące do wniosku, że w punkcie na LW mamy

$$\left(\lim_{X \rightarrow P^+} \mathbf{v} - \lim_{X \rightarrow P^-} \mathbf{v} \right) \cdot \boldsymbol{\tau}_P = \gamma(s_P)$$

Model profilu o niewielkiej grubości

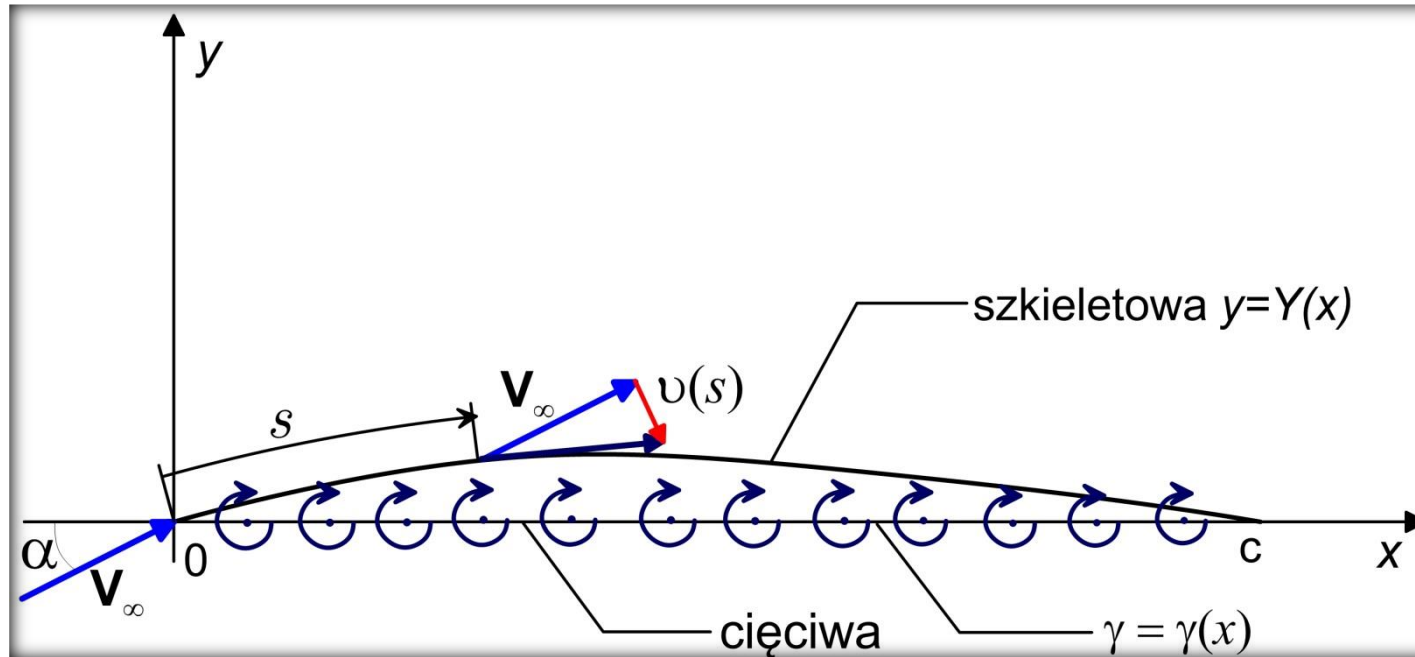
Wariant 1



Opływ profilu modelowany jest przez linię wirową o kształcie takim jak linia szkieletowa (LS) profilu. **Rozkład cyrkulacji wzdłuż tej linii przyjmujemy tak, aby była ona linią prądu.**

Jeśli wygięcie LS jest małe to można przyjąć dalsze uproszczenia ułatwiające rachunki ...

Wariant 2 (docelowy)



- Cyrkulacja rozłożona jest wzdłuż cięciwy profilu tj. na odcinku $[0,c]$ położonym na osi Ox
- Z uwagi na małe wygięcie linii szkieletowej uznajemy że prędkość indukowana przez wirowość rozłożoną wzdłuż cięciwy w punkcie $[x,Y(x)]$ jest równa z przybliżeniem prędkości indukowanej w punkcie $[x,0]$.

AERODYNAMIKA I

W konsekwencji przyjętych założeń upraszczających, prędkość indukowana normalna do linii szkieletowej w punkcie $[x, Y(x)]$ jest w przybliżeniu równa

$$w_{\gamma,n}[x, Y(x)] \approx u_{\gamma}[x, 0]n_x[x, Y(x)] + v_{\gamma}[x, 0]n_y[x, Y(x)]$$

Jednostkowy wektor normalny w punkcie $[x, Y(x)]$ linii szkieletowej jest równy

$$n_x = \frac{-Y'(x)}{\sqrt{1+[Y'(x)]^2}} \approx -Y'(x) \quad , \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{1+[Y'(x)]^2}} \approx 1$$

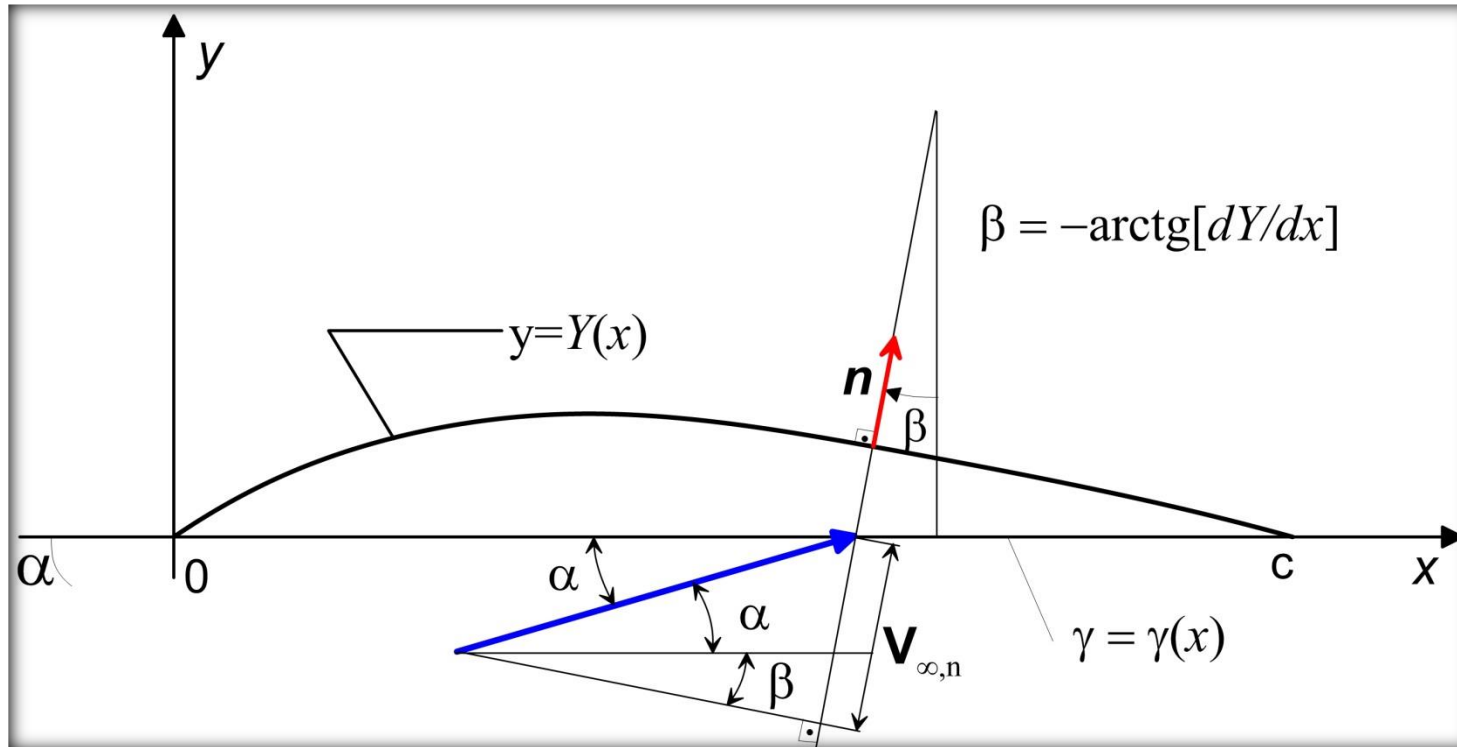
Zatem

$$\begin{aligned} w_{\gamma,n}[x, Y(x)] &\approx -u_{\gamma}[x, 0]n_x[x, Y(x)] + v_{\gamma}[x, 0]n_y[x, Y(x)] \approx \\ &\approx u_{\gamma}[x, 0]Y'(x) + v_{\gamma}[x, 0] \approx v_{\gamma}[x, 0] = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{x-\xi} \end{aligned}$$

Warunek nieprzenikalności profilu - całkowity wektor prędkości jest styczny do linii szkieletowej, czyli

$$\boxed{V_{\infty,n} + w_{\gamma,n} = 0}$$

AERODYNAMIKA I



Z rysunku wynika, że

$$V_{\infty,n} = V_{\infty} \sin(\alpha + \beta) \approx V_{\infty} (\alpha + \beta) = V_{\infty} \{\alpha - \text{arctg}[Y'(x)]\} \approx V_{\infty} [\alpha - Y'(x)]$$

Warunek nie przenikalności przyjmuje postać (**r-nie podstawowe teorii cienkiego profilu**)

$$V_{\infty} [\alpha - Y'(x)] + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \xi} = 0$$

AERODYNAMIKA I

Wprowadzimy sprytną zmianę współrzędnych ...

$$\xi = \frac{1}{2}c(1 - \cos \theta) \quad , \quad x = \frac{1}{2}c(1 - \cos \theta_0)$$

Wówczas $d\xi = \frac{1}{2}c \sin \theta$ oraz $\begin{cases} \xi = 0 \Rightarrow 1 - \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 & \text{pkt. natarcia} \\ \xi = c \Rightarrow 1 - \cos \theta = 2 \Rightarrow \theta = \pi & \text{pkt. splywu} \end{cases}$

Rozważmy przypadek **cienkiego profilu symetrycznego** (w tej teorii jest nieodróżnialny od płaskiej płytki) tj. przyjmijmy, że $Y'(x) \equiv 0$.

Podstawowe równanie teorii przyjmuje postać

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = -V_\infty \alpha$$

Z rozważań nt. prędkości indukowanej przez LW wynika, że musimy postawić warunek

$$\gamma(\pi) = 0$$

W przeciwnym razie prędkość styczna w punkcie wpływu ma skok czyli nie spełnia warunku Kutty-Żukowskiego!

AERODYNAMIKA I

Poszukiwanie rozwiązanie zaczniemy od wprowadzenia tzw. całek Glauerta ...

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \pi \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = -\pi \cos n\theta_0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

W szczególności ...

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \pi$$

Rozważmy funkcję

$$\gamma_1(\theta) = K \cos \theta / \sin \theta$$

Mamy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma_1(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{K}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{K}{2}$$

Jeśli dobrać stałą K tak, aby $\frac{1}{2}K = -V_{\infty}\alpha \Rightarrow K = -2V_{\infty}\alpha$ to funkcja

$$\gamma_1(\theta) = -2V_{\infty}\alpha \cos \theta / \sin \theta = -2V_{\infty}\alpha \cot \theta$$

spełnia równanie!

Niestety, funkcja $\gamma_1(\theta)$ nie spełnia warunku K-Ż !!!!

Ze względu na liniowość problemu, otrzymany rozkład można zmodyfikować o dowolną funkcję $\gamma_2(\theta)$, byle spełniała ona równość

$$\int_0^{\pi} \frac{\gamma_2(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = 0$$

Pierwszy typ całki Glauerta dla $n = 0$ daje

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = 0$$

Wobec tego, poszukiwana funkcja to $\gamma_2(\theta) = \frac{K}{\sin \theta}$. Pełny rozkład cyrkulacji ma postać

$$\gamma(\theta) = -2V_{\infty}\alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{K}{\sin \theta}$$

Spełnienie warunku Kutty-Żukowskiego zapewnia wybór $K = -2V_{\infty}\alpha$.

AERODYNAMIKA I

Ostatecznie, rozkład gęstości cyrkulacji zadany jest wzorem

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty\alpha \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = -2V_\infty\alpha \frac{2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)} = -2V_\infty\alpha \cot(\frac{1}{2}\theta)$$

Zauważmy, że na krawędzi natarcia gęstość cyrkulacji staje się nieograniczona!!!

Obliczmy całkowity ładunek cyrkulacji. Mimo osobliwości, ładunek ten jest skończony

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi = -2V_\infty\alpha \int_0^\pi \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \frac{c}{2} \sin\theta d\theta = -V_\infty c \alpha \int_0^\pi (1 + \cos\theta) d\theta = -\pi\alpha V_\infty c$$

Siła i moment aerodynamiczny w teorii cienkiego profilu

Ze wzoru Kutty-Żukowskiego wynika, że **siła nośna** równa jest

$$L = \underbrace{\rho V_\infty |\Gamma|}_L (-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y)$$

czyli wartość tej siły to

$$L = \pi \alpha \rho V_\infty^2 c = C_L \underbrace{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}_{q_\infty} c = C_L q_\infty c$$

Współczynnik siły nośnej równy jest

$$C_L = 2\pi\alpha$$

Nachylenie (liniowej) charakterystyki $C_L = C_L(\alpha)$

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi$$

UWAGA: w tradycji polskiej współczynnik siły nośnej oznaczany jest zazwyczaj symbolem C_z (a współczynnik oporu - C_x).

AERODYNAMIKA I

Obliczymy **moment aerodynamiczny względem krawędzi natarcia**.

Dla małych kątów natarcia mamy

$$\begin{aligned} M_0 &\approx \int_0^c x dL(x) \approx \int_0^c x L'(x) dx = -\rho V_\infty \int_0^c x \Gamma'(x) dx = -\rho V_\infty \int_0^c x \gamma(x) dx = \\ &= -\rho V_\infty \int_0^\pi \frac{1}{2} c (1 - \cos \theta) (-2V_\infty \alpha) \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \frac{1}{2} c \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \alpha \rho V_\infty^2 c^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \pi \alpha \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2 = \frac{1}{4} c \pi \alpha \rho V_\infty^2 c = \frac{1}{4} c L \end{aligned}$$

Z przeprowadzonego rachunku wynika, że **dla małych kątów natarcia punkt przyłożenia siły aerodynamicznej (tzw. środek parcia) na cienkim profilu symetrycznym jest położony w odległości $\frac{1}{4}$ cięciwy od noska profilu.**

UWAGA:

W aerodynamice lotniczej przyjęła się umowa odnośnie znaku momentu – moment obracający profil odwrotnie zegarowo (czyli opuszczający nosek, a więc zmniejszający kąt natarcia) uznaje się za ujemny. Wg tej umowy moment działający na profil symetryczny pod dodatnim kątem natarcia jest ujemny.

Dostosowanie otrzymanej wcześniej formuły do w/w umowy sprowadza się do zmiany znaku

$$M_0 = -\frac{1}{4} c L$$

Współczynnik momentu aerodynamicznego definiujemy następująco

$$C_{m,0} = \frac{M_0}{q_\infty c^2} = -\frac{\frac{1}{4} c L}{q_\infty c^2} = -\frac{1}{4} \frac{L}{q_\infty c} = -\frac{1}{4} C_L$$

Moment względem innego punktu P o współrzędnej $x = x_P$ obliczamy następująco

$$M_P = -\int_0^c (x - x_P) dL(x) = -\underbrace{\int_0^c x dL(x)}_{M_0} + x_P L = (-\frac{1}{4} c + x_P) L$$

AERODYNAMIKA I

W terminach współczynników aerodynamicznych ...

$$C_{m,P} = \frac{(-\frac{1}{4}c + x_P)L}{q_\infty c^2} = (-\frac{1}{4} + \bar{x}_P)C_L = C_{m,0} + \bar{x}_P C_L$$

W szczególności, dla $\bar{x}_P = \frac{1}{4}$, mamy oczywiście $C_{m,c/4} = 0$

Widzimy, że współczynnik momentu aerodynamicznego względem $\bar{x}_P = \frac{1}{4}$ (czyli środka parcia) nie zależy (w zakresie małych kątów natarcia) od kąta natarcia czyli

$$\frac{dC_{m,c/4}}{d\alpha} = 0$$

Wynika z tego, że **środek parcia jest – dla cienkiego profilu symetrycznego – jednocześnie środkiem aerodynamicznym (SA)**, tj. takim punktem, że moment aerodynamiczny (względem SA) nie zależy od kąta natarcia.

Rozszerzmy rozważania – rozważmy teraz opływ **cienkiego profilu niesymetrycznego**.

Podstawowe równanie teorii ma teraz postać

$$V_{\infty}[\alpha - Y'(x)] + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \xi} = 0$$

a – po zastosowaniu tej samej co poprzednio zamiany zmiennych

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = -V_{\infty} \alpha + V_{\infty} Y'[x(\theta_0)]$$

Rozwiązanie tego przypadku jest bardziej złożone. Poszukujemy rozkładu cyrkulacji w postaci szeregu

$$\gamma(\theta) = -2V_{\infty} \left[A_0 \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right]$$

AERODYNAMIKA I

Po podstawieniu do równania podstawowego otrzymujemy

$$\frac{A_0}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \alpha - Y'[x(\theta_0)]$$

Wykorzystując wprowadzone wcześniej całki Glauerta, otrzymujemy

$$\int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = -\pi \cos n\theta_0$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta}_{=0} + \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta}_{=\pi \text{ pierwsza całka Glauerta dla } n=1} = \pi$$

Równanie teorii cienkiego profilu sprowadza się do

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_0 = \alpha - Y'[x(\theta_0)]$$

Równoważnie

$$Y'[x(\theta_0)] = (\alpha - A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_0$$

Pomysł na wyznaczenie współczynników A_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ jest prosty i sprowadza się do:

- wyrażenia funkcji $Y' = Y'(x)$ jako zależności od współrzędnej θ w przedziale $[0, \pi]$,
- obliczenia współczynników cosinusowego szeregu Fouriera tak otrzymanej funkcji.

Oznaczmy zatem $P(\theta_0) = Y'[x(\theta_0)]$. Rozwijamy funkcję $P(\theta_0)$ w szereg

$$P(\theta_0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta_0$$

Z teorii szeregów Fouriera wynika, że

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) d\theta \quad , \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) \cos n\theta d\theta$$

AERODYNAMIKA I

Otrzymujemy zatem związki

$$\alpha - A_0 = B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) d\theta \Rightarrow A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) d\theta$$

$$A_n = B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) \cos n\theta d\theta$$

W ten sposób wyznaczyliśmy rozkład cyrkulacji (**warunek Kutty-Żukowskiego** $\gamma(\pi) = 0$ jest automatycznie spełniony!)

$$\gamma(\theta) = -2V_{\infty} \left[A_0 \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right]$$

Całkowita cyrkulacja związana z profilem to

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi = \frac{c}{2} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin \theta d\theta = -cV_{\infty} \left[A_0 \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin \theta d\theta \right]$$

AERODYNAMIKA I

Ponieważ

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta = \pi \quad , \quad \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{gdy } n=1 \\ 0 & \text{gdy } n \neq 1 \end{cases}$$

to całkowita cyrkulacja zadana jest wzorem

$$\Gamma = -\pi c V_{\infty} (A_0 + \frac{1}{2} A_1)$$

Stąd, siła nośna L i jej współczynnik C_L są równe

$$L = \rho V_{\infty} |\Gamma| = 2\pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1) \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c = 2\pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1) q_{\infty} c$$

$$C_L = 2\pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1)$$

Konkretnie ...

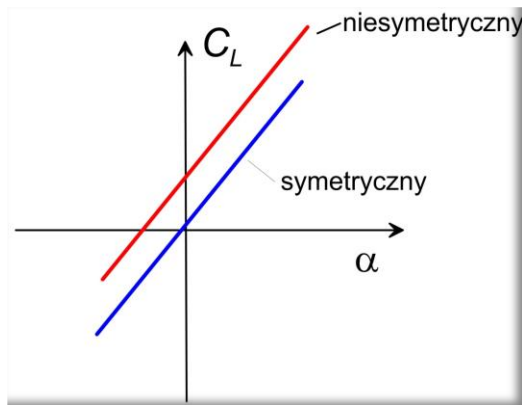
$$C_L = 2\pi \left[\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) (\cos \theta - 1) d\theta \right]$$

AERODYNAMIKA I

Jak widać, nachylenie charakterystyki $\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi$, czyli nie zależy od wygięcia linii szkieletowej.

Komentarz: w Wykładzie 2 pojawiło się zadanie polegające na wykazaniu, że nachylenie charakterystyki wsp. siły nośnej dla wygiętego profilu Żukowskiego o zerowej grubości (łuk okręgu) jest równe $\frac{dC_L}{d\alpha} \approx 2\pi(1 + 2\bar{f}^2)$. Zauważmy, że poprawka jest proporcjonalna do kwadratu względnego wygięcia profilu, czyli dla małych wartości tego wygięcia jest bardzo mała. Zaprezentowana teoria cienkiego profilu „nie widzi” tej poprawki (dlaczego?!)

Otrzymana formuła dla współczynnika siły nośnej może być zapisana w postaci



gdzie

$$C_L = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$$

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi P(\theta)(\cos\theta - 1) d\theta$$

jest (ujemnym) kątem natarcia, przy którym wygięty profil nie wytwarza siły nośnej.

AERODYNAMIKA I

Obliczmy dalej moment aerodynamiczny względem punktu (krawędzi) natarcia

$$\begin{aligned} M_0 &= -\rho V_\infty \int_0^c x \gamma(x) dx = -\rho V_\infty \int_0^c x \gamma(x) dx = -\frac{1}{4} \rho V_\infty c^2 \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \gamma(\theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2 \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \left[A_0 \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right] \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2 \left[A_0 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \sin n\theta \sin \theta d\theta \right] \end{aligned}$$

Pojawiły się następujące całki

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \pi$$

$$\int_0^\pi (1 - \cos \theta) \sin n\theta \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin n\theta \sin 2\theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{gdy } n=1 \\ -\pi/4 & \text{gdy } n=2 \\ 0 & \text{gdy } n \notin \{1, 2\} \end{cases}$$

Otrzymujemy wzór

$$M_0 = \frac{1}{4} \pi \rho V_\infty^2 c^2 (A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2)$$

Ponownie, dostosowując konwencje znaków do „zwyczajów aerodynamicznych” mamy

$$M_0 = -\frac{1}{4} \pi \rho V_\infty^2 c^2 (A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2) = -\frac{1}{2} \pi (A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2) q_\infty c^2$$

Współczynnik momentu aerodynamicznego jest zatem równy

$$C_{m,0} = -\frac{1}{2} \pi (A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2) = -\frac{1}{4} [C_L + \pi (A_1 - A_2)]$$

Z wcześniejszych rozważań wynika, że

$$C_{m,c/4} = C_{m,0} + \frac{1}{4} C_L = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1)$$

Otrzymana wartość momentu nie zależy od kąta natarcia. Wnioskujemy, że punkt $x = \frac{1}{4} c$ nie jest tym razem środkiem parcia (bo moment aerodynamiczny względem tego punktu nie jest na ogół równy zero), ale jest środkiem aerodynamicznym.

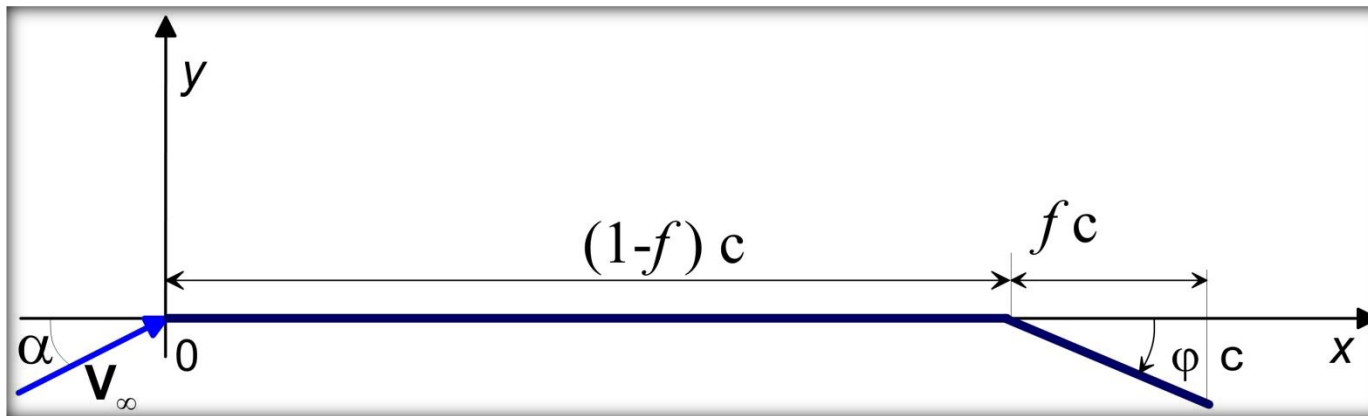
AERODYNAMIKA I

Współrzędna środka parcia to taka wartość x_P , że

$$\begin{aligned}x_P &= \frac{\frac{1}{2} \pi q_\infty c^2 (A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2)}{2\pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1) q_\infty c} = \frac{\frac{1}{2} \pi c [A_0 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} (A_1 - A_2)]}{\underbrace{2\pi (A_0 + \frac{1}{2} A_1)}_{C_L}} = \\ &= \frac{c}{4} + \frac{c}{4} \frac{\pi}{C_L} (A_1 - A_2) = \frac{c}{4} \left[1 + \frac{\pi}{C_L} (A_1 - A_2) \right]\end{aligned}$$

Cienki profil symetryczny z klapą

Na koniec omówimy krótko prosty model cienkiego profilu symetrycznego z klapą (zakładamy, że wychylenie kłapy jest niewielkie)



Linia szkieletowa i jej pochodna

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0, x_f] \\ -tg\varphi(x - x_f) & \text{gdy } x \in (x_f, c] \end{cases}, \quad x_f = (1 - f)c$$

$$Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0, x_f) \\ -tg\varphi & \text{gdy } x \in [x_f, c] \end{cases}$$

AERODYNAMIKA I

Stosujemy - jak poprzednio - zmianę współrzędnych $x \rightarrow \theta$.

Wyznaczamy wartość współrzędnej katowej odpowiadającej punktowi obrotu (zawiasowi) klapy

$$x_f = (1-f)c \Rightarrow \frac{1}{2}c(1-\cos\theta_f) = (1-f)c$$

Stąd

$$\cos\theta_f = 2f - 1$$

Np. dla $f = 0.15$ mamy $\theta_f = \arccos(-0.7) \approx 134.43^\circ$.

Funkcja $P(\theta)$ opisana jest następująco

$$P(\theta) = Y'[\frac{1}{2}c(1-\cos\theta)] = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \theta \in [0, \theta_f) \\ -\text{tg}\varphi & \text{gdy } \theta \in [\theta_f, \pi] \end{cases}$$

AERODYNAMIKA I

Obliczymy współczynniki Fouriera występujące we wzorach na siłę nośną i moment aerodynamiczny. Mamy

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_f}^{\pi} (-\operatorname{tg} \varphi) d\theta = - \left[1 - \frac{\theta_f}{\pi} \right] \operatorname{tg} \varphi$$

Zatem
$$A_0 = \alpha + (1 - \theta_f / \pi) \operatorname{tg} \varphi$$

I dalej ...

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} (-\operatorname{tg} \varphi) \int_{\theta_f}^{\pi} \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} (-\operatorname{tg} \varphi) (-\sin \theta_f) = \frac{2}{\pi} \sin \theta_f \operatorname{tg} \varphi$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) \cos 2\theta d\theta = \frac{2}{\pi} (-\operatorname{tg} \varphi) \int_{\theta_f}^{\pi} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{\pi} (-\operatorname{tg} \varphi) (-\sin 2\theta_f) = \frac{1}{\pi} \sin 2\theta_f \operatorname{tg} \varphi$$

AERODYNAMIKA I

Współczynnik siły nośnej symetrycznego cienkiego profilu z klapą jest zadany wzorem

$$C_L = 2\pi(A_0 + \frac{1}{2}A_1) = 2\pi\alpha + 2\pi(1 - \theta_f/\pi + \frac{1}{\pi}\sin\theta_f)\operatorname{tg}\varphi = \\ \approx 2\pi\alpha + 2(\pi - \theta_f + \sin\theta_f)\varphi$$

Współczynnik momentu aerodynamicznego jest równy

$$C_{m,0} = -\frac{1}{2}\pi(A_0 + A_1 - \frac{1}{2}A_2)$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$C_{m,0} = -\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{1}{2}[\pi - \theta_f + (2 - \cos\theta_f)\sin\theta_f]\varphi$$

Obliczmy wartości współczynników przy kącie wychylenia kłapy dla profilu w klapą 15% (czyli $f = 0.15$). Wiemy, że $\theta_f \approx 134.4^\circ$.

$$2(\pi - \theta_f + \sin\theta_f) \approx 3.02$$

$$\frac{1}{2}[\pi - \theta_f + (2 - \cos\theta_f)\sin\theta_f] \approx 1.36$$

AERODYNAMIKA I

Otrzymaliśmy następujące zależności

$$C_L = 2\pi\alpha + 3.02\varphi \quad , \quad C_{m,0} = -\frac{\pi}{2}\alpha - 1.36\varphi$$

Współczynnik momentu $C_{m,c/4}$

$$\begin{aligned} C_{m,c/4} &= \frac{\pi}{4}(A_2 - A_1) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\pi}\sin 2\theta_f \operatorname{tg} \varphi - \frac{2}{\pi}\sin \theta_f \operatorname{tg} \varphi\right) = \\ &\approx \frac{1}{4}(\sin 2\theta_f - \sin \theta_f)\varphi \end{aligned}$$

Dla klapy 15%

$$C_{m,c/4} \approx -0.395\varphi$$

Zadanie: Przeprowadź analogiczną analizę dla cienkiego profilu symetrycznego z klapą przednią (slotem). Przyjmij, że zawias klapy znajduje się w odległości $f \cdot c$ od noska profilu. Wyznacz wartość liczbową współczynników stojących w wyrażeniach na C_L i $C_{m,c/4}$ przy kącie wychylenia slotu φ (zakładamy, że jest on niewielki, zatem $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$). Porównaj wpływ slotu i klapy tylnej na charakterystyki aerodynamiczne.