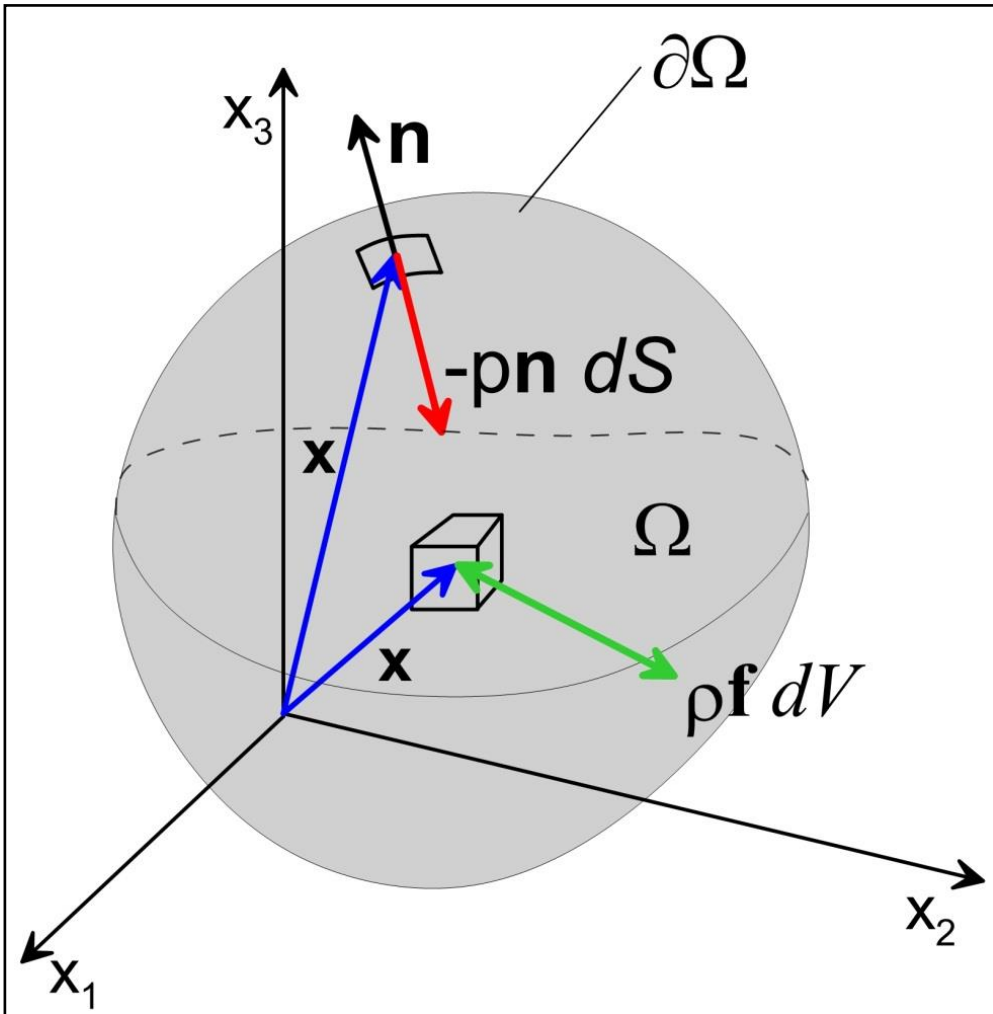


WYKŁAD 1

WPROWADZENIE DO STATYKI PŁYNÓW

RÓWNOWAGA SIŁ



Siła powierzchniowa $F_S = - \int_{\partial\Omega} p n dS$

Siła objętościowa $F_V = \int_{\Omega} \rho f dV$

Warunek konieczny równowagi płynu

$$F_S + F_V = 0$$

Całkowa postać warunku równowagi płynu

$$- \int_{\partial\Omega} p n dS + \int_{\Omega} \rho f dV = 0$$

Wyprowadzimy różniczkową formę warunku równowagi sił. W tym celu dokonamy transformacji całki powierzchniowej do całki objętościowej. Mamy

$$\int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS = \mathbf{e}_1 \int_{\partial\Omega} p n_1 dS + \mathbf{e}_2 \int_{\partial\Omega} p n_2 dS + \mathbf{e}_3 \int_{\partial\Omega} p n_3 dS$$

Przekształcimy pierwszą z całek ...

$$\int_{\partial\Omega} p n_1 dS = \int_{\partial\Omega} [p, 0, 0] \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} [p, 0, 0] dV = \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_1} dV$$

Twierdzenie GGO

Ogólnie ...

$$\int_{\partial\Omega} p n_k dS = \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_k} dV, \quad k = 1, 2, 3 \Rightarrow \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \nabla p dV$$

Całkowy warunek równowagi sił przyjmuje postać

$$\int_{\Omega} (-\nabla p + \rho \mathbf{f}) dV = \mathbf{0}$$

Obszar Ω został wybrany dowolnie oraz wyrażenie całkowe jest - z założenia – ciągłą funkcją współrzędnych przestrzennych. Z powyższej równości wynika zatem, że wyrażenie podcałkowe jest tożsamościowo równe zeru w obszarze zajęтым przez nieruchomy płyn. Mamy zatem następujące równanie różniczkowe (wektorowe)

$$-\nabla p + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

Kluczowe pytanie: czy musimy „martwić się” o zapewnienie równowagi momentów sił?!

Odpowiednie momenty sił (obliczone względem początku układu współrzędnych) są określone następująco

$$\mathbf{M}_S = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times p \mathbf{n} dS \quad , \quad \mathbf{M}_V = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} dV$$

Warunkiem (koniecznym) bezruchu płynu jest , aby

$$\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_V = \mathbf{0}$$

Pokażmy, że warunek ten wynika automatycznie z równowagi sił (i przyjętego modelu oddziaływania na powierzchni, w którym w stanie bezruchu płyn nie „przenosi” naprężeń stycznych, czyli jest **plynem Pascala**).

Mamy

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times p \mathbf{n} dS = \mathbf{e}_1 \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x} \times \mathbf{n})_1 dS + \mathbf{e}_2 \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x} \times \mathbf{n})_2 dS + \mathbf{e}_3 \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x} \times \mathbf{n})_3 dS$$

Transformujemy całki powierzchniowe do całek objętościowych. Odpowiednie rachunki dla pierwszej z całek przebiegają następująco

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x} \times \mathbf{n})_1 dS &= \int_{\partial\Omega} p(x_2 n_3 - x_3 n_2) dS = \\ &= \int_{\partial\Omega} [0, 0, px_2] \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\partial\Omega} [0, px_3, 0] \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (px_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (px_3) \right] dV = \\ &= \int_{\Omega} \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} p - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} p \right] dV = \int_{\Omega} (\mathbf{x} \times \nabla p)_1 dV \end{aligned}$$

Ogólnie ...

$$\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x} \times \mathbf{n}) dS = \int_{\Omega} (\mathbf{x} \times \nabla p) dV$$

Warunek równowagi momentów sił przyjmuje postać

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} \times (-\nabla p + \rho \mathbf{f}) dV = \mathbf{0}$$

i jest spełniony automatycznie jeśli tylko spełnione jest różniczkowe równanie równowagi dla sił. Wnioskujemy, że dla przyjętego modelu płynu (Pascala) mamy następujące **równanie różniczkowe statyki**

$$\nabla p = \rho \mathbf{f}$$

Czy równanie to ma zawsze rozwiązanie? Odpowiedź brzmi NIE!

Rozwiązanie powyższego równania może być otrzymane wyłącznie wtedy, gdy **prawa strona tego równania, czyli ρf , jest potencjalnym polem wektorowym.** Warunkiem **koniecznym** takiej właściwości jest, aby **rotacja tego pola była równa zeru.**

$$\text{rot}(\rho f) \equiv \nabla \times (\rho f) = \mathbf{0}$$

Pamiętamy z analizy, że operator rotacji *rot* może być obliczony w kartezjańskim układzie współrzędnych jako formalny wyznacznik

$$\text{rot } \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} w_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} w_2 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} w_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} w_3 \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} w_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} w_1 \right) \mathbf{e}_3$$

Można pokazać (ćwiczenie !!!) prawdziwość następującej równości

$$\nabla \times (\rho f) = \rho \nabla \times f + \nabla \rho \times f = \mathbf{0}$$

Otrzymana równość wyraża warunek konieczny równowagi (bezruchu) płynu Pascala w zewnętrznym polu sił objętościowych f . Póki co, niewiele z tego wynika!

Założmy jednak, że pole sił f **jest polem potencjalnym**, tj. istnieje takie pole skalarne Φ , że

$$f = \text{grad}\Phi \equiv \nabla\Phi$$

Wówczas

$$\nabla \times f \equiv \text{rot } f = \text{rot grad}\Phi \equiv \nabla \times \nabla\Phi = 0$$

i

$$\nabla \times (\rho f) = \nabla\rho \times f = 0$$

W własności iloczynu wektorowego wynika, że **gradient gęstości płynu w warunkach bezruchu jest w każdym punkcie zorientowany równoległe do lokalnego wektora siły objętościowej**, tj.

$$\nabla\rho \parallel f$$

Jeśli przepiszemy różniczkowe równanie statyki w postaci

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = f$$

to dla potencjalnego pola sił otrzymamy równość

$$0 = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \underbrace{\nabla \times \nabla}_{0} p = -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

z której wynika, że

$$\nabla \rho \parallel \nabla p$$

Wnioskujemy stąd, że **w warunkach bezruchu w potencjalnym polu sił powierzchnie stałej gęstości i powierzchnie stałego ciśnienia (izobaryczne) pokrywają się** (przypomnijmy, że w każdym punkcie izopowierzchni pola skalarne jego gradient jest wektorem prostopadłym do tej powierzchni), Wynika stąd następnie, że w warunkach spoczynku istnieje globalny związek pomiędzy gęstością a ciśnieniem

$$\rho = \rho(p)$$

Mówimy, że **płyn znajduje się w stanie barotropowym** (lub krótko – jest barotropowy). Jest to sytuacja szczególna, bowiem typowo do określenia gęstości płynu nie wystarczy znajomość samego ciśnienia (potrzebna jest również znajomość jeszcze innej funkcji stanu, np. temperatury). Innymi słowy, typowo płyn jest w stanie ogólniejszym (zwanym baroklinowym). Wyjątkiem jest płyn o stałej gęstości, który jest (w warunkach izotermicznych) „trywialnie” barotropowy.

Zauważmy, że **płyn barotropowy może pozostawać w równowadze wyłącznie w potencjalnym polu sił objętościowych**. Wprowadźmy bowiem funkcję (tzw. potencjał ciśnienia) wzorem

$$P'(p) = \frac{1}{\rho(p)}$$

Zatem, sama funkcja P określona jest całką nieoznaczona postaci

$$P = P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Rozważmy następnie funkcję złożoną $\tilde{P}(\mathbf{x}) = P[p(\mathbf{x})]$. Jej pochodne cząstkowe obliczamy stosując regułę łańcuchową

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{P}(\mathbf{x}) = P'[p(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial x_k} p(\mathbf{x}) \quad , \quad k = 1, 2, 3$$

Wynika stąd, że

$$\nabla \tilde{P} = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

i równanie różniczkowe statyki przyjmuje postać

$$\nabla \tilde{P} = \mathbf{f}$$

Jeśli równanie to ma rozwiązanie to pole sił objętościowych jest automatycznie potencjalne, czyli

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi$$

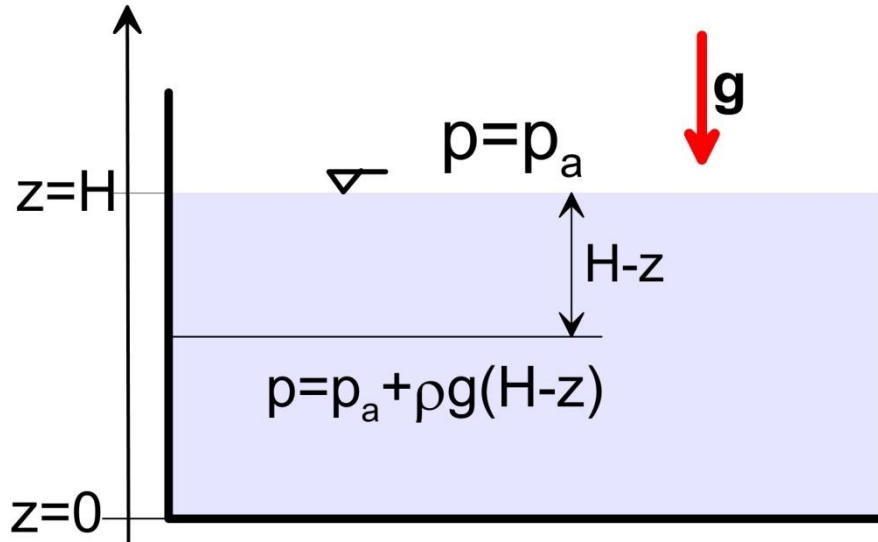
przy czym potencjał Φ różni się od potencjału ciśnienia \tilde{P} o stałą addytywną

$$\tilde{P} = \Phi + const$$

Otrzymane równanie jest tzw. całką pierwszą równania różniczkowego statyki i ma postać związku algebraicznego umożliwiające wyznaczenie rozkładu ciśnienia w płynie.

PRZYKŁADY

1. Płyn o stałej gęstości w jednorodnym i jednokierunkowym polu grawitacyjnym.



Założmy, że

$$f = [0, 0, -g]$$

Potencjał pola f to

$$\Phi = -gz + const$$

Ponieważ gęstość jest stała to

$$P = p / \rho$$

Zatem

$$p = \rho\Phi + C = -\rho gz + C$$

Potrzeba wyznaczyć stałą w rozkładzie ciśnienia. Na powierzchni swobodnej ciśnienie jest równe ciśnieniu atmosferycznemu w otoczeniu naczynia. Zatem

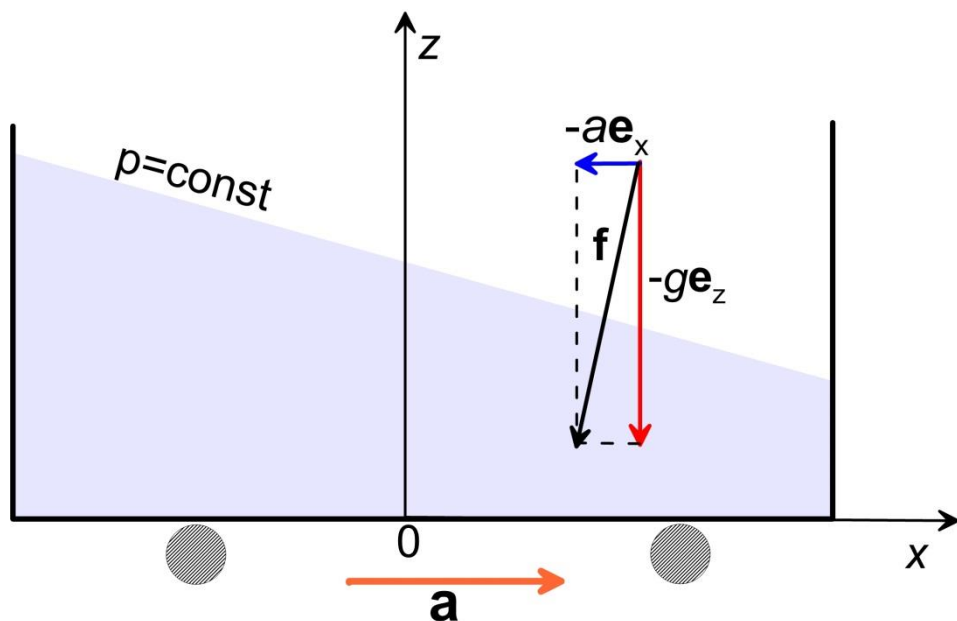
$$p(H) = p_a = C - \rho gH \Rightarrow C = p_a + \rho gH$$

Ostatecznie, rozkład ciśnienia zadany jest wzorem (Pascal) $p(z) = p_a + \rho g(H - z)$

Powierzchnie izobaryczne:

$$p = cont \Rightarrow z = const$$

2. Płyn o stałej gęstości w polu sił objętościowych będących sumą jednorodnego pola grawitacyjnego i pola sił bezwładności wywołanych przyspieszonym ruchem postępowym.



Wyznaczenie ogólnego rozkładu ciśnienia przebiega następująco:

$$\mathbf{f} = [-a, 0, -g] \Rightarrow \Phi = -ax - gz + const$$

⇓

$$p = -\rho ax - \rho gz + C$$

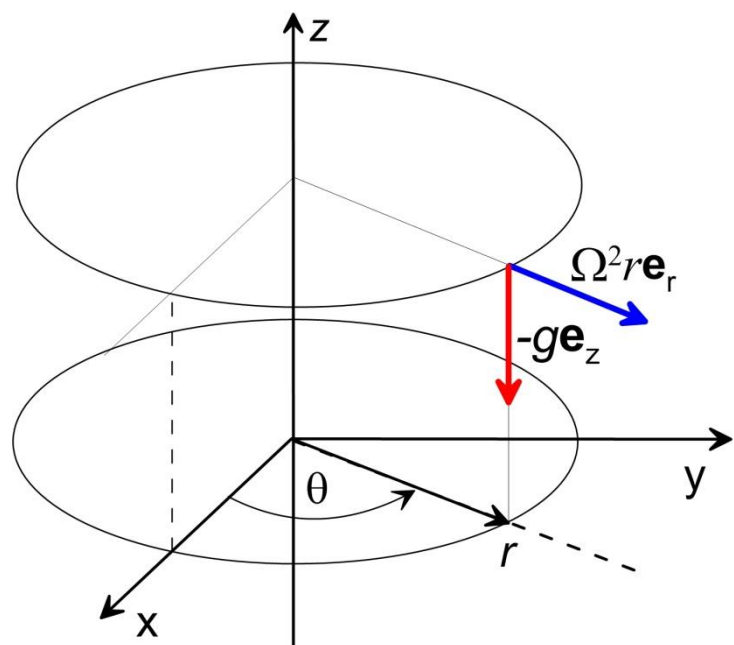
Podobnie jak w Przykładzie 1, wyznaczenie stałej C , wymaga znajomości ciśnienia w jednym punkcie płynu.

Powierzchnie izobaryczne są pochyłymi płaszczyznami

$$p = const \Rightarrow ax + gz = const \Rightarrow z = -\frac{a}{g}x + const$$

Zauważmy, że wektor \mathbf{f} jest prostopadły do tych powierzchni (ogólna reguła!)

3. Płyn o stałej gęstości w polu sił objętościowych będących sumą jednorodnego pola grawitacyjnego i pola sił bezwładności wywołanych ruchem obrotowym.



Naturalnym rozwiązaniem jest wykorzystać współrzędne cylindryczne. Wektor pola sił objętościowych ma wówczas postać

$$\mathbf{f} = [f_r, f_\theta, f_z,] = [\Omega^2 r, 0, -g]$$

gdzie Ω jest prędkością kątową. Pole \mathbf{f} jest osiowo symetryczne (brak składowej obwodowej, pozostałe nie zależą od kąta θ). Potencjał tego pola jest związany ze składowymi następująco

$$f_r = \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, z) \quad , \quad f_z = \frac{\partial}{\partial z} \Phi(r, z)$$

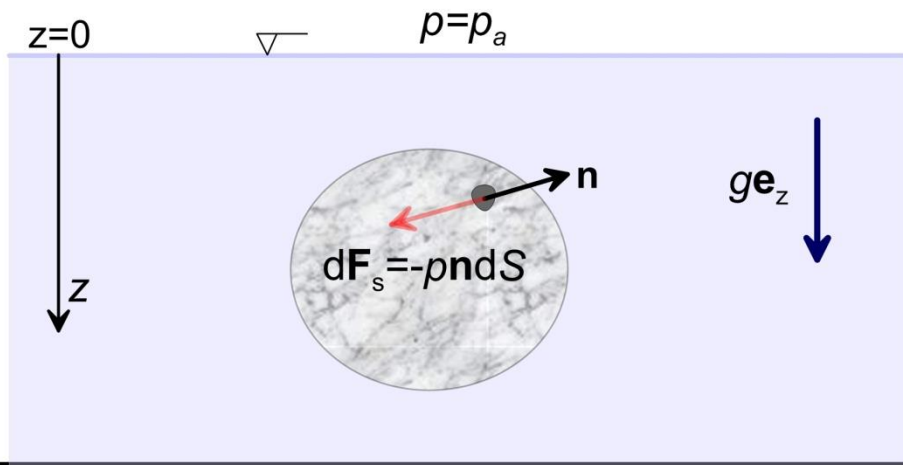
Jasnym jest, że $\Phi(r, z) = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 - gz + const$

Pole ciśnienia odpowiadające zadanemu polu sił to $p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho gz + const$

Zauważmy, że powierzchnie izobaryczne (w tym również powierzchnia swobodna!) to paraboloidy obrotowe

$$p = const \quad \Rightarrow \quad z(r) = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 + const$$

PRAWO ARCHIMEDESA



Przedstawimy matematyczne wyprowadzenie najstarszego prawa statyki płynów – prawa Archimedeasa.

W tym celu obliczymy siłę wynikającą z rozkładu ciśnienia hydrostatycznego na powierzchni ciała zanurzonego w cieczy. mamy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_s &= - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS = - \int_{\partial\Omega} (p_a + \rho g z) \mathbf{n} dS = - \int_{\Omega} \nabla (p_a + \rho g z) dV = \\
 &= - \mathbf{e}_z \rho g \int_{\Omega} dV = - \rho g |\Omega| \mathbf{e}_z = -\mathbf{G}
 \end{aligned}$$

*objętość
wypartej
cieczy*

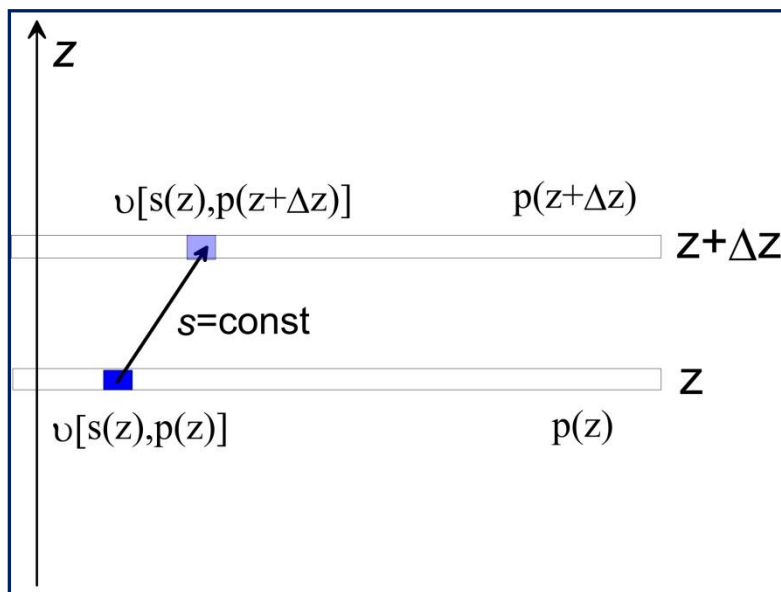
Otrzymaliśmy oczekiwany rezultat: **siła reakcji jest skierowana przeciwnie do siły grawitacyjnej (dlatego nazywamy ją wyporem hydrostatycznym) i jest co do wartości równa ciężarowi cieczy wypartej przez ciało.**

Pokażemy, że wektor siły wyporu jest przyłożony w geometrycznym środku zanurzonego ciała. W tym celu obliczymy moment siły hydrostatycznej względem początku układu odniesienia. Moment ten dany jest wzorem

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_0 &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times (-p\mathbf{n}) dS = - \int_{\partial\Omega} (p_a + \rho g z) \mathbf{x} \times \mathbf{n} dS = p_a \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{x} dS + \\
 &+ \rho g \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times (z\mathbf{x}) dS = p_a \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{x} dV + \rho g \int_{\Omega} \nabla \times (z\mathbf{x}) dV = \rho g \int_{\Omega} \nabla z \times \mathbf{x} dV + \\
 &\rho g \int_{\Omega} z \nabla \times \mathbf{x} dV = \rho g \mathbf{e}_z \times \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{x} dV}_{=\mathbf{x}_C |\Omega|} = \mathbf{x}_C \times \mathbf{F}_S
 \end{aligned}$$

Otrzymana równość dowodzi, że wektor \mathbf{F}_S jest przyłożony w punkcie \mathbf{x}_C czyli geometrycznym środku obszaru Ω .

RÓWNOWAGA WARSTWY GAZU W JEDNORODNYM POLU GRAWITACYJNYM



Rozważmy prosty model atmosfery w formie warstwy gazu Clapeyrona poddanej działaniu jednorodnego pola grawitacyjnego. Zakładamy, że wszystkie parametry termodynamiczne gazu są funkcjami współrzędnej pionowej z .

Wyobraźmy sobie, że mała porcja gazu o współrzędnej z doznaje „wirtualnego” przemieszczenia w kierunku pionowym do nowego położenia $z+\Delta z$ ($\Delta z > 0$). W trakcie tego przemieszczenia ciśnienie tej porcji płynu dostosowuje się do warunków lokalnych czyli przyjmuje

wartość $p(z + \Delta z)$. Z drugiej strony entropia właściwa porcji gazy pozostaje stała, bowiem cała operacja jest z założenia odwracalna termodynamicznie. Wobec tego, objętość właściwa przemieszczonej porcji gazu jest na ogół inna niż „nominalna” wartość tego parametry na poziomie $z+\Delta z$, co prowadzi do powstania ruchu. Mówimy, że warstwa gazu jest w stanie **równowagi trwałej**, jeśli porcja gazu przemieszczona nieco wyżej ($\Delta z > 0$) będzie „tonąć” w kierunku oryginalnego położenia, w przeciwnym wypadku mówimy o **równowadze chwiejnej**. Jeśli opisane przemieszczenie nie wywołuje ruchu (warstwa ma globalnie stałą entropię) to mówimy o stanie **równowagi obojętnej** (neutralnej).

Warunkiem równowagi trwałej jest aby objętość właściwa porcji płynu przemieszczonej do położenia $z+\Delta z$ była mniejsza niż objętość właściwa „nominalna” dla tego poziomu, czyli

$$v[p(z + \Delta z), s(z + \Delta z)] - v[p(z + \Delta z), s(z)] > 0$$

Ponieważ przemieszczenie Δz jest dowolnie małe, to powyższa nierówność jest równoważna warunkowi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

Pokażemy, że warunek równowagi trwałej może być sformułowany w terminach gradientu temperatury. W tym celu musimy jednak pomanipulować związkami termodynamicznymi.

Zacznijemy od pokazania, że

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Z kursu termodynamiki wiemy, że

$$dQ = Tds \quad , \quad c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = T \left(\frac{ds}{dT} \right)_p \quad , \quad c_v = T \left(\frac{ds}{dT} \right)_v$$

Zatem

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Ponieważ $T, c_p > 0$, warunek równowagi trwałej może być zapisany jako

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

Dalej, w warunkach izobarycznych objętość właściwa gazu rośnie wraz z temperaturą, zatem

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p > 0$$

Wnioskujemy stąd, że warunkiem równowagi trwałej jest nierówność $\frac{ds}{dz} > 0$.

Entropia właściwa warstwy gazu musi wzrastać z wysokością!

Przyjmijmy dalej, że entropia właściwa jest funkcją ciśnienia i temperatury gazu, tj. $s = s(p, T)$. Pionowy gradient entropii ma wówczas postać

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz}$$

Pokazaliśmy wcześniej, że $\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}$. Wykażemy teraz, że $\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$.

Rozważmy mianowicie funkcję entalpii swobodnej (funkcja Gibbsa) g zdefiniowanej wzorem (symbol e oznacza energię wewnętrzną właściwą gazu)

$$g = e + pv - Ts$$

Obliczmy różniczkę zupełną tej funkcji. Wykorzystując 1-szą Zasadę Termodynamiki możemy napisać równości

$$dg = du + d(pv) - d(Ts) = \underbrace{du + pdv + vdp}_{dQ=Tds} - Tds - sdT = vdp - sdT$$

Z powyższej formuły wynika, że

$$\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T = v, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$$

Wykorzystując otrzymane związki, możemy zapisać warunek równowagi trwałej w postaci

$$\frac{ds}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0$$

Ostatni krok polega na wykorzystaniu równania statyki płynów w celu eliminacji pionowego gradientu ciśnienia, a mianowicie

$$\nabla p = \rho f \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{g}{v}$$

Ostatecznie, otrzymujemy nierówność

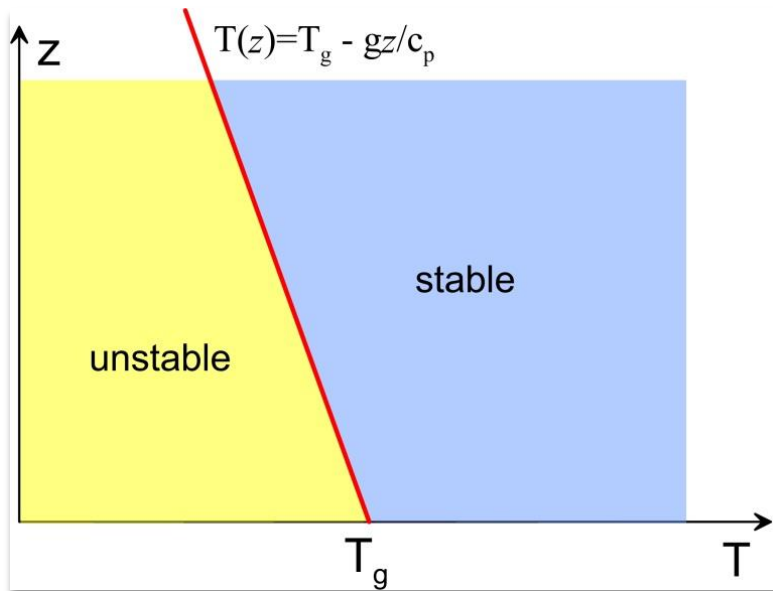
$$\frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{g}{v} > 0$$

lub, równoważnie $-\frac{dT}{dz} < \frac{\beta g T}{c_p}$, $\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ - **wsp. rozszerzalności termicznej**

Dla gazu Clapeyrona, współczynnik β wyliczamy łatwo z równania stanu

$$p\nu = RT, \quad \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p} \Rightarrow \beta = \frac{R}{p\nu} = \frac{1}{T}$$

Warunek równowagi trwałej przyjmuje postać $-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}$.



Dla atmosfery w pobliżu powierzchni Ziemi:

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}, \quad c_p = 1005 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Warunek równowagi trwałej: $-\frac{dT}{dz} < 0.0098 \frac{K}{m}$.

Podsumowując (vide obrazek):

$$\frac{dT}{dz} = \begin{cases} -\frac{g}{c_p} \quad (s = const) & - \text{ r-ga neutralna} \\ > -\frac{g}{c_p} \quad \left(\frac{ds}{dz} > 0 \right) & - \text{ r-ga trwała} \\ < -\frac{g}{c_p} \quad \left(\frac{ds}{dz} < 0 \right) & - \text{ r-ga chwiejna} \end{cases}$$

Wnioski:

1. W warunkach równowagi neutralnej pionowy gradient temperatury jest ujemny – temperatura spada o ok. 1 K na każde 100 m wysokości.
2. Szybszy spadek temperatury odpowiada warunkom równowagi chwiejnej – zaburzenie stanu bezruchu wywołuje w takim przypadku ruch zwany **konwekcją termiczną**.

Ćwiczenie: Posługując się równaniem statyki płynów, równaniem Clapeyrona i równaniem przemiany termodynamicznej wyprowadź zależność ciśnienia, gęstości i temperatury od wysokości dla warstwy gazu w stanie: (a) izentropowym, (b) izotermicznym.