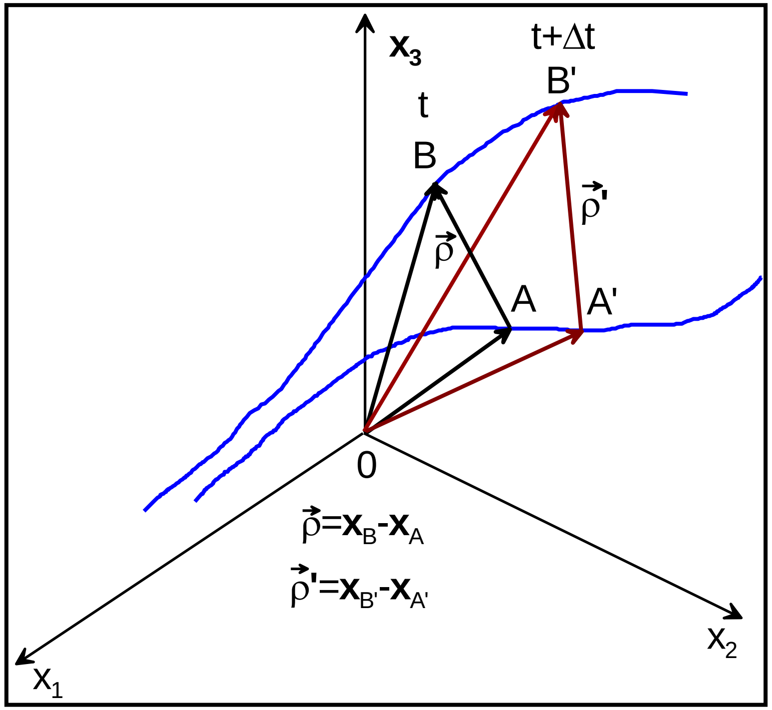
WYKŁAD 6
KINEMATYKA PRZEPŁYWÓW
CZĘŚĆ 2

DEFORMACJA OŚRODKA CIĄGŁEGO

Rozważmy dwa elementy płynu położone w pewnej chwili w bliskich sobie punktach **A** i **B**. Jak zmienia się ich względne położenie w krótkim interwale czasowym o długości Δt ?



Położenie pierwszego z elementów (względem globalnego układu odniesienia) po czasie Δt opisane jest wzorem

$$\boldsymbol{x}_{A'} = \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}_A)\,\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Ponieważ $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{\rho}$, mamy analogiczne wyrażenie dla drugiego elementu

$$\boldsymbol{x}_{B'} = \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{\rho})\,\Delta t + O(\Delta t^2),$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\rho}$ opisuje względne położenie tego elementu w czasie t.

W przedziale czasu Δt wektor ten przyjmuje nową wartość zgodnie z formułą (opuszczamy dolny indeks A)

$$\boldsymbol{\rho}(t+\Delta t) = \boldsymbol{x}_{B'} - \boldsymbol{x}_{A'} = \boldsymbol{\rho}(t) + [\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}_A)]\,\Delta t + O(\Delta t^2) =$$

$$= \boldsymbol{\rho}(t) + \left[\nabla \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\rho}\right]\Delta t + O(\Delta t^2, \Delta t\,|\boldsymbol{\rho}|^2)$$

W powyższej formule pojawia się macierz (tensor) $\nabla\boldsymbol{v}$ zwany **gradientem pola prędkości.** Z definicji $\left[\nabla\boldsymbol{v}\right]_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_i,\ i, j = 1, 2, 3.$

Tempo zmian wektora opisującego względne położenie dwóch elementów płynu otrzymamy różniczkując względem czasu

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{\rho}(t+\Delta t)-\boldsymbol{\rho}(t)}{\Delta t} = \nabla\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\rho} + O(|\,\boldsymbol{\rho}\,|^2).$$

Gradient prędkości $\nabla\boldsymbol{v}$ może być przedstawiony w postaci sumy dwóch tensorów, a mianowicie

$$\nabla\boldsymbol{v} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$$

gdzie

$$\boldsymbol{D} = \tfrac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T] \quad \text{lub} \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{- tensor symetryczny,}$$

i

$$\boldsymbol{R} = \tfrac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{v} - (\nabla\boldsymbol{v})^T] \quad \text{lub} \quad r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{- tensor antysymetryczny}$$

Pokażemy, że **krótkotrwała zmiana względnej pozycji bliskich elementów płynu zachodząca w wyniku działania antysymetrycznego tensora $\boldsymbol{R}$ odpowiada „sztywnemu" obrotowi płynu.**

Następnie pokażemy, że działaniu symetrycznego tensora $\boldsymbol{D}$ **odpowiada „prawdziwa" deformacja, tj. zmiana kształtu i/lub objętości elementów płynu.**

Zauważmy po pierwsze, że $r_{ij} = -\frac{1}{2}\in_{ijk}\omega_k$, gdzie $\omega_k, k=1,2,3$, to kartezjańskie współrzędne wektora wirowości

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{\upsilon} = \underbrace{\in_{ijk}\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_j}}_{\omega_k}\boldsymbol{e}_i.$$

Istotnie, mamy bowiem

$$-\tfrac{1}{2}\in_{ijk}\in_{k\beta\gamma}\frac{\partial\upsilon_\gamma}{\partial x_\beta} = -\tfrac{1}{2}(\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma}-\delta_{i\gamma}\delta_{j\beta})\frac{\partial\upsilon_\gamma}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_i}-\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}-\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_i}\right) = r_{ij}$$

Wobec tego, możemy napisać równość

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\rho} = r_{ij}\rho_j\boldsymbol{e}_i = -\tfrac{1}{2}\in_{ijk}\rho_j\omega_k\boldsymbol{e}_i = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}.$$

Wykażemy, że długość wektora $\boldsymbol{\rho}$ pod wpływem działania tensora $\boldsymbol{R}$ nie ulega zmianie:

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{\rho}|^2 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}) = 2(\boldsymbol{\rho},\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}) = 2(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{R}\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{0}$$

Ponieważ para elementów płynu może być wybrana dowolnie, otrzymany wynik jest równoznaczny ze stwierdzeniem, że transformacja geometryczna generowana przez tensor $\boldsymbol{R}$ to czysty (sztywny) obrót bez deformacji kształtu. Tensor ten nazywać będziemy dalej **tensorem obrotu**.

Podsumowując: antysymetryczna część tensora gradientu prędkości opisuje lokalny sztywny obrót elementów płynu. Odpowiadająca temu obrotowi lokalna prędkość kątowa jest równa $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$, czyli połowie lokalnego wektora wirowości.

DEFORMACJA ELEMENTÓW PŁYNU

Wiemy już, że tempo zmian wektora względnego położenia $\boldsymbol{\rho}$ (czyli prędkość zmian względnego położenia dwóch bliskich elementów płynu) dane jest wzorem

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = \underbrace{\boldsymbol{D}\boldsymbol{\rho}}_{deformacja} + \underbrace{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\rho}}_{sztywny\ obrót} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\rho} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}.$$

Pierwszy ze składników zawiera symetryczny tensor $\boldsymbol{D}$, zwany **tensorem prędkości deformacji**.

Tensor $\boldsymbol{D}$ może być przedstawiony jako suma dwóch składników: **tensora sferycznego** $\boldsymbol{D}_{SF}$ i **dewiatora** $\boldsymbol{D}_{DW}$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{SF} + \boldsymbol{D}_{DW}$$

Tensor sferyczny $\boldsymbol{D}_{SF}$ zdefiniowany jest następująco

$$\boldsymbol{D}_{SF} = \frac{1}{3}\underbrace{tr\,\boldsymbol{D}}_{slad\ \boldsymbol{D}}\cdot\boldsymbol{I} = \frac{1}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{I} \quad\Rightarrow\quad (\boldsymbol{D}_{SF})_{ij} = \frac{1}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\,,$$

Zauważmy, że

$$tr\,\boldsymbol{D}_{SF} = \frac{1}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\cdot tr\,\boldsymbol{I} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} \equiv div\,\boldsymbol{v}.$$

Dewiator $\boldsymbol{D}_{DW}$ jest oczywiście równy różnicy $\boldsymbol{D}$ i $\boldsymbol{D}_{SF}$. Mamy

$$\boldsymbol{D}_{DW} = \boldsymbol{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon})\boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{D}_{DW})_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

Zauważmy, że cechą dewiatora jest zerowy ślad

$$tr\,\boldsymbol{D}_{DW} = tr\,\boldsymbol{D} - tr\,\boldsymbol{D}_{SF} = 0$$

W celu wyjaśnieniu kinematycznego sensu rozkładu tensora $\boldsymbol{D}$ na część sferyczną i dewiatorową rozważymy deformację niewielkiego obszaru płynu. Dla uproszczenia ograniczymy się do analizy przypadku 2D i założymy, że początkowy kształt obszaru to prostokąt. Założymy, że tensor obrotu znika tożsamościowo.

Pochodna wektora względnego położenia przyjmuje postać

$$\tfrac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{D}_{SF}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{D}_{DW}\boldsymbol{\rho} \ .$$

Dla małego przyrostu czasu Δt, deformacja opisana jest następującą formułą

$$\boldsymbol{\rho}(t+\Delta t) = \boldsymbol{\rho}(t) + \underbrace{\boldsymbol{D}_{SF}\boldsymbol{\rho}\,\Delta t}_{\Delta\boldsymbol{\rho}_1} + \underbrace{\boldsymbol{D}_{DW}\boldsymbol{\rho}\,\Delta t}_{\Delta\boldsymbol{\rho}_2} + O(\Delta t^2)$$

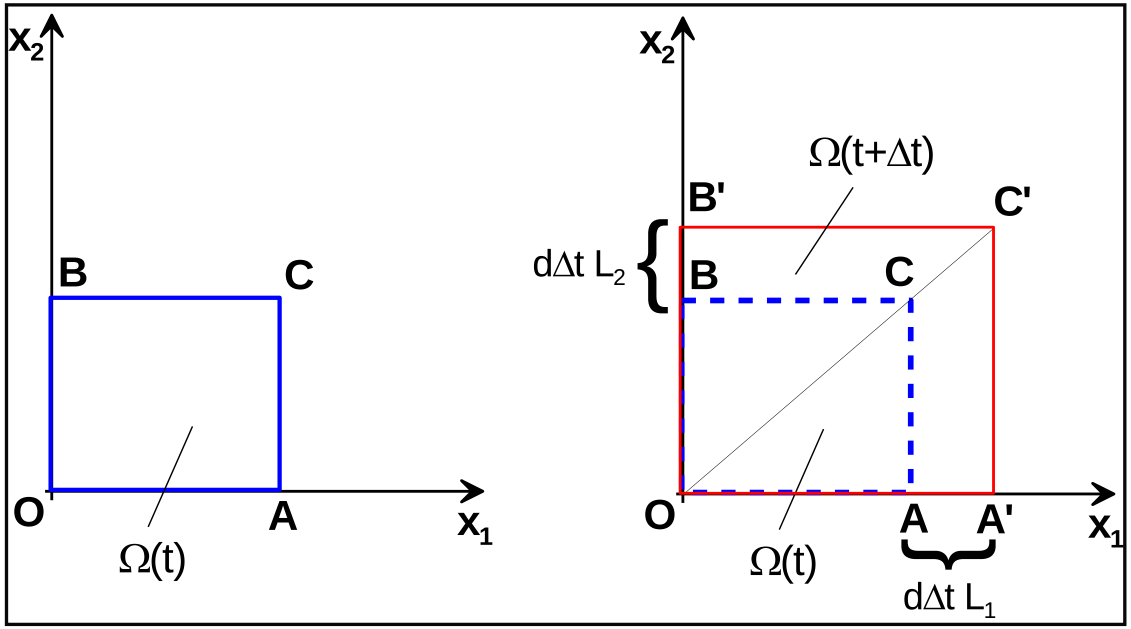
Rozważmy najpierw przypadek, w którym dewiator jest równy zeru.

Możemy napisać $\boldsymbol{D}_{SF}=\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

Stąd $tr\,\boldsymbol{D}=2d$

Prostokątny obszar OABC podlega deformacji przyjmując w czasie $t+\Delta t$ kształt opisany transformacją

$$\boldsymbol{\rho}(t+\Delta t)=(1+d\,\Delta t)\,\boldsymbol{\rho}(t)+O(\Delta t^2)$$



Kształt obszaru pozostaje zachowany bowiem transformacja ta jest izotropowym rozciąganiem ($d>0$) lub kurczeniem ($d<0$).

Oryginalna „objętość” (w sensie 2D) obszaru to $Vol_\Omega(t)=L_1L_2$. W wyniku deformacji przyjmuje ona wartość

$$Vol_\Omega(t+\Delta t)=L_1L_2(1+d\,\Delta t)^2=Vol_\Omega(t)(1+2d\,\Delta t)+O(\Delta t^2)$$

Względne tempo zmiany objętości obliczamy następująco

$$\frac{1}{Vol_{\Omega}(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Vol_{\Omega}(t+\Delta t)-Vol_{\Omega}(t)}{\Delta t}=2d=tr\,\boldsymbol{D}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

Widzimy, że **lokalne, chwilowe tempo zmian objętości elementu płynu jest równe wartości dywergencji pola prędkości**.

Rozważmy przypadek odwrotny – niech tym razem **część sferyczna tensora prędkości deformacji jest równa zeru**. W przypadku 2D ogólna postać dewiatora (czyli tensora symetrycznego o zerowym śladzie) jest następująca

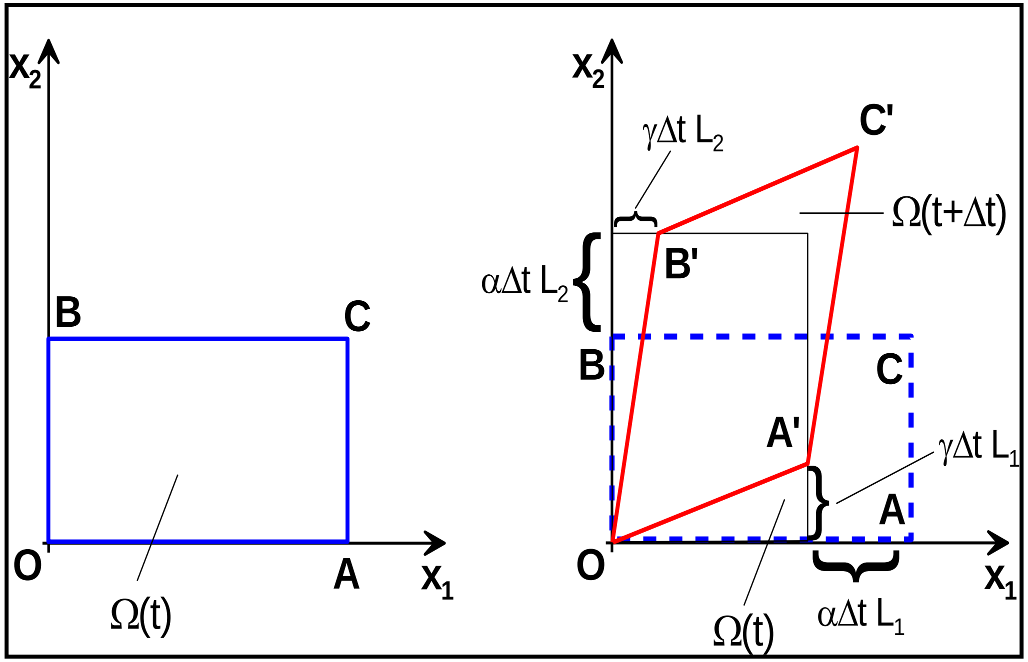
$$\boldsymbol{D}_{DW} = \begin{bmatrix} d_{11} - \frac{1}{2}d & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} - \frac{1}{2}d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(d_{11} - d_{22}) & d_{12} \\ d_{12} & \frac{1}{2}(d_{22} - d_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Wzór opisujący deformację płynu w krótkim przedziale czasu Δt ma postać

$$\boldsymbol{\rho}(t + \Delta t) = (\boldsymbol{I} + \Delta t\, \boldsymbol{D}_{DW})\, \boldsymbol{\rho}(t) + O(\Delta t^2)$$

Tym razem przyda się forma rozpisana …

$$\begin{cases} x_1(t + \Delta t) = (1 - \alpha\, \Delta t)\, x_1(t) + \gamma\, \Delta t\, x_2(t) \\ x_2(t + \Delta t) = \gamma\, \Delta t\, x_1(t) + (1 + \alpha\, \Delta t)\, x_2(t) \end{cases}$$



Zauważmy obecność ścinania, która manifestuje się zmianą kątów pomiędzy wektorami lokalizacji tych samych elementów płynu przed i po deformacji.

Obliczmy ponownie chwilowe tempo zmian objętości odpowiadające powyższej deformacji. Z wykorzystaniem elementarnej geometrii, rachunek przebiega następująco:

$$Vol_{\Omega}(t+\Delta t)=\begin{vmatrix}1-\alpha\,\Delta t & \gamma\,\Delta t\\ \gamma\,\Delta t & 1+\alpha\,\Delta t\end{vmatrix}L_1L_2=L_1L_2(1-\alpha^2\Delta t^2-\gamma^2\Delta t^2)=,$$

$$=Vol_{\Omega}(t)+O(\Delta t^2)$$

Stąd

$$\frac{1}{Vol_{\Omega}(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Vol_{\Omega}(t+\Delta t)-Vol_{\Omega}(t)}{\Delta t}=0.$$

Wnioskujemy, że chwilowe tempo zmian objętości odpowiadające deformacji opisanej wyłącznie przez część dewiatorową jest równe zeru. Mamy zatem do czynienia z czystą zmianą kształtu (czystym ścinaniem).