ZAGADNIENIA DODATKOWE

Dowód formuły Lamba-Gromeki

Mamy $\boldsymbol{\omega} = \in_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_k \boldsymbol{e}_i$ i $\upsilon^2 = \upsilon_i \upsilon_i$.

Wobec tego

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\upsilon} = \in_{k\beta\gamma} \omega_k \upsilon_\beta \boldsymbol{e}_\gamma = \in_{k\beta\gamma} \in_{ijk} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \upsilon_\beta \boldsymbol{e}_\gamma = (\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} - \delta_{i\gamma}\delta_{j\beta}) \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \upsilon_\beta \boldsymbol{e}_\gamma =$$

$$= \left(\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \upsilon_\beta - \delta_{i\gamma}\delta_{j\beta} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \upsilon_\beta \right) \boldsymbol{e}_\gamma = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_\beta} \upsilon_\beta - \frac{\partial \upsilon_\beta}{\partial x_\gamma} \upsilon_\beta \right) \boldsymbol{e}_\gamma =$$

$$= \left(\frac{\partial \upsilon_\gamma}{\partial x_\beta} \upsilon_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left(\tfrac{1}{2} \upsilon_\beta \upsilon_\beta \right) \right) \boldsymbol{e}_\gamma = (\boldsymbol{\upsilon} \cdot \nabla) \boldsymbol{\upsilon} - \nabla \left(\tfrac{1}{2} \upsilon^2 \right)$$

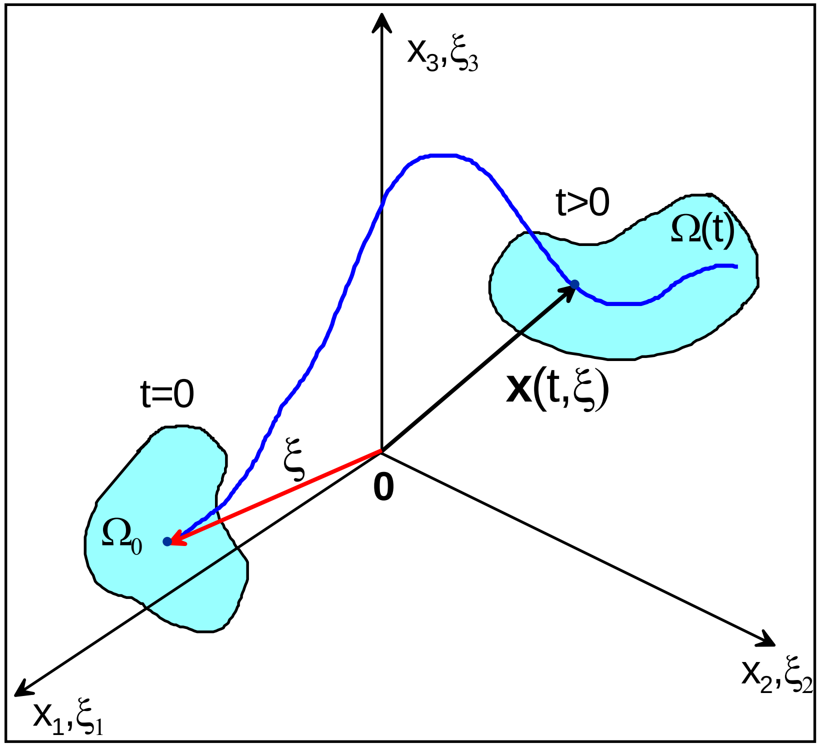
Stąd

$$(\boldsymbol{\upsilon} \cdot \nabla) \boldsymbol{\upsilon} = \nabla \left(\tfrac{1}{2} \upsilon^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\upsilon}$$

co było do okazania.

TWIERDZENIE REYNOLDSA (O TRANSPORCIE)

Dokażemy formuły znanej pod nazwą Twierdzenia Reynoldsa, odgrywającej istotną rolę w wyprowadzeniu (alternatywnym do stosowanego w tym kursie) równań różniczkowych wynikających z zasad zachowania. Twierdzenie Reynoldsa mówi jak obliczyć tempo zmian w czasie wielkości ekstensywnej przypisanej obszarowi materialnemu (płynnemu), a więc – na ogół – zmiennego w czasie.



Rozważmy dowolne, dostatecznie regularne pole skalarne $f = f(t, \boldsymbol{x})$ oraz całkę objętościową z tego pola z obszarze płynnym $\Omega(t)$.

$$C(t) = \int_{\Omega(t)} f(t, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Zadanie polega na obliczeniu pochodnej $$C'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(t, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Zauważmy, że zadanie to jest nietrywialne ponieważ sam obszar zmienia się w czasie!

Aby obliczyć tą pochodną przejdziemy od zmiennych Eulera $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$ do zmiennych Lagrange'a $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$. Całka $C(t)$ może być wówczas przekształcona następująco

$$C(t) = \int_{\Omega(t)} f(t, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_0} f[t, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})]\, J(t, \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} = \int_{\Omega_0} f_0(t, \boldsymbol{\xi})\, J(t, \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}\,.$$

W powyższej formule oznaczyliśmy symbolem f_0 funkcję złożoną postaci

$$f_0 = f_0(t, \boldsymbol{\xi}) = f[t, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})],$$

Pojawił się również wyznacznik macierzy Jacobiego (jakobian) przekształcenia, czyli

$$J(t, \boldsymbol{\xi}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} (t, \boldsymbol{\xi}).$$

Ponieważ obszar pierwotny Ω_0 nie zależy od czasu ($\Omega_0 \equiv \Omega(t=0)$) możemy wejść z operacją różniczkowania pod całkę. Otrzymamy wówczas

$$C'(t) = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} f_0(t,\xi)\,J(t,\xi)\,d\xi = \int_{\Omega_0} \frac{\partial f_0}{\partial t}(t,\xi)\,J(t,\xi)\,d\xi + \int_{\Omega_0} f_0(t,\xi)\frac{\partial J}{\partial t}(t,\xi)\,d\xi$$

Różniczkowanie pola f_0 względem czasu jest równoważne policzeniu pochodnej czasowej funkcji złożonej. Mamy zatem

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0(t,\xi) = \frac{d}{dt} f[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)] = \frac{\partial}{\partial t} f[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)] + \frac{\partial}{\partial x_i} f[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)] \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} x_i(t,\xi)}_{=V_i(t,\xi)=\upsilon_i[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} f + \boldsymbol{\upsilon}\cdot\nabla f\right)[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]$$

To było proste! Większym wyzwaniem jest **obliczenie pochodnej jakobianu**. Odpowiednią formułę można wyprowadzić na dwa sposoby …

Metoda A

Zapiszmy jakobian przy użyciu symbolu alternującego Levi-Civity

$$J(t,\xi)=\in_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_k}$$

Zauważmy, że kolejność różniczkowania względem czasu i współrzędnych Lagrange'a jest dowolna , co pozwala napisać równości

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}=\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_1}{\partial t}=\frac{\partial V_1}{\partial \xi_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}=\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_2}{\partial t}=\frac{\partial V_2}{\partial \xi_j}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_k}=\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{\partial x_3}{\partial t}=\frac{\partial V_3}{\partial \xi_k}$$

Obliczmy pochodną czasową jakobianu …

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{J} = \in_{ijk} \frac{\partial V_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} + \in_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} + \in_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}\frac{\partial V_3}{\partial \xi_k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial V_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial V_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial V_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial V_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial V_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi_j} V_i}_{(\nabla_\xi \boldsymbol{V})_{ij}} \; \underbrace{[cof\, \boldsymbol{J}]_{ij}}_{\text{dopelnienie algebraiczne}}$$

Rozważmy dwie dowolne macierze kwadratowe $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, oraz macierz $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$. Mamy oczywistą formułę dla elementów macierzy $\boldsymbol{C}$

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{kj} \equiv a_{ij} b_{kj},$$

Obliczmy **ślad macierzy** $\boldsymbol{C}$

$$tr\,\boldsymbol{C} \equiv c_{ii} = a_{ij} b_{ij}$$

Dalej, z zasady konstruowania macierzy odwrotnej wynika, że odwrotna macierz Jacobiego może być wyrażone następująco

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} (cof\,\boldsymbol{J})^T$$

Stąd

$$(cof\,\boldsymbol{J})^T = \underbrace{(\det \boldsymbol{J})}_{J} \boldsymbol{J}^{-1} = J\,\boldsymbol{J}^{-1}$$

Wobec tego, wzór dla pochodnej jakobianu przyjmuje formę (lagranżowską)

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t,\xi) = tr\left[\nabla_\xi \boldsymbol{V} \cdot (cof\,\boldsymbol{J})^T\right](t,\xi) = J(t,\xi)\,tr\left[\nabla_\xi \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{J}^{-1}\right](t,\xi)$$

Pozostało powrócić do zmiennych Eulera. W tym celu zastosujemy relację pomiędzy prędkością elementu płynu a polem prędkości wyrażonym w zmiennych Eulera, czyli

$$\underbrace{\boldsymbol{V}(t,\xi)}_{Lagrange} = \underbrace{\boldsymbol{v}[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]}_{Euler}$$

Obliczymy elementy macierzy $\nabla_{\xi}\boldsymbol{V}$ …

$$\left[\nabla_{\xi}\boldsymbol{V}\right]_{ij}(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}V_i(t,\xi) = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\upsilon_i[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}(t,\xi).$$

Otrzymany równość może być zapisana zwięźle jako

$$\nabla_{\xi}\boldsymbol{V}(t,\xi) = \nabla\boldsymbol{v}[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]\boldsymbol{J}(t,\xi)$$

skąd wynika, że

$$\nabla_{\xi}\boldsymbol{V}(t,\xi)\boldsymbol{J}^{-1}(t,\xi) = \nabla\boldsymbol{v}[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]$$

Wobec tego, wzór na pochodną jakobianu może być przepisany w postaci

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t,\xi) = J(t,\xi)\left(tr\,\nabla \boldsymbol{v}\right)[t, \boldsymbol{x}(t,\xi)].$$

Biorąc pod uwagę, że

$$tr\,\nabla \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} \upsilon_i = div\,\boldsymbol{v} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

Otrzymujemy ostatecznie

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} J(t,\xi) = J(t,\xi)\,\nabla \cdot \boldsymbol{v}[t, \boldsymbol{x}(t,\xi)]}$$

Metoda B

Alternatywna metoda polega na wykorzystaniu grupowej własności przekształcenia obszaru pierwotnego (tj zajmowanego przez płyn w chwili $t = 0$) w obszar zajmowany przez **ten sam płyn** w chwili $t > 0$.

Możemy zapisać równość

$$\boldsymbol{x}(t+s,\xi)=\boldsymbol{x}[t,\boldsymbol{x}(s,\xi)]$$

lub ($i = 1,2,3$)

$$x_i(t+s,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=x_i[t,x_1(s,\xi_1,\xi_2,\xi_3),x_2(s,\xi_1,\xi_2,\xi_3),x_3(s,\xi_1,\xi_2,\xi_3)]\ ,$$

Zróżniczkujmy powyższe wyrażenie względem ξ_j …

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(t+s,\xi)=\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}[t,\boldsymbol{x}(s,\xi)]\,\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}(s,\xi)$$

Otrzymaną równość można zapisać również następująco ($i = 1,2,3$)

$$[\boldsymbol{J}]_{ij}(t+s,\xi)=[\boldsymbol{J}]_{ik}[t,\boldsymbol{x}(s,\xi)][\boldsymbol{J}]_{kj}(s,\xi)$$

co jest równoważne równości macierzowej

$$\boldsymbol{J}(t+s,\xi)=\boldsymbol{J}[t,\boldsymbol{x}(s,\xi)]\,\boldsymbol{J}(s,\xi).$$

Z fundamentalnej własności wyznacznika wynika, że

$$J(t+s,\xi)=J[t,\boldsymbol{x}(s,\xi)]\,J(s,\xi).$$

Otrzymaną formułę wykorzystamy do obliczenia (z definicji) pochodnej …

$$\frac{\partial}{\partial t}J(t,\xi):=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{J(t+\Delta t,\xi)-J(t,\xi)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{J(t,\xi)\,J[\Delta t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]-J(t,\xi)}{\Delta t}=$$

$$=J(t,\xi)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{J[\Delta t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]-1}{\Delta t}$$

Zauważmy, że $J[\Delta t, \boldsymbol{x}(t,\xi)]$ jest jakobianem „prawie identycznościowego” przekształcenia

$$\boldsymbol{x}(t,\xi) \mapsto \boldsymbol{x}(t+\Delta t,\xi)$$

Oznaczmy to przekształcenie symbolem $X_{\Delta t}$. Ustalmy wartość ξ i pomińmy pokazywanie tej wielkości w dalszych przekształceniach. Mamy zatem tj.

$$\boldsymbol{x}(t+\Delta t) = X_{\Delta t}[\boldsymbol{x}(t)]$$

W formie rozwiniętej, transformacja ta ma postać ($i = 1, 2, 3$)

$$[X_{\Delta t}(\boldsymbol{x})]_i = x_i + \upsilon_i(t, x_1, x_2, x_3)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Odpowiadająca tej transformacji macierz Jacobiego może być obliczona następująco

$$[\boldsymbol{J}]_{ij}(\Delta t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}[X_{\Delta t}(\boldsymbol{x})]_i = \delta_{ij} + \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j}(t,\boldsymbol{x})\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Stąd
$$\boldsymbol{J}(\Delta t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{\upsilon}(t,\boldsymbol{x})\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Łatwo pokazać, że wyznacznik tej macierzy (jakobian) wyraża się wzorem

$$J(\Delta t, \boldsymbol{x}) = 1 + \underbrace{\left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}\right)}_{\nabla \cdot \boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{x})\Delta t + O(\Delta t^2) = 1 + \nabla \cdot \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Wobec tego, mamy

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{J(\Delta t, \boldsymbol{x}) - 1}{\Delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$$

Ostatecznie, otrzymujemy pożądaną formułę dla pochodnej jakobianu

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, \xi) := J(t, \xi)\left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}\right)[t, \boldsymbol{x}(t, \xi)]$$

Dokończymy teraz obliczenie pochodnej $C'(t)$ …

$$C'(t) = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f + f\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right) [t, \boldsymbol{x}(t,\xi)]\, J(t,\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f + f\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right)(t, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f\, \boldsymbol{v}) \right](t, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= \int\limits_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} f\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega(t)} \nabla \cdot (f\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} \underset{\substack{\Uparrow \\ Tw.GGO}}{=} \int\limits_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} f\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega(t)} f\, \underbrace{\upsilon_n}_{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}\, ds$$

Zastosowaliśmy twierdzenie Greena-Gaussa-Ostrogradskiego (GGO). Widzimy, że tempo zmian wartości $C(t)$ jest sumą dwóch składników. Pierwszy wynika z lokalnej zmienności w czasie pola f (i znika jeśli pole jest stacjonarne, tj. $\frac{\partial}{\partial t} f \equiv 0$), drugi natomiast jest efektem ruchu płynu.

Czytelnikowi zaleca się porównanie otrzymanej formuły we wzorem określającym zmianę netto („tempo produkcji”) wielkości ekstensywnej w obszarze kontrolnym (niezmiennym w czasie) – vide Wykład nr 3.

TEMPO ZMIAN W CZASIE WIELKOŚCI EKSTENSYWNEJ

Rozważmy dowolną wielkość ekstensywną, której rozkład przestrzenny scharakteryzowany jest jej gęstością właściwą (odniesioną do jednostki masy płynu) $h = h(t, \boldsymbol{x})$. Ilość tej wielkości niesiona przez płyn tworzący obszar płynny $\Omega(t)$ wyraża całka objętościowa

$$H(t) = \int_{\Omega(t)} \rho h \, d\boldsymbol{x}$$

Obliczymy pochodną $H'(t)$. Stosując Twierdzenie Reynoldsa oraz równanie różniczkowe zachowania masy otrzymujemy …

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(t) = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho h \, d\boldsymbol{x} \underset{\substack{\Uparrow \\ \color{red}{\textit{Twierdzenie}} \\ \color{red}{\textit{Reynoldsa}}}}{=} \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla \cdot (\rho h \boldsymbol{v})\right] d\boldsymbol{x} = \\ = \int_{\Omega(t)} h \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v})\right]}_{=0!} dx + \int_{\Omega(t)} \rho \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}h + \boldsymbol{v} \cdot \nabla h\right)}_{=\frac{Dh}{Dt}} d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{D}{Dt} h \, d\boldsymbol{x} \end{aligned}}$$