WYKŁAD 10

PODOBIEŃSTWO DYNAMICZNE PRZEPŁYWÓW I ANALIZA WYMIAROWA

BEZWYMIAROWA POSTAĆ RÓWNANIA NAVIERA-STOKESA

Równania Naviera-Stokesa (zakładamy, że 2-ga lepkość $\zeta \approx 0$) zapisane w postaci

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{f}$$

to – oczywiście – równanie opisujące „bilans” wielkości posiadających wymiar przyspieszenia, czyli - w układzie SI - m/s^2.

W celu porównywania dynamiki różnych (geometrycznie podobnych) przepływów (np. porównanie opływu okrętu podwodnego z opływem jego modelu w basenie laboratoryjnym) potrzebne jest wprowadzenie **formy równań rządzących przepływem (oraz warunków brzegowych i początkowych) niezależnej od wyboru jednostek fizycznych użytych do ilościowego opisu występujących w nim pól fizycznych – czyli formy bezwymiarowej**.

Przy okazji okaże się, że każdy przepływ jest scharakteryzowany szeregiem bezwymiarowych wielkości zwanych **liczbami podobieństwa**.

Pierwszy krok w kierunku uzyskania bezwymiarowego opisu ruchu płynu polega na wprowadzeniu **skal charakterystycznych** dla czasu, wymiarów liniowych i wszystkich parametrów ruchu.

W przypadku „nieściśliwego" r-nia Naviera-Stokesa mamy:

- czas $t = T\,\tilde{t}$, gdzie T to skala czasu,
- współrzędne $x_j = L\,\tilde{x}_j$, gdzie L to skala wymiarów liniowych,
- prędkość $\boldsymbol{v} = V\,\tilde{\boldsymbol{v}}$, gdzie V to skala prędkości,
- ciśnienie $p = P\,\tilde{p}$, gdzie P to skala ciśnienia,
- jednostkowa siła objętościowa $\boldsymbol{f} = F\,\tilde{\boldsymbol{f}}$, gdzie F to jej skala.

Wszystkie symbole z falką oznaczają wielkości bezwymiarowe.

W konsekwencji, występujące w oryginalnym równaniu operatory różniczkowe wyrażają się przez **operacje różniczkowania względem wielkości bezwymiarowych**, a mianowicie

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d\tilde{t}}{dt}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{d\tilde{x}_j}{dx_j}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \quad , \quad j = 1,2,3$$

Równanie Naviera-Stokesa może być teraz zapisane następująco

$$\frac{V}{T}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial \tilde{t}}+\frac{V^2}{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\boldsymbol{v}}=-\frac{P}{\rho L}\tilde{\nabla}\tilde{p}+\frac{\nu V}{L^2}[\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{3}\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})]+F\,\tilde{\boldsymbol{f}}\,,$$

lub – po pomnożeniu przez wyrażenie L/V^2

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial \tilde{t}}+(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\boldsymbol{v}}=-\frac{P}{\rho V^2}\tilde{\nabla}\tilde{p}+\frac{\nu}{VL}[\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{3}\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})]+\frac{FL}{V^2}\tilde{\boldsymbol{f}}\,.$$

W otrzymanym w ten sposób bezwymiarowym równaniu Naviera-Stokesa pojawiły się współczynniki będące **bezwymiarowymi kombinacjami przyjętych skal**, a mianowicie

Liczba Strouhala $St=\frac{VT}{L}$, Liczba Eulera $Eu=\frac{\rho V^2}{P}$,

Liczba Reynoldsa $Re=\frac{VL}{\nu}$, Liczba Froude'a $Fr=\frac{V^2}{FL}$.

Wykorzystując liczby podobieństwa, równanie Naviera-Stokesa może być zapisane następująco

$$\frac{1}{St}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial\tilde{t}}+(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\boldsymbol{v}}=-\frac{1}{Eu}\tilde{\nabla}\,\tilde{p}+\frac{1}{Re}[\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{3}\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})]+\frac{1}{Fr}\tilde{\boldsymbol{f}}$$

Zauważmy, że jedynym składnikiem bez współczynnika jest przyspieszenie konwekcyjne. Pozostałe składniki są mnożone przez odwrotności liczb podobieństwa. Możemy zatem powiedzieć, że **liczby podobieństwa są miarą wielkości danego składnika w porównaniu ze składnikiem konwekcyjnym**.

W sensie fizycznym: **liczby podobieństwa mówią nam jak istotne (jak wielkie w porównaniu z siłami bezwładności konwekcyjnej płynu) dla dynamiki przepływu są efekty związane z:**

- **niestacjonarnością ruchu (liczba Strouhala)**
- **siłami ciśnieniowymi (liczba Eulera)**
- **siłami wynikającymi z lepkości (liczba Reynoldsa) oraz**
- **zewnętrznym polem sił objętościowych (liczba Froude'a).**

Przykładowo, **liczba Reynoldsa** mówi jakie znaczenie dynamiczne mają dla przepływu efekty lepkie. Mówiąc w uproszczeniu – są one istotne, gdy wartość ***Re*** jest mała (są dominujące gdy wartość ta jest dużo mniejsza od jedności) i mało istotne, gdy wartość ***Re*** jest wielka.

Analogicznie, względne znaczenie efektów grawitacyjnych maleje wraz ze wzrostem liczby Froude'a.

Należy pamiętać jednak, że powyższe stwierdzenia są słuszne jedynie wówczas jeśli skale czasu i wymiarów liniowych zostały dobrane adekwatnie do danego przypadku przepływu.

Oto typowy przykład:

Podczas opływu skrzydła samolotu na skrzydle tworzy się tzw. warstwa przyścienna – cienka warstewka powietrz a charakteryzująca się wielkim gradientem poprzecznym prędkości wzdłużnej (na dystansie rzędu milimetrów prędkość zmienia się o – powiedzmy – 100 m/s). Jeśli jako skalę wymiaru liniowego przyjmiemy średnią cięciwę skrzydła, a skalę prędkości – prędkość samolotu to wynikowa liczba Reynoldsa będzie typowo rzędu milionów (lub dziesiątków milionów) – pamiętamy, że lepkość kinematyczna powietrza jest rzędu 10^{-5} (m^2/s).
Zgodnie z powyższym argumentem efekty lepkie zaniedbywalne – i wniosek ten jest zasadniczo słuszny, ale nie w obszarze warstwy przyściennej. W istocie, warstwa przyścienna jest obszarem, gdzie **efekty lepkie są zawsze porównywalne z bezwładnościowymi**, a właściwą skalą liniową charakteryzująca ruch jest tu nie długość, ale grubość warstwy (mniejsza od długości o – typowo – 3 rzędy wielkości).

Warunki (idealnego) dynamicznego podobieństwa przepływów:

Mówimy, że dwa przepływy są dynamicznie podobne jeżeli:

- **Są podobne geometrycznie, tj. obszary tych przepływów mają ten sam kształt (ale niekoniecznie wielkość).**
- **Wszystkie liczby podobieństwa (zdefiniowane w oparciu o analogiczne skale) są dla obu przepływów identyczne. Oznacza to, że bezwymiarowa postać wszystkich równań rządzących ruchem płynu jest dla obu przepływów identyczna.**
- **Bezwymiarowa postać warunków początkowych i brzegowych jest dla obu przepływów identyczna.**

Opisane warunki opisują sytuację idealną i – w warunkach prowadzenia badań eksperymentalnych (w tunelach aerodynamicznych, basenach wodnych) - niemożliwą do pełnego zrealizowania. Z tego powodu w rozmaitych badaniach eksperymentalnych (nie tylko w mechanice płynów i aerodynamice) musimy pogodzić się z **podobieństwem częściowym**.

Trudności (techniczne, praktyczne i fundamentalne) z osiągnięciem pełnego podobieństwa

1. Osiągniecia pełnego podobieństwa geometrycznego na skalowanym modelu obiektu może być trudne technicznie (technologicznie) i bardzo kosztowne. Zaważmy, że – teoretycznie – warunek podobieństwa geometrycznego dotyczy nie tylko samego obiektu (np. modelu samolotu), ale też całego obszaru przepływu („niepodobieństwo" warunków przepływowych w tunelu i swobodnej atmosferze, „niepodobieństwo" ruchu modelu statku w basenie i rzeczywistego obiektu na otwartym morzu, itp.)

2. Spełnienie warunku równości wszystkich liczb podobieństwa pomiędzy realnym obiektem a jego skalowanym modelem może być – fundamentalnie – niemożliwe. Typowym przykładem jest eksperymentalny pomiar oporów ruchu statku (jachtu) metodą badań go obiektu zależy jest funkcją dwóch liczb podobieństwa: Reynoldsa i Froude'a. Dla ustalenia uwagi, niech model będzie wykonany w skali 1:16, załóżmy również, że lepkość wody morskiej i tej w basenie jest (z grubsza) ta sama. modelowych. Uzyskanie tej samej liczby Froude'a wymaga, aby model był holowany w prędkością 4-rya razy mniejszą niż prędkość oryginału, ale uzyskanie tej samej liczby Reynoldsa wymaga czegoś całkowicie przeciwnego – zwiększenia prędkości 16 razy!
Ponieważ manipulacja lepkością i grawitacją raczej nie wchodzi w grę, badanie oporów jachtu wykonuje się przy zachowaniu podobieństwa częściowego, osobno dla różnych zakresów prędkości.

3. Zmiana skali może powodować „uboczne" efekty aerodynamiczne związane np. z tym, że nie zachowano podobieństwa „strukturalnego" (np. model jest wyraźnie sztywniejszy niż oryginał).

ZASTOSOWANIE ANALIZY WYMIAROWEJ DO PRZEWIDYWANIA MATEMATYCZNEJ FORMY PRAW FIZYCZNYCH

Prawa Fizyki (Mechaniki, w szczególności) dotyczą wielkości fizycznych wyrażonych ilościowo w pewnych jednostkach miary. W Mechanice mamy 3 podstawowe jednostki:

- Jednostkę masy $[M]$ (w układzie SI $[M] = kg$)
- Jednostkę czasu $[T]$ (w układzie SI $[T] = s$)
- Jednostkę wymiaru liniowego (długości) $[L]$ (w układzie SI $[L] = m$)

Jednostka każdej innej wielkości mechanicznej może być wyrażona jednoznacznie jako iloczyn pewnych potęg jednostek podstawowych, np.:

- Jednostka przyspieszenia to $[A]=[L]\cdot[T]^{-2}=m\cdot s^{-2}$
- Jednostka energii to $[E]=[M][L]^{2}[T]^{-2}=kg\cdot m^{2}\cdot s^{-2}=J$
- Jednostka cisnienia $[P]=[M][L]^{-1}[T]^{-2}=N/m^{2}=Pa$

Przyjmijmy, że pewne w pewnym zjawisku zaangażowane są wielkości fizyczne $\{q_1,q_2,..,q_n\}$. Załóżmy następnie, że spośród tych wielkości można wybrać co najwyżej co najwyżej ***r*** **wielkości wymiarowo niezależnych**. Oznacza to, że jednostka żadnej z tych wyróżnionych wielkości nie może być wyrażona przez kombinację jednostek pozostałych r-1 wielkości. Jasnym jest, że w zagadnieniach mechanicznych mamy spełnioną nierówność, $\boldsymbol{r \leq 3}$.

Załóżmy dalej, że prawo fizyczne opisujące zjawisko może być sformułowane matematycznie w postaci uwikłanego związku funkcyjnego

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$$

Słynne Twierdzenie Pi (sformułowane przez Edgara Buckinghama w roku 1914) mówi nam, że prawo to może być przedstawione równoważnie za pomocą bezwymiarowej (i też – na ogół – uwikłanej) formuły postaci

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}) = 0$$

gdzie ***n-r*** wielkości oznaczonych symbolami $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}$ to bezwymiarowe kombinacje wielkości fizycznych $q_1, q_2, .., q_n$.

Rozważmy dalej dwa przykłady praktycznym znaczeniu.

Przykład 1: Ustalony przepływ cieczy lepkiej w prostoliniowej rurze o stałym przekroju.

Naszym zamiarem jest przewidzenie matematycznej formy formuły opisującej ciśnienia Δp wzdłuż rury. Rozsądnie jest przyjąć, że wielkość ta zależeć będzie od:

- cech fizycznych cieczy: gęstości ρ i lepkości μ
- geometrii rury: jej długości L i średnicy D.
- prędkości średniej przepływu w.

Założymy dodatkowo, że wewnętrzna powierzchnia rury nie jest gładka lecz chropowata, a charakterystyczna (średnia) wysokość nierówności powierzchni jest równa s.

Poszukujemy postaci związku

$$f(\Delta p, w, \rho, \mu, l, d, s) = 0$$

Zgodnie z **Twierdzeniem Pi** związek ten powinien redukować się do bezwymiarowej formuły.

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0$$

Istotnie, mamy 7 parametrów, z których co najwyżej są wymiarowo niezależne, powinniśmy zatem określić 4 bezwymiarowe wielkości $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$.

Przyjmiemy jako trzy wymiarowo niezależne wielkości prędkość w, gęstość $\boldsymbol{\rho}$ i średnicę d (wykazać niezależność wymiarową – ćwiczenie). Skonstruujemy teraz parametry $\Pi_k, k = 1,..,4$.

Szukamy pierwszego parametru w formie

$$\Pi_1 = w^{\alpha} \rho^{\beta} d^{\gamma} \Delta p$$

Pozostaje wyznaczyć wykładniki α, β i γ tak, aby Π_1 był wielkością bezwymiarową. Oto odpowiedni rachunek:

$$[\Pi_1] = (\tfrac{m}{s})^{\alpha} (\tfrac{kg}{m^3})^{\beta} (m)^{\gamma} \frac{kg}{ms^2} = kg^{\beta+1} m^{\alpha-3\beta+\gamma-1} s^{-\alpha-2} \equiv kg^0 m^0 s^0$$

$$\beta + 1 = 0 \ , \ \alpha - 3\beta + \gamma - 1 = 0 \ , \ -\alpha - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = -2 \ , \ \beta = -1 \ , \ \gamma = 0$$

Zatem, pierwszy z parametrów bezwymiarowych ma postać: $\Pi_1 = \dfrac{\Delta p}{\rho w^2}$

Analogicznie, drugi z parametrów można wstępnie zapisać jako

$$\Pi_2 = w^{\alpha} \rho^{\beta} d^{\gamma} l$$

Wyznaczamy wykładniki …

$$[\Pi_2] = (\tfrac{m}{s})^{\alpha} (\tfrac{kg}{m^3})^{\beta} (m)^{\gamma} m = kg^{\beta} m^{\alpha+\gamma+1} s^{-\alpha} \equiv kg^0 m^0 s^0$$

$$\beta = 0 \ , \ \alpha + \gamma + 1 = 0 \ , \ -\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 0 \ , \ \beta = 0 \ , \ \gamma = -1$$

Bezwymiarowy parametr $\Pi_2 = \dfrac{l}{d}$, czyli po prosty współczynnik „smukłości” rury.

Analogiczny rachunek prowadzi do wniosku, że $\Pi_3 = \dfrac{s}{d}$.

Wyznaczenie ostatniego parametru pozostawiamy jako ćwiczenie. Okazuje się, że

$$\Pi_4 = \frac{\mu}{w\rho d} = \frac{\nu}{wd}$$

tj. parametr Π_4 jest po prostu odwrotnością **liczby Reynoldsa**.

Poszukiwana bezwymiarowa formuła ma zatem postać

$$\Phi\left(\frac{\Delta p}{\rho w^2}, \frac{l}{d}, \frac{s}{d}, \frac{\nu}{wd}\right) = 0$$

lub (zastępujemy odwrotność liczby Reynoldsa przez nią samą)

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2} = F\left(\frac{l}{d}, \frac{s}{d}, \frac{wd}{\nu}\right)$$

W założonych warunkach logicznie jest przyjąć, że gradient ciśnienia jest stały, czyli spadek ciśnienia jest proporcjonalny do długości odcinka rury. Możemy zapisać poszukiwane prawo następująco

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2} = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{s}{d}, \frac{wd}{\nu}\right)\frac{l}{d} \quad \Rightarrow \Delta p = \lambda(\hat{s}, \mathrm{Re})\,\frac{1}{2}\rho w^2$$

Bezwymiarowa funkcja $\lambda = \lambda(\hat{s}, \mathrm{Re})$ zwana jest **współczynnikiem strat ciśnienia** (na długości rury). W przypadku rury gładkiej ($s = 0$) współczynnik ten jest funkcją wyłącznie liczby Reynoldsa.

Przypomnijmy, że w laminarnym **przepływie Hagena-Poiseuille'a flow (**vide **Wykład nr 8)**

$$\lambda = \lambda_{lam}(\mathrm{Re}) = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Doświadczenie pokazuje, że laminarny przepływ Hagena-Poiseuille'a w rurze o przekroju kołowym może istnieć tylko dla dostatecznie małych liczb Reynoldsa. W „typowych" sytuacjach po przekroczeniu $\mathrm{Re} \approx 2300$ **przepływ HP traci stabilność i ewoluuje w kierunku formy turbulentnej (burzliwej).**

Zmienia się zasadniczo profil (uśrednionej w czasie) prędkości w kierunku osiowym. Pamiętamy, że w **przepływie laminarnym profil prędkości ma kształt paraboliczny**

$$w(r) = w_0[1 - (\tfrac{r}{R})^2]$$

W „rozwiniętym" przepływie turbulentnym (powiedzmy, gdy $\mathrm{Re} > 10^4$) profil prędkości średniej może być opisany wzorem

$$w(r) = w_0[1 - (\tfrac{r}{R})^m]$$

gdzie wykładnik $m \cong 7 \div 8$.

Współczynnik strat na długości w ruchu turbulentnym wyraża oczywiście inna formuła niż w ruchu laminarnym.

Najprostsza w stosowaniu jest formuła Blasiusa

$$\lambda_{turb} = \lambda(\mathrm{Re}) \approx \frac{0.316}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$$

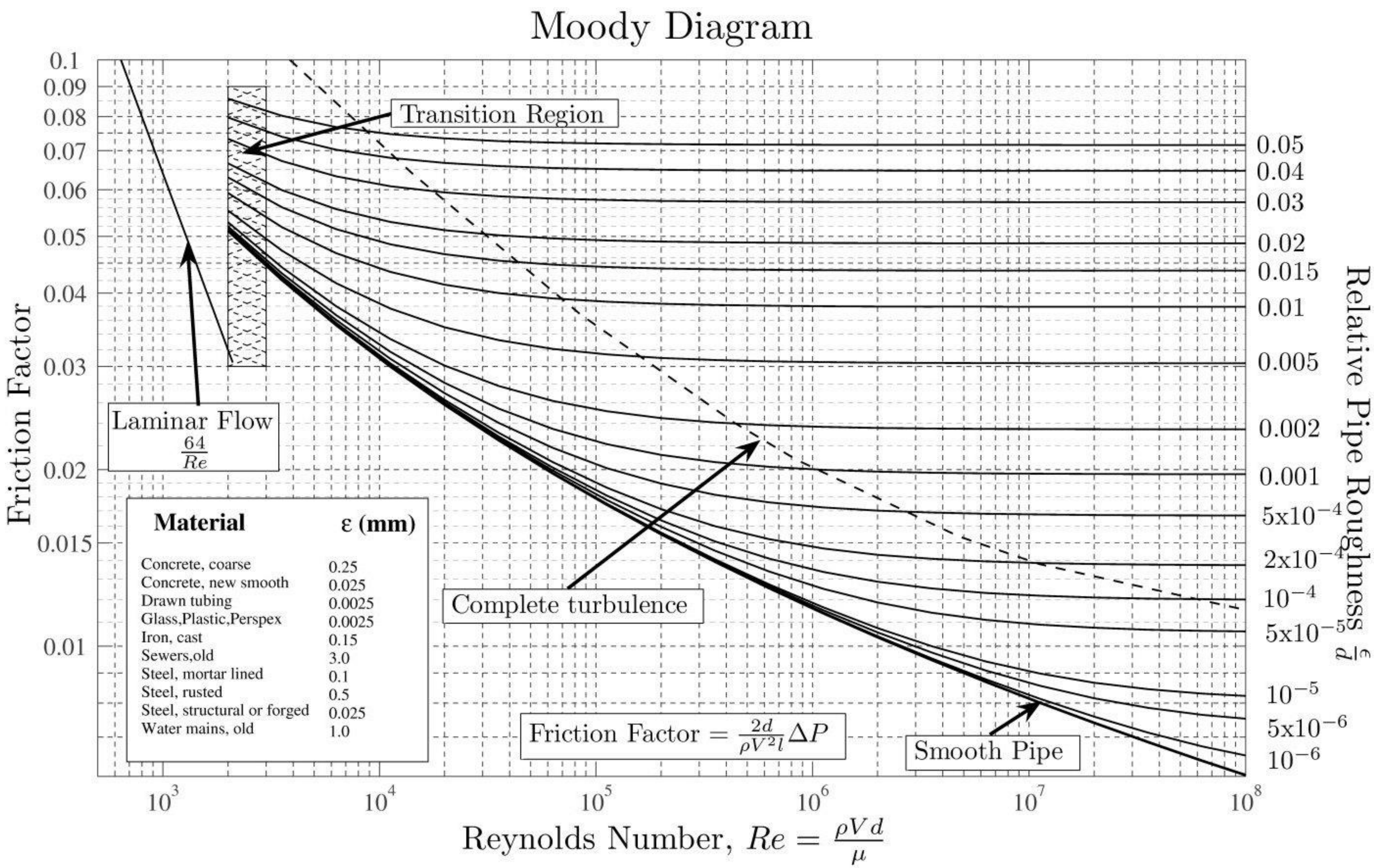
Daje ona akceptowalną dokładność dla rur (hydraulicznie) gładkich i liczb Reynoldsa nie przekraczających 50-60 tysięcy.

Szeroko akceptowana jest formułą Colebrooka-White'a

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2.5}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{s}{3.7D}\right)$$

Dająca bardzo dobrą zgodność z eksperymentem w szerokim zakresie liczb Reynoldsa (od 4000 do 10^8!) i chropowatości względnej do 5%. Formuła ta jest – niestety uwikłana. Znanych jest „naście" formuł przybliżających z kolei formułę C-W za pomocą wzorów jawnych (!).

Systematyczne badania oporów hydraulicznych w rurach w szerokim zakresie liczb Reynoldsa i chropowatości wewnętrznej zawdzięczamy **Nikuradsemu**. Współczesny wariant jego słynnego wykresu to tzw. **wykres Moody'ego**.



Material	ε (mm)
Concrete, coarse	0.25
Concrete, new smooth	0.025
Drawn tubing	0.0025
Glass,Plastic,Perspex	0.0025
Iron, cast	0.15
Sewers,old	3.0
Steel, mortar lined	0.1
Steel, rusted	0.5
Steel, structural or forged	0.025
Water mains, old	1.0

Przykład 2: Opór aerodynamiczny obiektu

Założymy, że na wielkość siły oporu F_D mają wpływ :

- wielkość charakterystycznej powierzchni obiektu S,
- gęstość ρ_∞ i ciśnienie p_∞ powietrza daleko od obiektu (w strumieniu swobodnym),
- prędkość obiektu względem nieruchomej atmosfery V_∞,
- lepkość powietrza μ.

Jako wielkości wymiarowo niezależne przyjmujemy ρ_∞, V_∞ i S. Przeprowadzenie rachunków analogicznych jak w przykładzie 1 – **ćwiczenie**.

Oto rezultat

$$\frac{F_D}{\rho_\infty V_\infty^2 S} = \varphi\left(\frac{\mu}{\rho_\infty V_\infty \sqrt{S}}, \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2}\right)$$

Otrzymaną formułę można zapisać w postaci „standardowej”

$$F_D = C_D\left(\frac{\rho_\infty V_\infty \sqrt{S}}{\mu}, \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2}\right) \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S$$

Bezwymiarową wielkość C_D nazywamy **współczynnikiem oporu** (aerodynamicznego). Jest on funkcją dwóch bezwymiarowych parametrów. Pierwszy rozpoznajemy od razu – jest to **liczba Reynoldsa** (nieco dziwnie zdefiniowana - rolę skali wymiarów liniowych pełni wielkość $\sqrt{S}$).

Znaczeni drugiego parametry jest mniej oczywiste. Jeżeli jednak weźmiemy pod uwagę, że prędkość dźwięku w gazie Clapeyrona jest dana wzorem (pokażemy jego prawdziwość później)

$$a_\infty = \sqrt{\frac{\kappa p_\infty}{\rho_\infty}}\ , \quad \kappa = c_P / c_V$$

to nasz parametr można wyrazić wzorem

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{a_\infty^2}{\kappa V_\infty^2} = \frac{1}{\kappa M_\infty^2}$$

Liczbę $M_\infty = V_\infty / a_\infty$ nazywamy liczbą Macha (strumienia niezaburzonego). Ostatecznie zatem, formuła na opór przyjmuje postać

$$F_D = \tfrac{1}{2} C_D(Re, Ma)\rho_\infty V_\infty^2 S$$

Jeśli liczba Macha jest mała (mniejsza niż 0.3), to efekty ściśliwości są pomijalne i opór aerodynamiczny (a także siła nośna i inne charakterystyki aerodynamiczne) są wyłącznie funkcją geometrii i liczby Reynoldsa.