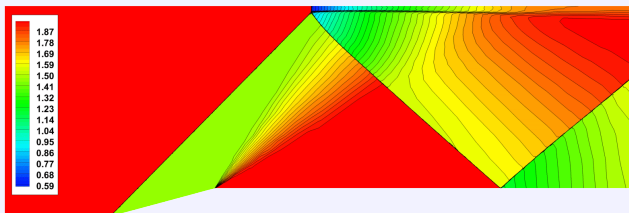


Aerodynamika I

Skośne fale uderzeniowe i fale rozrzedzeniowe



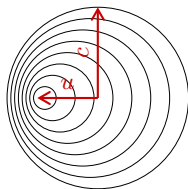
naddźwiękowy przepływ w kanale dla $M_\infty = 2$ (rozkład liczby Macha)

19 maja 2014

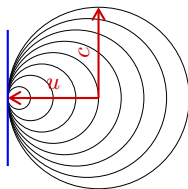
Linie Macha

Do tej pory, rozważaliśmy problemy dynamiki gazu, które sprowadzały się do zagadnienia jednowymiarowego. W tej części zostaną przedstawione zjawiska i problemy w przepływach dwu i trójwymiarowych.

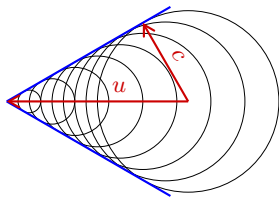
Wyobraźmy sobie źródło niewielkich zaburzeń poruszające się z prędkością u . Zaburzenia te rozprzestrzeniają się z prędkością dźwięku c i są na tyle słabe, że nie powodują istotnych zmian stanu gazu (np. fale akustyczne).



$$u < c \text{ czyli } M < 1$$

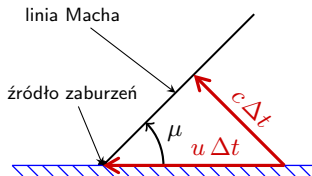


$$u = c \text{ czyli } M = 1$$



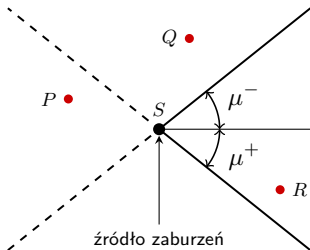
$$u > c \text{ czyli } M > 1$$

Linie Macha c.d.



W przepływie naddźwiękowym, kąt nachylenia linii Macha może być wyznaczony z zależności:

$$\mu = \arcsin \left(\frac{c}{u} \right) = \arcsin \left(\frac{1}{M} \right) \quad (1.1)$$



Linie fali Macha ograniczają strefy wpływu i zależności.

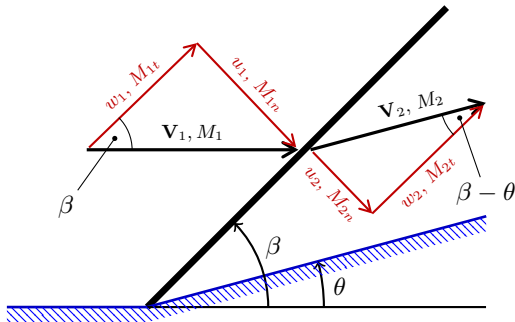
- stan gazu w punkcie P może wpływać na stan gazu w S
- stan gazu w punkcie R może zależeć od stanu gazu w S
- stan gazu w punkcie Q nie wpływa na stan gazu w S ani od niego nie zależy



Skośna fala uderzeniowa

Skośna fala uderzeniowa

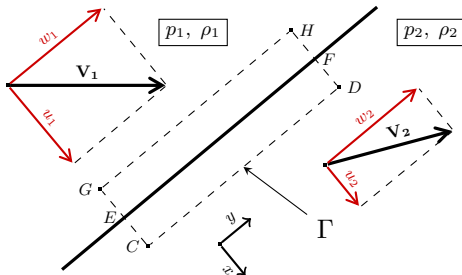
W naddźwiękowym przepływie 2D obok prostych fal uderzeniowych występują skośne fale uderzeniowe. Pojawiają się one gdy kierunek przepływu zostanie nagle zmieniony o pewien kąt θ . Sytuacja taka występuje np. przy opływie naroża wklęsłego.



Geometria skośnej fali uderzeniowej.

Skośna fala uderzeniowa c.d.

Dla uderzeniowej fali skośnej można sformułować prawa zachowania w następujący sposób:



Równanie ciągłości:

$$\oint_{\Gamma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0$$

Równanie pędu:

$$\oint_{\Gamma} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = - \oint_{\Gamma} p \mathbf{n} \, d\Gamma$$

Równanie energii całkowitej:

$$\oint_{\Gamma} \rho E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = - \oint_{\Gamma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$



Skośna fala uderzeniowa c.d.

Całki dla fragmentów powierzchni GE i HF oraz EC i FD we wszystkich równaniach kasują się wzajemnie. W dalszym ciągu należy uwzględnić kontrybucje od powierzchni GH i CD . Pole powierzchni GH i CD jest równe A .

Równanie ciągłości:

$$\underbrace{-\rho_1 u_1 A}_{GH} + \underbrace{\rho_2 u_2 A}_{CD} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.1)$$

Równanie pędu w kierunku stycznym do fali:

Składowa w kierunku stycznym do fali dla wektorów normalnych powierzchni GH i CD jest równa 0. Całki związane z ciśnieniem są więc równe 0:

$$\underbrace{-\rho_1 u_1 w_1}_{GH} + \underbrace{\rho_2 u_2 w_2}_{CD} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_1 u_1 w_1 = \rho_2 u_2 w_2 \quad \xrightarrow{(1.1)} \quad w_1 = w_2 \quad (2.2)$$

Skośna fala uderzeniowa c.d.

Równanie pędu w kierunku normalnym do fali:

$$\underbrace{-\rho_1 u_1^2 A - p_1 A}_{GH} + \underbrace{\rho_2 u_2^2 + p_2 A}_{CD} \rightarrow \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (2.3)$$

Równanie energii:

$$\underbrace{-\rho_1 u_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2 + w_1^2}{2} \right) A - u_1 p_1 A}_{GH} + \underbrace{\rho_2 u_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2 + w_2^2}{2} \right) A + u_2 p_2 A}_{CD} = 0$$

Korzystając z równania ciągłości (1.1):

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2 + w_1^2}{2} = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2 + w_2^2}{2}$$

Ponieważ $w_1 = w_2$ (1.2):

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \rightarrow h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.4)$$



Skośna fala uderzeniowa c.d.

Równania, które otrzymaliśmy (1.1), (1.3) i (1.4) są tożsame z równaniami dla fali prostej napisanymi w kierunku normalnym do fali skośnej. Można, więc wykorzystać wyprowadzone wcześniej zależności:

$$M_{2n}^2 = \frac{2 + (k - 1) M_{1n}^2}{2 k M_{1n}^2 - (k - 1)} \quad (2.5)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(k + 1) M_{1n}^2}{2 + (k - 1) M_{1n}^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2 k}{k + 1} (M_{1n}^2 - 1) \quad (2.7)$$

Na podstawie zależności trygonometrycznych:

$$\frac{u_1}{w_1} = \operatorname{tg}(\beta) \quad \frac{u_2}{w_2} = \operatorname{tg}(\beta - \theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{u_2}{u_1} \quad (2.8)$$

Skośna fala uderzeniowa c.d.

Na podstawie równań (1.6), (1.8) i zależności $M_{1n} = M_1 \sin(\beta)$ otrzymamy:

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{2 + (k - 1) M_1^2 \sin^2(\beta)}{(k + 1) M_1^2 \sin^2(\beta)} \quad (2.9)$$

Powyższe równanie można przekształcić tak aby dostać jawną zależność na θ :

$$\operatorname{tg}(\theta) = 2 \operatorname{ctg}(\beta) \frac{M_1^2 \sin^2(\beta) - 1}{M_1^2 (k + \cos(2\beta)) + 2} \quad (2.10)$$

Równanie to jest znane jako równanie θ - β - M .

Skośna fala uderzeniowa c.d.

Korzystając z:

$$M_{2n} = M_2 \sin(\beta - \theta) \quad M_{1n} = M_2 \sin(\beta) \quad (2.11)$$

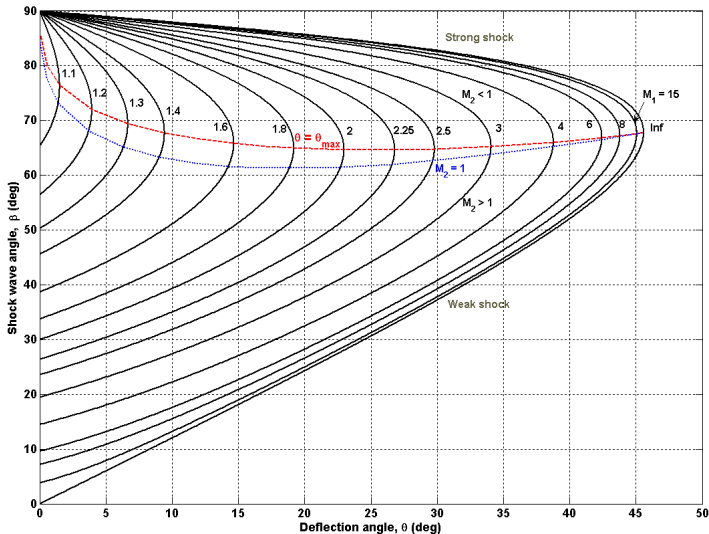
oraz (1.5), (1.7) i (1.6) można wyprowadzić zależności liczbę Macha i na zmianę ciśnienia i gęstości:

$$M_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\beta - \theta)} \frac{2 + (k - 1) M_1^2 \sin^2(\beta)}{2 k M_1^2 \sin^2(\beta) - (k - 1)} \quad (2.12)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k + 1) M_1^2 \sin^2(\beta)}{2 + (k - 1) M_1^2 \sin^2(\beta)} \quad (2.13)$$

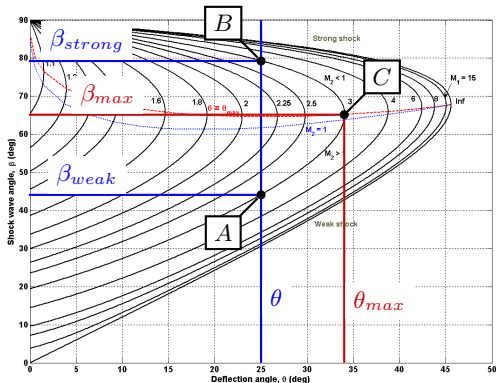
$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2 k}{k + 1} (M_1^2 \sin^2(\beta) - 1) \quad (2.14)$$

Jeśli β jest równe $\pi/2$, powyższe r-a są tożsame z r-mi dla prostej fali uderzeniowej.

Skośna fala uderzeniowa - równanie θ - β - M 

Skośna fala uderzeniowa - równanie θ - β - M c.d.

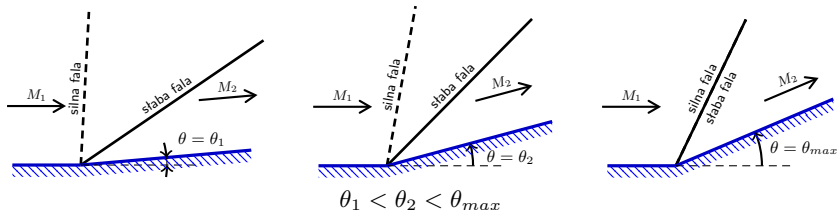
Przykład:



Założmy, że $M_1 = 3$ i kąt naroża $\theta = 25^\circ$. Otrzymamy wtedy dwa możliwe nachylenia fali uderzeniowej β : A (odpowiada fali słabej) i B (odpowiada fali silnej). Dodatkowo z wykresu można odczytać maksymalny kąt naroża θ_{max} dla którego pojawi się skośna fala uderzeniowa (C).

Słaba i silna skośna fala uderzeniowa

Równania zachowania dopuszczają istnienie dwóch skośnych fal uderzeniowych: słabej i silnej.



słaba fala – $\beta_{weak} < \beta_{max}$, $M_2 > 1$ za wyjątkiem obszaru w pobliżu θ_{max}

silna fala – $\beta_{strong} > \beta_{max}$, $M_2 < 1$

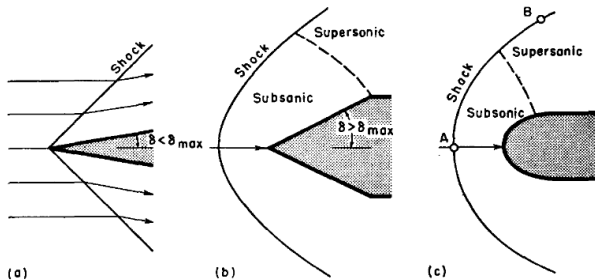
Zmiana parametrów stanu gazu p_2/p_1 , ρ_2/ρ_1 , T_2/T_1 i $s_2 - s_1$ jest większa dla fali silnej.

Gdy $\theta \rightarrow 0$ to $\beta_{strong} \rightarrow \pi/2$ oraz $\beta_{weak} \rightarrow \mu = \arcsin(1/M_1)$

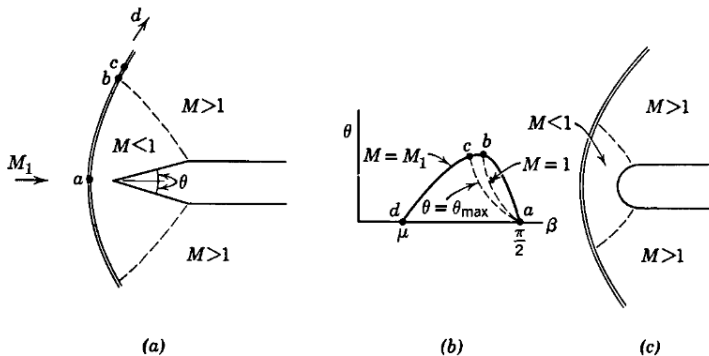
Gdy $\theta = \theta_{max}$ to $\beta_{strong} = \beta_{weak} = \beta_{max}$

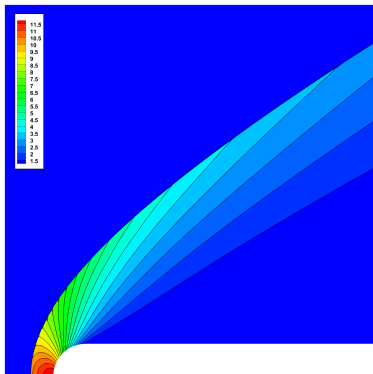
W rzeczywistych przepływach, gdy $\theta < \theta_{max}$ występują słabe fale uderzeniowe.

Odsunięta fala uderzeniowa

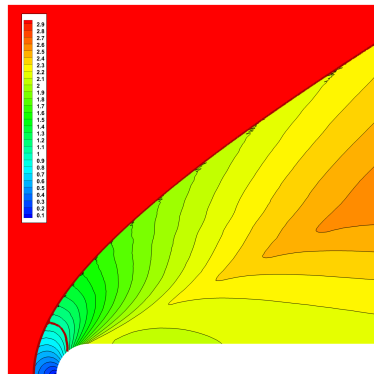


Odsunięta fala uderzeniowa c.d.

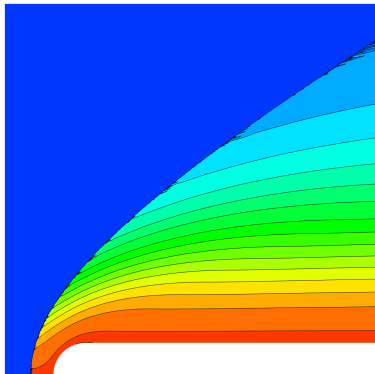


Przepływ wokół zaokrąglonego naroża - $M_\infty = 3$ 

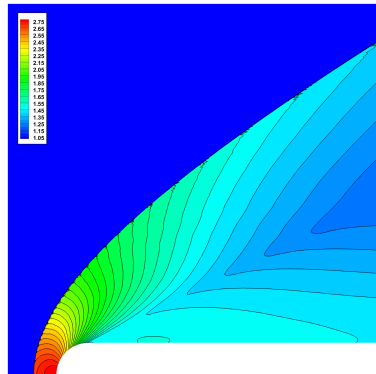
Rozkład ciśnienia



Rozkład liczby Macha

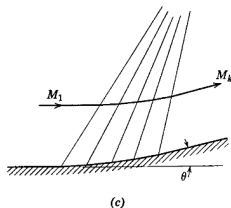
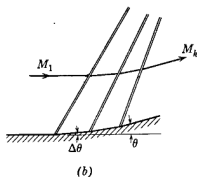
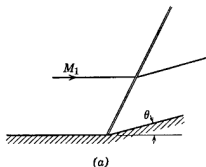
Przepływ wokół zaokrąglonego naroża - $M_\infty = 3$ 

Rozkład entropii

Rozkład zmiany temperatury - T/T_∞

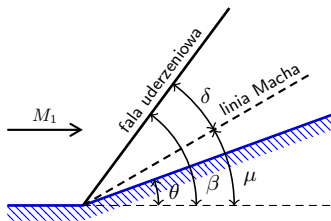
Gładkie naroże wklęsłe

Aby przeanalizować przepływ gładkiego naroża wklęsłego o końcowym nachyleniu θ (c) możemy wyobrazić sobie naroże złożone z N naroży dla których $\Delta\theta = \theta/N$ gdzie $N \rightarrow \infty$ (b).



Gładkie naroże wklęsłe

Interesuje nas zmiana entropii (ciśnienia całkowitego) w porównaniu z pojedynczą skośną falą uderzeniową.



Ponieważ dla pojedynczego naroża $\Delta\theta \rightarrow 0$ to $\beta \rightarrow \mu$. Wygodnie jest więc skorzystać z podstawienia $\beta = \mu + \delta$. Jeśli więc $\Delta\theta \rightarrow 0$ to:

$$\operatorname{tg}(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$$

$$\delta \rightarrow 0$$

$$\sin(\delta) \approx \operatorname{tg}(\delta) \approx \delta \quad (2.15)$$

$$\cos(\delta) \approx 1$$

Gładkie naroże wklęsłe c.d.

Zmiana entropii przy przejściu przez skośną falę uderzeniową:

$$\begin{aligned} \Delta s &= s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1} \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] = \\ &= \frac{R}{k-1} \ln \left[\left[1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 \sin^2(\beta) - 1) \right] \left[\frac{(k+1) M_1^2 \sin^2(\beta)}{2 + (k-1) M_1^2 \sin^2(\beta)} \right]^{-k} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aby uprościć powyższe wyrażenie skorzystamy z założenia że dla $\theta \rightarrow 0$ $M_{1n} \rightarrow 1$. Możemy więc r-e (1.16) rozwinąć w szereg Taylora (względem $M_{1n}^2 - 1$):

$$\Delta s = \frac{2}{3} \frac{k(k-1)}{(k+1)^2} (M_1^2 \sin^2(\beta) - 1)^3 + \mathcal{O}((M_1^2 \sin^2(\beta) - 1)^4) \quad (2.17)$$

Gładkie naroże wklęsłe c.d.

Wyznamy jak zmienia się β w zależności od θ . W tym celu korzystamy z (1.10) i przybliżeń (1.15). Otrzymane r-e należy przekształcić tak aby otrzymać zależność na δ i rozwinąć w szereg Taylora:

$$\beta = \mu + \delta = \arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right) + \frac{1}{4} \frac{(k+1)M_1^2}{M_1^2-1} \Delta\theta + \mathcal{O}(\Delta\theta^2) \quad (2.18)$$

Przybliżoną zależność na kąt β można podstawić do (1.17). Po rozwinięciu w szereg otrzymamy:

$$\Delta s = \frac{1}{12} \frac{k M_1^6 (k^2 - 1)}{\sqrt{(M_1^2 - 1)^3}} \Delta\theta^3 + \mathcal{O}(\Delta\theta^4) \quad (2.19)$$

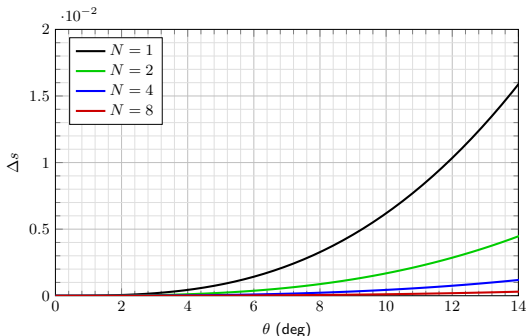
Gładkie naroże wklęsłe c.d.

Dla naroża z N załamaniem:

$$\Delta s \sim N \Delta\theta^3 = N \left(\frac{\theta}{N}\right)^3 = \frac{1}{N^2} \theta^3 \quad (2.20)$$

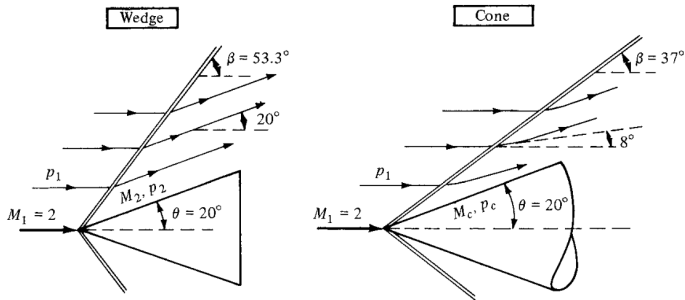
Dla pojedynczego naroża ($N = 1$):

$$\Delta s \sim \theta^3 \quad (2.21)$$



Wykres otrzymany dla $M_1 = 2$ i rozwinięcia w szereg z dokładnością $\mathcal{O}(\Delta\theta^{11})$

Opływ stożka



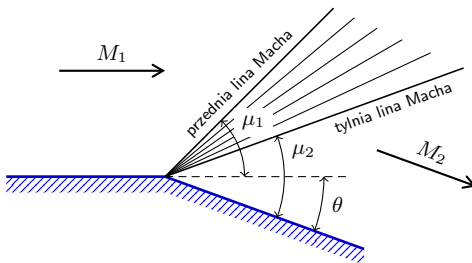


Fale rozrzedzeniowe

Opływ naroża wypukłego

Dla naddźwiękowego opływu naroża wypukłego można sformułować r-a zachowania jak dla naroża wklęsłego. Podobnie jak dla prostej fali uderzeniowej, jednym z rozwiązań jest rozrzedzeniowa fala uderzeniowa. Dla takiej fali $\Delta s < 0$ więc rozwiązanie to jest niefizyczne.

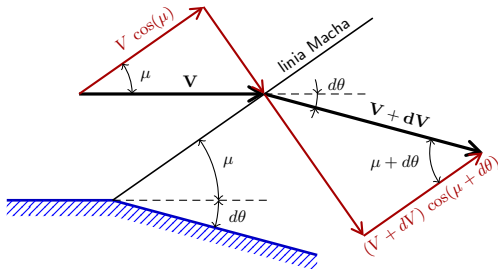
Alternatywnym rozwiązaniem jest przemiana izentropowa w której pojawia się wachlarz fal rozrzedzeniowych.



Fale rozrzedzeniowe

Analizę opływu naroża wypukłego można przeprowadzić podobnie jak dla opływu gładkiego naroża wklęsłego.

Rozważmy, jak zmieni się przepływ dla naroża o kącie $d\theta \rightarrow 0$. Z naroża można poprowadzić linię Macha po przejściu której następuje zmiana kierunku przepływu. Geometrię opływu można przedstawić następująco:



Fale rozrzedzeniowe c.d.

Podobnie, jak dla skośnej fali uderzeniowej, prędkości w kierunku stycznym muszą być takie same:

$$(V + dV) \cos(\mu + d\theta) = V \cos(\mu) \quad \rightarrow \quad \frac{V + dV}{V} = \frac{\cos(\mu)}{\cos(\mu + d\theta)} \quad (3.1)$$

$$\frac{V + dV}{V} = \frac{\cos(\mu)}{\cos(\mu) \cos(d\theta) - \sin(\mu) \sin(d\theta)} \quad (3.2)$$

Dla $d\theta \rightarrow 0$ można założyć: $\cos(d\theta) \approx 1$, $\sin(d\theta) \approx \text{tg}(d\theta) \approx d\theta$

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos(\mu)}{\cos(\mu) - \sin(\mu) d\theta} = \frac{1}{1 - \text{tg}(\mu) d\theta} = 1 + \text{tg}(\mu) d\theta + \dots \quad (3.3)$$

$$\text{tg}(\mu) = \frac{\sin(\mu)}{\cos(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (3.4)$$

Po podstawieniu (2.4) do (2.3) otrzymamy:

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.5)$$

Fale rozrzedzeniowe c.d.

Aby otrzymać funkcję wiążącą zmianę liczby Macha z dużym kątem odchylenia θ , należy scałkować (2.5):

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.6)$$

Konieczne jest przekształcenie prawej strony tak by była funkcją tylko liczby Macha:

$$V = M c \quad \rightarrow \quad dV = dM c + M dc \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{dc}{c} \quad (3.7)$$

Z zależności dla przemiany izentropowej:

$$\left(\frac{c_0}{c}\right)^2 = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad \rightarrow \quad c = c_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dc}{c} = -\frac{k-1}{2} M \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (3.8)$$

Po podstawieniu (2.7) i (2.8) do (2.6) otrzymamy:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{2 \sqrt{M^2 - 1}}{2 + (k-1) M^2} dM \quad (3.9)$$

Fale rozrzedzeniowe - funkcja Prandtla-Meyera

Na podstawie r-a (2.9) można wprowadzić funkcję:

$$\nu(M) = \int \frac{2 \sqrt{M^2 - 1}}{2 + (k - 1) M^2} dM \quad (3.10)$$

Po scałkowaniu otrzymamy algebraiczną postać:

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (M^2 - 1) \right] - \arctg \left(\sqrt{M^2 - 1} \right)$$

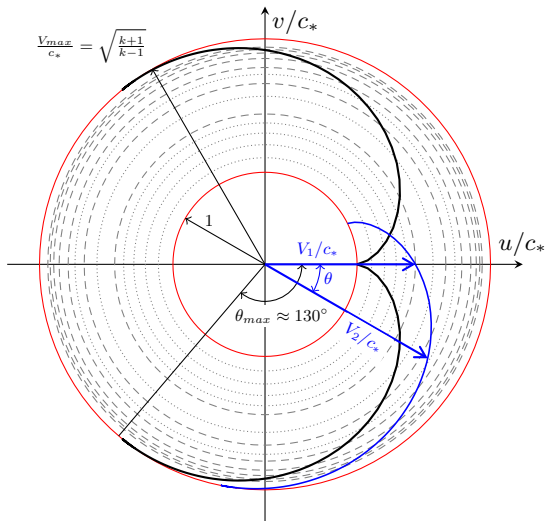
Funkcja ta nosi nazwę funkcji Prandtla-Meyera (3.11)

Aby rozwiązać problem opływu naroża o znanym kącie θ i liczbie Macha M_1 , należy rozwiązać nieliniowe równanie na nieznaną wartość M_2 :

$$\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad (3.12)$$

Znając M_2 można wyznaczyć parametry stanu korzystając z zależności dla przemiany izentropowej.

Funkcja Prandtla-Meyera w płaszczyźnie hodografu prędkości





Funkcja Prandtla-Meyera

Przy wyprowadzaniu funkcji Prandtla-Meyera nie były przyjmowane żadne założenia dot. znaku $d\theta$.

Funkcja ta opisuje więc nie tylko przepływ dla dowolnego naroża wypukłego ale również dla naroża wklęsłego jeśli jest to przepływ izentropowy (np. dla gładkich naroży).



Podsumowanie

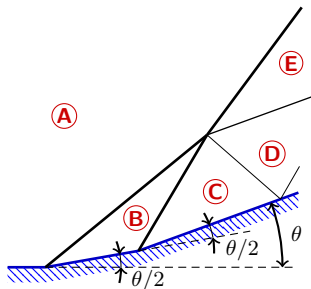
prosta fala uderzeniowa – Wektor prędkości jest prostopadły do fali; $M_2 < M_1$
i $M_2 < 1$; $p_2 > p_1$; $\Delta s > 0$

skośna fala uderzeniowa – Wektor prędkości nie jest prostopadły do fali; po przejściu przez falę wektor prędkości zmienia kierunek o kąt θ ; $M_2 < M_1$; dla większości przypadków $M_2 > 1$; $p_2 > p_1$; $\Delta s > 0$

fale rozrzedzeniowe – Występuje jako wachlarz charakterystyk; po przejściu przez wachlarz wektor prędkości zmienia kierunek o kąt θ ; $M_2 > M_1$; $p_2 < p_1$;
 $\Delta s = 0$

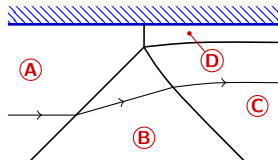
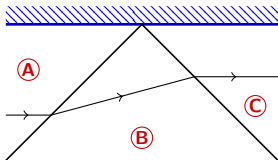
linia poślizgu – Pokrywa się z linią prądu; rozdziela obszary o różnych prędkościach; $M_2 \neq M_1$; $p_2 = p_1$

Podwójne naroże wklęsłe

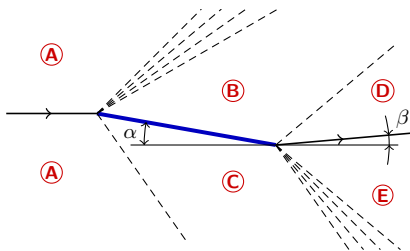


Dla naroża podwójnego pojawiają się dwie zbierne fale skośne (AB) i (BC). Fale te łączą się tworząc jedną falę (AE). Fala (AE) jest silniejsza niż fale (AB) i (BC) więc $M_E < M_C$. Pojawia się linia poślizgu (ED). Pomiędzy E i D nie może być skoku ciśnienia ($p_C \neq p_E$) więc linia poślizgu tuż za falą nie jest równoległa do brzegu. Pojawia się więc nowa fala (CD) która odbija się od brzegu. W zależności od parametrów i geometrii fala (CD) może być zgęszczeniowa lub rozrzedzeniowa.

Odbita skośna fala uderzeniowa



Płaska płytką



Przykład:

Opływ płytki dla kąta natarcia $\alpha = 10^\circ$, $M_\infty = 2$ i $p_\infty = 1$

$$M_A = M_\infty = 2, p_A = p_\infty = 1$$

$$M_B = 2.385, p_B = 0.548$$

$$M_C = 1.641, p_C = 1.707$$

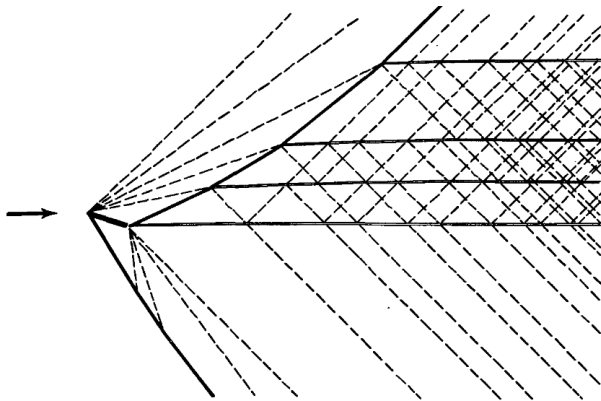
$$M_D = 1.985, p_D = 1.001$$

$$M_E = 1.989, p_E = 1.001$$

$$\beta = 0.028^\circ$$

$$C_L = 0.408, C_D = 0.0719$$

Płaska płytki



Schemat układu charakterystyk pojawiających się wokół płaskiej płytki w przepływie naddźwiękowym.