

AERODYNAMIKA I

WYKŁAD 1

PRZEPIŁYWY POTENCJALNE CZEŚĆ 1

Prolog – równanie Crocco

Równanie ruchu (Eulera) w formie Lamba-Gromeki (przepływ stacjonarny, potencjalne pole sił zewnętrznych)

$$\nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi_f$$

Pierwsza Zasada Termodynamiki

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = d\left(e + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho} dp = di - \frac{1}{\rho} dp \quad \Rightarrow \quad T\nabla s - \nabla i = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Podstawiamy do równania ruchu ...

$$\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + i - \Phi_f\right) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = T\nabla s$$

Niech:

- $\frac{1}{2}v^2 + i - \Phi = \text{const}$ - przepływ izoenergetyczny
- $s = \text{const}$ - przepływ izoentropowy

Wówczas: $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$! W przypadku 2D implikuje to równość $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{0}$, czyli pole prędkości ośrodka jest polem potencjalnym – istnieje pole skalarne (potencjał) φ takie, że

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi$$

Ustalone i nieściśliwe przepływy potencjalne

Założymy dalej, że ośrodek jest nieściśliwy. Ponieważ przepływ jest potencjalny, to pole prędkości spełnia jednocześnie warunki

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0$$

Z warunku ciągłości wynika, że $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \varphi \equiv \nabla^2 \varphi = 0$, tj. **potencjał prędkości φ jest funkcją harmoniczną.**

Z drugiej strony, każde pole wektorowe z zerową dywergencją może być zawsze przedstawione jako rotacja pewnego pola wektorowego (potencjału wektorowego). W przypadku pola prędkości przepływu nieściśliwego możemy zatem napisać równość

$$\mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$$

przy czym – bez utraty ogólności – możemy założyć, że sam potencjał wektorowy ma zerową dywergencję, tj. $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$. Jeśli – dodatkowo – pole prędkości jest potencjalne, to

$$\mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \Delta \boldsymbol{\psi} = -\Delta \boldsymbol{\psi}$$

0

Zatem, $\Delta\psi = 0$, tj. potencjał wektorowy nieściśliwego przepływu potencjalnego jest wektorowym polem harmonicznym.

W przypadku dwuwymiarowym mamy $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$

Rotacja tego pola ma tylko jedną niezerową składową - wirowość jest zorientowana prostopadle do płaszczyzny przepływu

$$\nabla \times \mathbf{v} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u\right)}_{\omega} \mathbf{e}_z \equiv \omega \mathbf{e}_z$$

W przypadku 2D, wektorowy potencjał prędkości ma postać $\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}_z$, gdzie pole skalarne ψ nazywamy funkcją prądu. Zgodnie z ogólną metodą liczenia rotacji mamy

$$\mathbf{v} = \nabla \times \psi \mathbf{e}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \psi \mathbf{e}_x + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \psi\right) \mathbf{e}_y$$

u v

Zatem

$$u = \frac{\partial}{\partial y} \psi \quad , \quad v = -\frac{\partial}{\partial x} \psi$$

Jeśli pole prędkości jest potencjalne, to

$$\frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u = 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi = 0$$

Widzimy, że $\nabla^2 \psi = 0$, tj. funkcja prądu nieściśliwego dwuwymiarowego przepływu potencjalnego jest również funkcją harmoniczną

Linie (w 2D) stałych wartości potencjału prędkości φ nazywamy **liniami ekwipotencjalnymi**. Linie (w 2D) stałych wartości funkcji prądu ψ nazywamy **liniami prądu**. Podczas kursu Mechaniki Płynów I dowiedzieliśmy się, że w każdym punkcie dowolnej linii prądu (niezerowy) wektor prędkości jest do tej linii styczny. Pamiętamy również, że w ruchu stacjonarnym linie prądu są tożsame z trajektoriami elementów płynu.

Pokażemy, że linie prądu i linie ekwipotencjalne przecinają się pod kątem prostym. Wystarczy pokazać, że pola wektorowe gradientów $\nabla \varphi$ i $\nabla \psi$ są (w każdym regularnym punkcie) prostopadłe. Istotnie, mamy z definicji tych wielkości

$$\nabla \varphi \cdot \nabla \psi = \frac{\partial}{\partial x} \varphi \frac{\partial}{\partial x} \psi + \frac{\partial}{\partial y} \varphi \frac{\partial}{\partial y} \psi = -uv + vu = 0$$

W ten sposób, **rodzina linii ekwipotencjalnych i rodzina linii prądu tworzą na płaszczyźnie siatkę ortogonalną.**

Zauważmy dalej, że funkcje φ i ψ tworzą parę Riemanna, tj. spełniają równości (Riemanna):

$$\partial_x \varphi = \partial_y \psi = u \quad , \quad \partial_y \varphi = -\partial_x \psi = v$$

W analizie matematycznej dowodzi się, że w takiej sytuacji funkcje te są – odpowiednio – częścią rzeczywistą i częścią urojoną funkcji zmiennej zespolonej $z = x + iy$ postaci

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Funkcję Φ nazywamy potencjałem zespolonym. Zgodnie z teorią funkcji zespolonych, pochodna tej funkcji dana jest wzorem

$$\Phi'(z) = \partial_x \varphi + i\partial_x \psi = \partial_y \psi - i\partial_y \varphi = u - iv$$

W teorii przepływów potencjalnych 2D wprowadza się pojęcie prędkości zespolonej $V(z) = \Phi'(z)$. Jak widać z powyższej równości składowe kartezjańskie pola wektorowego prędkości wyrażają się wówczas wzorami

$$u(x, y) = \Re\{V(x + iy)\} \quad , \quad v(x, y) = -\Im\{V(x + iy)\}$$

W szeregu przypadków korzystnym jest zastosowanie opisu we współrzędnych biegunowych

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \\r &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \text{atan}(y/x)\end{aligned}$$

Wzory transformacyjne składowych pola prędkości w układach kartezjańskim i biegunowym przedstawiają się następująco

$$\begin{aligned}v_r &= u \cos \theta + v \sin \theta \quad , \quad v_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta \\u &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \quad , \quad v = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta\end{aligned}$$

Gradient pola skalarnego we współrzędnych biegunowych zadany jest wzorem

$$\nabla \varphi(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \varphi \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi \mathbf{e}_\theta$$

Zatem

$$v_r = \frac{\partial}{\partial r} \varphi \quad , \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi$$

Biegunowe składowe pola prędkości wyrażają się za pomocą funkcji prądu następująco

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \quad , \quad v_\theta = -\frac{\partial}{\partial r} \psi$$

Wreszcie, (skalarny) operator Laplace'a we współrzędnych biegunowych ma postać

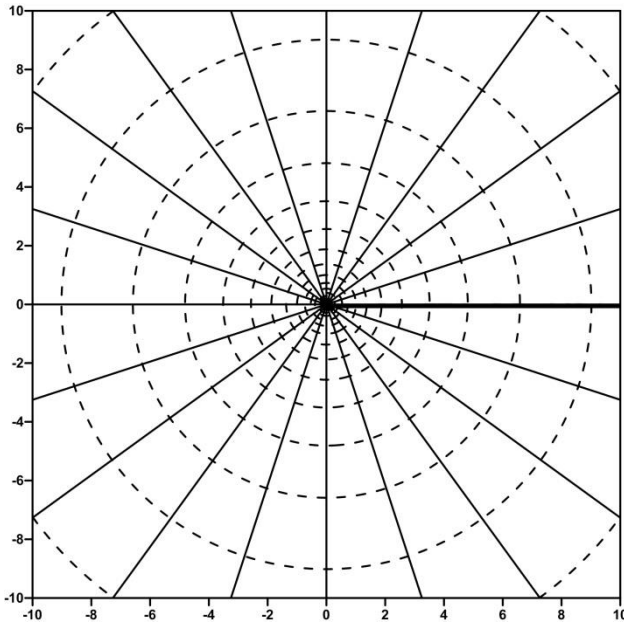
$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} f \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f$$

Elementarne przypadki przepływów potencjalnych w 2D

1. Strumień jednorodny

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= U_\infty x + V_\infty y, & \psi(x, y) &= -V_\infty x + U_\infty y \\ \varphi(r, \theta) &= U_\infty r \cos \zeta + V_\infty r \sin \theta, & \psi(r, \theta) &= -V_\infty r \cos \theta + U_\infty r \sin \theta\end{aligned}$$

2. Źródło/upust



$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_\theta \equiv 0$$

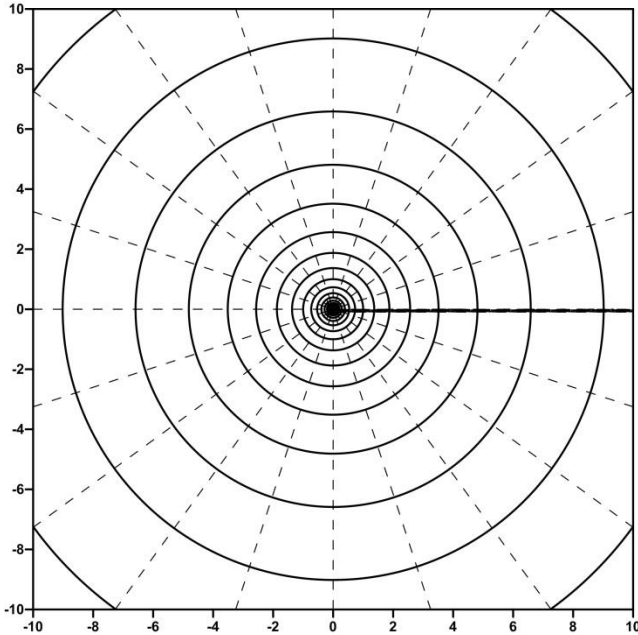
$Q > 0$ - źródło, $Q < 0$ - upust. Potencjał i funkcja prądu to

$$\varphi(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Wielkość Q to „wydajność” (wydatek objętościowy) źródła/upustu. Istotnie, mamy

$$\oint_{K_a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = a \int_0^{2\pi} v_r(a, \theta) d\theta = a \frac{Q}{2\pi a} 2\pi = Q$$

3. Wir potencjalny



$$v_r \equiv 0 \quad , \quad v_\theta \equiv \frac{\Gamma}{2\pi r} .$$

Wielkość Γ to miara intensywności wiru – faktyczny sens objaśnimy dalej. Potencjał prędkości i funkcja prądu mają postać

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad , \quad \psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Policzmy cyrkulację pola prędkości indukowanej przez wir wzdłuż konturu kołowego K_a , o środku w początku układu odniesienia i promieniu a

$$\oint_{K_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{K_a} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} ds = [\varphi]_{K_a}$$

Zauważmy, że potencjał φ jest funkcją wielowartościową. W powyższej formule, symbol $[f]$ oznacza przyrost funkcji f , którego doznaje ona po jednokrotnym przejściu wzdłuż K_a (w kierunku odwrotnie zegarowym).

Zgodnie z definicją potencjału przyrost ten jest równy

$$[\varphi]_{K_a} = \frac{\Gamma}{2\pi} [\theta]_{K_a} = \frac{\Gamma}{2\pi} 2\pi = \Gamma$$

Zauważmy, że pole prędkości jest potencjalne w każdym punkcie z wyjątkiem punktu $(0,0)$. Całka krzywoliniowa z pola prędkości po dowolnym konturze zamkniętym nieotaczającym tego punktu (środka wiru) jest zatem równa zeru. Ogólniej: cyrkulacja (pola prędkości) wzdłuż dowolnej linii zamkniętej jest równa wyrażeniu $(n_1 - n_2)\Gamma$, gdzie n_1 to liczba okrążeń „przeciw zegarowych”, a n_2 - liczba okrążeń „zgodnie zegarowych” wokół środka wiru.

4. Dipol (o osi pokrywającej się z osią $0x$)

Rozważmy przepływ otrzymany w wyniku przejścia granicznego polegającego na „ściągnięciu” do jednego punktu (dla uproszczenia – początku układu odniesienia) pary źródło-upust i identycznych (co do modułu) wydatkach, których wartość wzrasta w trakcie procesu zbliżania odwrotnie proporcjonalnie do odległości od punktu docelowego.

Potencjał pola prędkości indukowanej przez parę Z/U ...

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(x, y) &= \frac{D}{\varepsilon} \ln \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + y^2} - \frac{D}{\varepsilon} \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + y^2} = \\ &= \frac{D}{\varepsilon} \left[\ln \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + y^2} - \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + y^2} \right]\end{aligned}$$

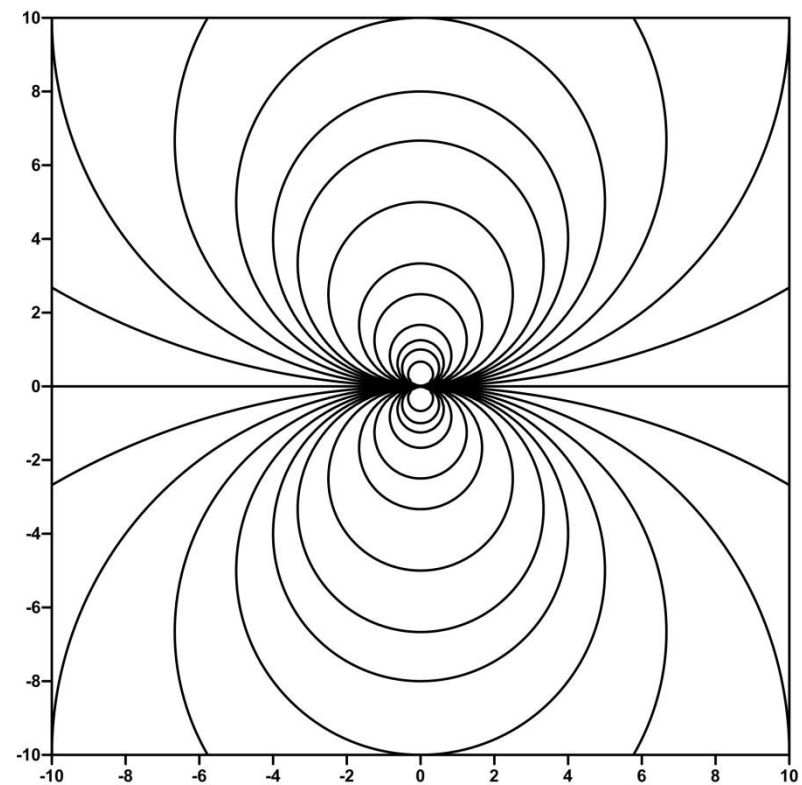
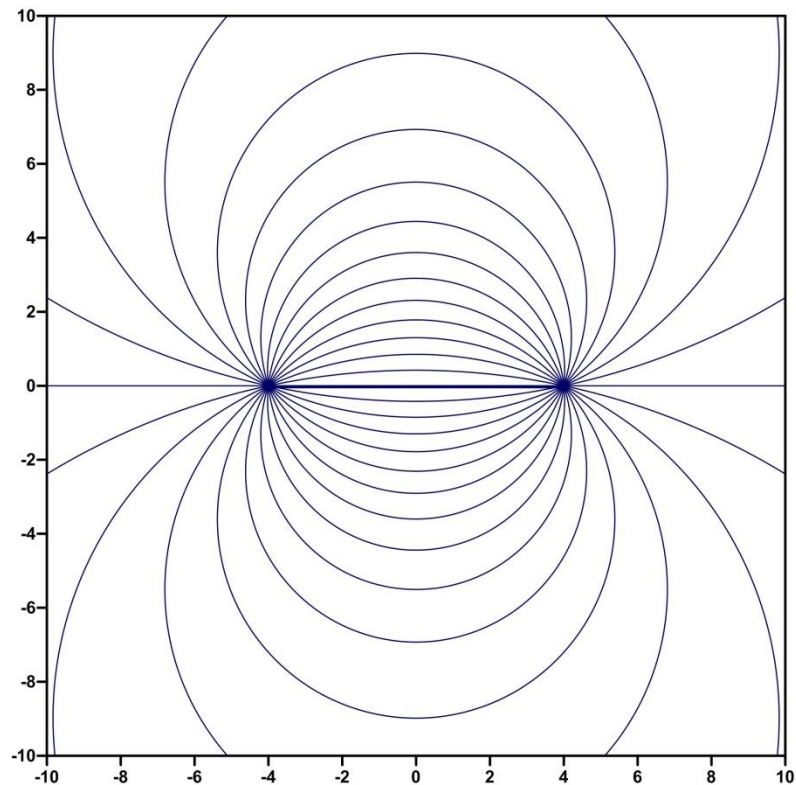
Przechodzimy do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$ (D - moment dipola)

$$\varphi(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(x, y) = D \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + y^2} - \ln \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + y^2}}{\varepsilon} = \dots = \frac{Dx}{x^2 + y^2}$$

formula de l'Hospitala

Ćwiczenie:

- Pokaż, że funkcja prądu dipola to $\psi(x, y) = -\frac{Dy}{x^2 + y^2}$
- Wyprowadź wzory na kartezjańskie współrzędne pola prędkości indukowanego przez dipol



Linie prądu pary źródło/upust (po lewej) i dipola (po prawej)

Superpozycja i przepływu złożone

Dowolnie złożone przepływy potencjalne w 2D mogą być uzyskane na drodze superpozycji przepływów elementarnych. Poprawność takiej procedury jest konsekwencją liniowości operatora Laplace'a (dowolna kombinacja funkcji harmoniczných jest – w części wspólnej ich dziedzin – funkcją harmoniczną).

Przykład 1: superpozycja strumienia jednorodnego i źródła/upustu

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_{\infty}(r, \theta) + \varphi_{src}(r, \theta) = V_{\infty} \underbrace{r \cos \theta}_x + \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

$$\psi(r, \theta) = \psi_{\infty}(r, \theta) + \psi_{src}(r, \theta) = V_{\infty} \underbrace{r \sin \theta}_y + \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Ćwiczenie:

- Oblicz składowe biegunowe pola prędkości
- Wyznacz liczbę a taką, że $u(-a, 0) = 0$ (punkt spiętrzenia)
- Pokaż, że $\psi(-a, 0) = \pm \frac{1}{2} Q$
- Znajdź kształt linii $\psi(r, \theta) = \pm \frac{1}{2} Q$

Przykład 2: superpozycja strumienia jednorodnego oraz pary źródło/upust (opływ owalu Rankina)

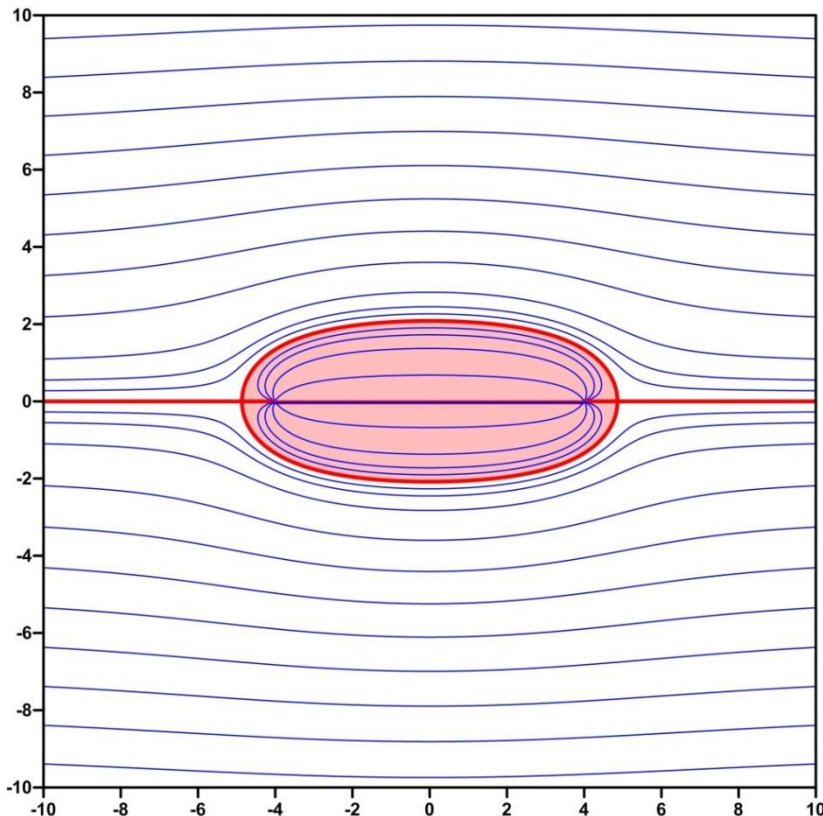
Rozważmy funkcję prądu postaci

$$\psi(r, \theta) = V_\infty r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta_2(r, \theta) - \frac{Q}{2\pi} \theta_1(r, \theta)$$

$$\theta_1 = \text{atan} \left(\frac{y}{x-a} \right) = \text{atan} \left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta - a} \right)$$

$$\theta_2 = \text{atan} \left(\frac{y}{x+a} \right) = \text{atan} \left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta + a} \right)$$

gdzie



Ćwiczenie:

1) pokaż, że $u(x, y) = V_\infty + \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} \right]$

2) pokaż, że punkty spiętrzenia to $(x, y) = (\pm b, 0)$,

gdzie $b^2 = a^2 + \frac{aQ}{\pi V_\infty}$

3) pokaż, że linia $\psi = 0$ opisana jest niejawną formułą

$$x^2 = a^2 - Y^2(x) + \frac{2aY(x)}{\tan[2\pi V_\infty Y(x) / Q]}$$

Przykład 3: Symetryczny opływ profilu kołowego (cylindra)

Rozważmy następującą kombinację strumienia jednorodnego i dipola

$$\varphi(x, y) = U_{\infty}x + \frac{U_{\infty}a^2x}{x^2 + y^2}$$

We współrzędnych biegunowych

$$\varphi(r, \theta) = U_{\infty}r \cos \theta + \frac{U_{\infty}a^2 \cos \theta}{r} = U_{\infty}r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

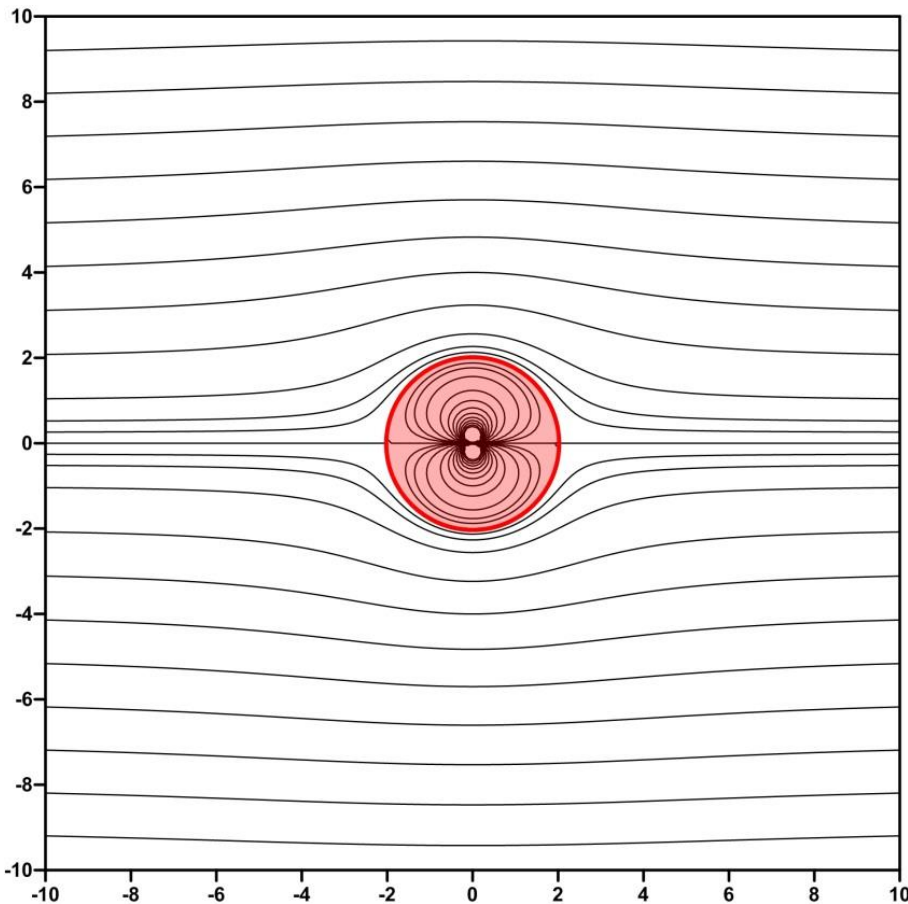
Pole prędkości we współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial}{\partial r} \varphi = U_{\infty} \cos \theta - \frac{U_{\infty}a^2}{r^2} \cos \theta = U_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi = -U_{\infty} \sin \theta - \frac{U_{\infty}a^2}{r^2} \sin \theta = -U_{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$

Dla $r = a$ otrzymujemy

$$\begin{cases} v_r(a, \theta) = 0 \\ v_\theta(a, \theta) = -2U_\infty \sin \theta \end{cases}$$

Wnioskujemy, że linia $r = a$ to linia prądu! Zatem, otrzymaliśmy potencjalny opływ profilu kołowego o promieniu równym a i środku w początku układu współrzędnych.



Zastosujemy równanie Bernoulliego do obliczenia rozkładu ciśnienia na profilu kołowym. Mamy

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = p(a, \theta) + \frac{1}{2} \rho V^2(a, \theta)$$

Ponieważ $V^2(a, \theta) = 4U_\infty^2 \sin^2 \theta$, otrzymujemy

$$p(\theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

W aerodynamice często posługujemy się **współczynnikiem ciśnienia**

$$c_p(\theta) = \frac{p(\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

Zauważmy, że:

$$p_{\max} = p(a, 0) = p(a, \pi) = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_{\infty} + q \quad \text{- ciśnienie spiętrzenia } (c_p = 1)$$

$$p_{\min} = p(a, \frac{1}{2} \pi) = p(a, \frac{3}{2} \pi) = p_{\infty} - \frac{3}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_{\infty} - 3q \quad \text{- ciśnienie minimalne } (c_p = -3)$$

Zauważmy także, że rozkład ciśnienia wykazuje symetrię względem obu osi Ox i Oy . Wnioskujemy, że całkowita siła aerodynamiczna jest równa zero. W szczególności, nie pojawia się siła oporu. Wynik ten pozostaje w jawnej sprzeczności z właściwościami opływu profilu kołowego płynem rzeczywistym (lepkiem).

Pokażemy, że w ramach teorii przepływów potencjalnych nieściśliwym możliwe jest uzyskanie opływu z siłą nośną. W tym celu musimy dodać jeszcze jeden składnik – wir potencjalny.

$$\varphi(r, \theta) = \underbrace{U_{\infty} r \cos \theta}_{\text{strumień jednorodny}} + \underbrace{\frac{U_{\infty} a^2 \cos \theta}{r}}_{\text{dipol}} + \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi} \theta}_{\text{wir}}$$

Zauważmy, że po dodaniu wiru (położonego w środku profilu kołowego) profil kołowy pozostaje nadal linią prądu zmodyfikowanego przepływu!

Aktualnie, składowe biegunowe pola prędkości wyrażają się następująco:

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial}{\partial r} \varphi = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

Na samym profilu mamy rozkłady

$$\begin{cases} v_r(a, \theta) = 0 \\ v_\theta(a, \theta) = -2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases}$$

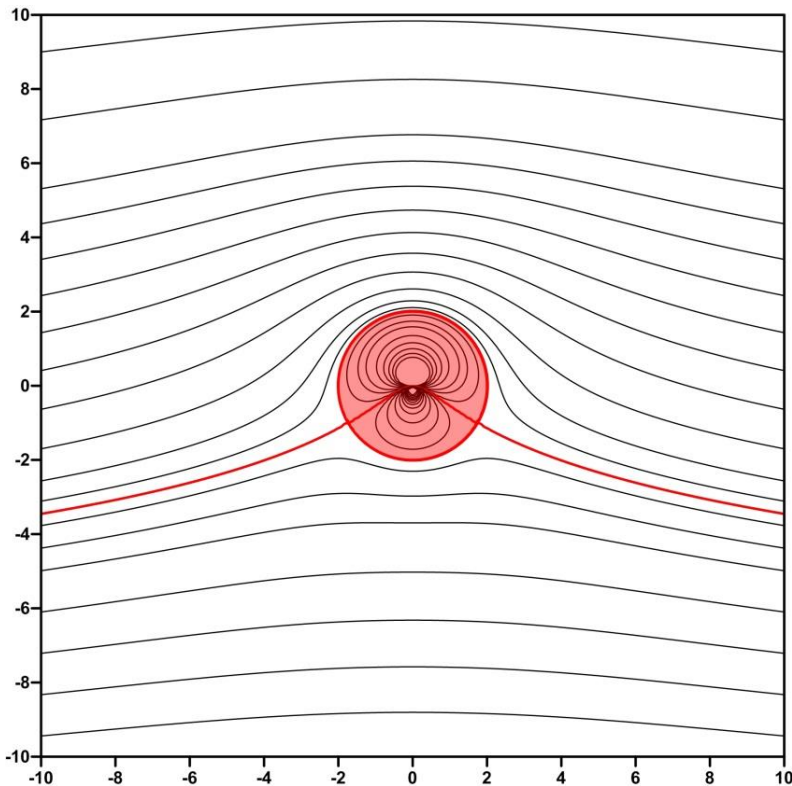
Określmy położenie punktów spiętrzenia (stagnacji) ...

$$-2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0 \Rightarrow \sin \theta_* = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty a}$$

Mamy rozwiązania

$$\theta_{*,1} = a \sin \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty a} \quad , \quad \theta_{*,1} = a \sin \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty a} + \pi$$

o ile tylko $|\Gamma| \leq 4\pi U_\infty a$. W przypadku granicznym $|\Gamma| = 4\pi U_\infty a$ na profilu istnieje tylko jeden punkt stagnacji (w zależności od znaku cyrkulacji wiru Γ odpowiada mu kąt $\theta = \frac{1}{2}\pi$ lub $\theta = \frac{3}{2}\pi$). Jeśli $|\Gamma| > 4\pi U_\infty a$ punkt stagnacji pojawia się w polu przepływu, a nie na konturze.



Pole ciśnienia obliczamy z r-nia Bernoulliego

$$p(a, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho [U_\infty^2 - V^2(a, \theta)]$$

Tym razem

$$\begin{aligned} V^2(a, \theta) &= \left(-2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2 = \\ &= 4U_\infty^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\Gamma U_\infty}{\pi a} \sin \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} \end{aligned}$$

Zatem

$$p(a, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho \left[U_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) + 2 \frac{\Gamma U_\infty}{\pi a} \sin \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} \right]$$

Zauważmy, że składowa x -owa siły aerodynamicznej (czyli opór) jest – w wyniku symetrii rozkładu ciśnienia względem osi Oy - nadal równa zero. Obecność wiru łamie jednak symetrię tego rozkładu względem osi Ox . Obliczmy zatem siłę nośną.

$$\mathbf{L} = - \left[a \int_0^{2\pi} p(a, \theta) \sin \theta d\theta \right] \mathbf{e}_y$$

Obliczenia przebiegają następująco

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} p(a, \theta) \sin \theta d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \left[p_\infty \sin \theta + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (\sin \theta - 4 \sin^3 \theta) + \frac{\rho \Gamma U_\infty}{\pi a} \sin^2 \theta - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} \sin \theta \right] d\theta = \\ & = \frac{\rho \Gamma U_\infty}{\pi a} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_\pi = \frac{\rho \Gamma U_\infty}{a} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy bardzo prostą formułę (zwaną wzorem Kutty-Żukowskiego) – pokażemy później, że obowiązuje ona również w przypadku profili o dowolnym kształcie (gdzie w roli U_∞ należy podstawić po prostu wartość prędkości w strumieniu niezaburzonym)

$$\mathbf{L} = -\rho\Gamma U_\infty \mathbf{e}_y$$

Podkreślmy ponownie, że siła oporu w otrzymanym przepływie jest równa zero, czyli

$$\mathbf{D} = -\left[a \int_0^{2\pi} p(a, \theta) \cos \theta d\theta \right] \mathbf{e}_x \equiv \mathbf{0}$$

Wynik ten jest szczególnym przypadkiem tzw. **paradoksu d'Alemberta**.

Transformacja konforemna – informacja ogólna

Przypadek profilu kołowego jest istotny bowiem opływ potencjalny tego profilu można przekształcić w opływ potencjalny ciała (konturu) o w zasadzie dowolnym kształcie, posługując się odpowiednio skonstruowaną transformacją punktów płaszczyzny, zwanej transformacją konforemna. Transformacja konforemna przekształca obszar (2D) przepływu potencjalnego w taki sposób, że potencjał pola prędkości i funkcja prądu pozostają funkcjami harmonicznymi.

Dokładniej, sprawa przedstawia się następująco. Niech na płaszczyźnie (ξ, η) zadany będzie potencjał prędkości $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\xi, \eta)$ taki, że $\nabla_{\xi\eta}^2 \hat{\varphi} = 0$. Jeśli przekształcenia $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ jest konforemne to funkcja $\varphi(x, y) = \hat{\varphi}[\xi(x, y), \eta(x, y)]$ spełnia równanie Laplace'a $\nabla_{xy}^2 \varphi = 0$ czyli jest poprawnym potencjałem prędkości przepływu transformowanego. Okazuje się, że jest tak wówczas, gdy funkcje $\xi = \xi(x, y)$ i spełniają warunki Riemanna, czyli gdy są – odpowiednio – częścią rzeczywistą i urojoną pewnej funkcji zespolonej. Przykładem „podręcznikowym” transformacji konforemnej jest transformacja Żukowskiego. Pozwala ona przekształcić przepływ wokół profilu kołowego w opływ profilu eliptycznego (w skrajnym przypadku – opływ płaskiej płytki), a także w opływu konturów o kształcie zbliżonym do wybranych profili lotniczych. Zaletą jest fakt, że otrzymany opis przepływu jest całkowicie analityczny.

Twierdzenie Milne-Thomsona

Niech zadany będzie przepływ potencjalny, którego potencjał prędkości i funkcja prądu równe są – odpowiednio - $\hat{\varphi}(x, y)$ i $\hat{\psi}(x, y)$. Twierdzenie M-T wyjaśnia jak zmodyfikować ten przepływ, aby osiągnąć jednocześnie dwa cele:

- Profil kołowy o równaniu $x^2 + y^2 = a^2$ jest linią prądu w zmodyfikowanym przepływie
- Całkowity ładunek cyrkulacji w przepływie pozostaje niezmienny.

Oto jawne formuły dla funkcji prądu i potencjału prędkości (wsp. kartezjańskie)

$$\psi(x, y) = \hat{\psi}(x, y) - \hat{\psi}\left(\frac{a^2x}{x^2+y^2}, \frac{a^2y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}(x, y) + \hat{\varphi}\left(\frac{a^2x}{x^2+y^2}, \frac{a^2y}{x^2+y^2}\right)$$

Dowód poprawności tych formuł jest dość prosty. W szczególności, jeśli punkt (x, y) spełnia równanie $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ wówczas $\psi(x, y) = 0$, czyli punkt ten należy do linii prądu, wzdłuż której $\psi \equiv 0$. Dowód poprawności wzoru dla potencjału pozostawiamy jako ćwiczenie.

Analogiczne formuły we współrzędnych biegunowych są jeszcze prostsze

$$\psi(r, \theta) = \hat{\psi}(r, \theta) - \hat{\psi}\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) \quad , \quad \varphi(r, \theta) = \hat{\varphi}(r, \theta) + \hat{\varphi}\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right)$$

Istotnie, mamy natychmiast $\psi(a, \theta) = \hat{\psi}(a, \theta) - \hat{\psi}\left(\frac{a^2}{a}, \theta\right) = 0$, co pokazuje, że kontur kołowy $r = a$ jest linią prądu.

Innym sposobem sprawdzenia poprawności podanych formuł jest obliczenie składowej promieniowej (czyli – na konturze kołowym – normalnej do brzegu) poprzez zróżniczkowanie potencjału prędkości

$$v_r(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\varphi}(r, \theta) + \frac{\partial}{\partial r} \hat{\varphi}\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) = \hat{v}_r(r, \theta) - \frac{a^2}{r^2} \hat{v}_r\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right)$$

Mamy zatem $v_r(a, \theta) = \hat{v}_r(a, \theta) - \frac{a^2}{a^2} \hat{v}_r\left(\frac{a^2}{a}, \theta\right) = 0$.

Zobaczmy co dzieje się ze składową styczną. Obliczmy składową azymutalną prędkości

$$v_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\varphi}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\varphi}\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) = \hat{v}_\theta(r, \theta) + \hat{v}_\theta\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right)$$

Wobec tego, na konturze $r = a$ otrzymujemy

$$v_\theta(a, \theta) = \hat{v}_\theta(a, \theta) + \hat{v}_\theta\left(\frac{a^2}{a}, \theta\right) = 2\hat{v}_\theta(a, \theta)$$

Widzimy, że modyfikacja przepływu zgodnie z receptą Milne-Thomsona kasuje składową normalną i podwaja składową styczną na brzegu profilu kołowego.

Przykłady:

1. Włożenie profilu kołowego w strumień jednorodny

Mamy $\hat{\varphi}(x, y) = U_\infty x$. Zgodnie z twierdzeniem M-T mamy

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}(x, y) + \hat{\varphi}\left(\frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}\right) = U_\infty x + U_\infty a^2 \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Otrzymaliśmy znaną już formułę. Wychodząc od postaci we współrzędnych biegunowych otrzymujemy

$$\varphi(r, \theta) = \hat{\varphi}(r, \theta) + \hat{\varphi}\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) = U_\infty r \cos \theta + U_\infty \frac{a^2}{r} \cos \theta$$

czyli ponownie poprawny wzór.

2. Włożenie profilu kołowego do przepływu indukowanego przez wir potencjalny

Niech oryginalny przepływ będzie efektem indukcji wiru potencjalnego położonego w punkcie $(c, 0)$. Wyjściowa funkcja prądu ma postać

$$\hat{\psi}(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Zgodnie z twierdzeniem M-T, funkcja prądu przepływu po modyfikacji ma postać

$$\psi(x, y) = \hat{\psi}(x, y) - \hat{\psi}\left(\frac{a^2x}{x^2+y^2}, \frac{a^2y}{x^2+y^2}\right)$$

czyli

$$\psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\sqrt{\left(\frac{a^2x}{x^2+y^2} - c\right)^2 + \frac{a^4x^2}{(x^2+y^2)^2}}} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{(x-c)^2 + y^2}{\left(\frac{a^2x}{x^2+y^2} - c\right)^2 + \frac{a^4x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

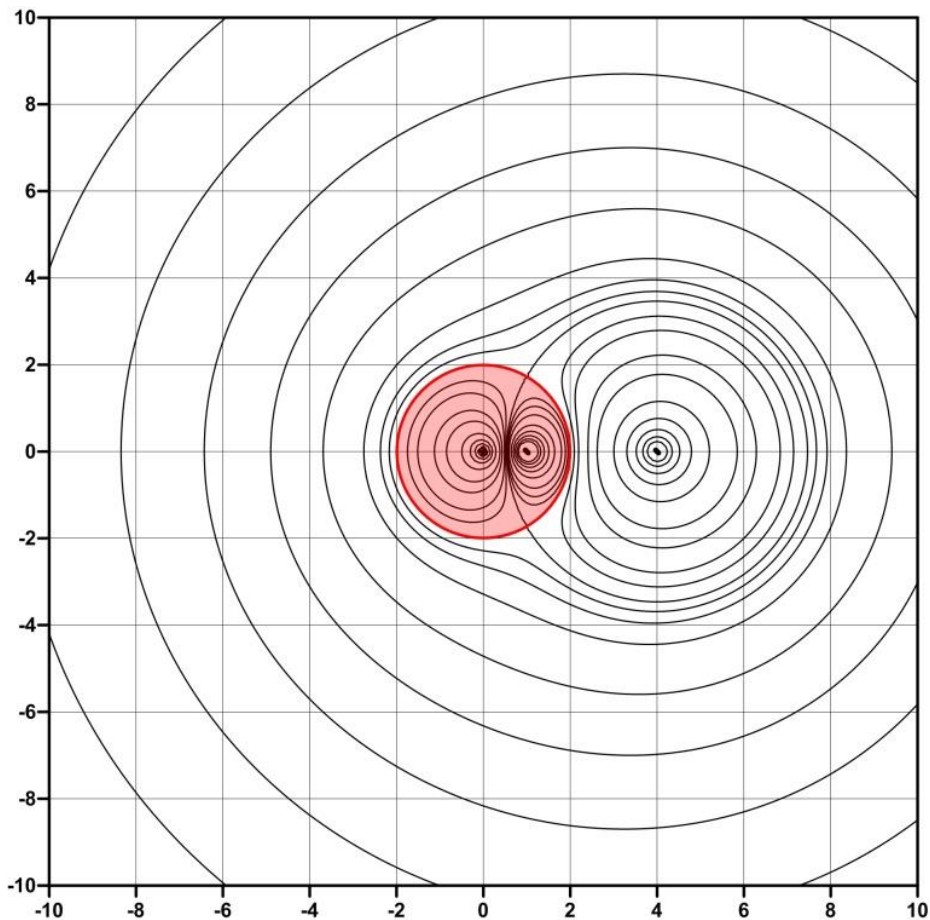
Pokażemy, że powyższy wzór opisuje de facto przepływ indukowany przez trzy odpowiednio umieszczone wiry potencjalne.

W tym celu przekształćmy wyrażenie logarytmowane w następujący sposób

$$\begin{aligned} \frac{(x-c)^2 + y^2}{\left(\frac{a^2x}{x^2+y^2} - c\right)^2 + \frac{a^4x^2}{(x^2+y^2)^2}} &= \frac{[(x-c)^2 + y^2](x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\left[\frac{a^4x^2}{x^2+y^2} - 2a^2xc + c^2(x^2 + y^2) + \frac{a^4y^2}{x^2+y^2}\right]} = \\ &= \frac{[(x-c)^2 + y^2](x^2 + y^2)}{a^4 - 2a^2xc + c^2(x^2 + y^2)} = \frac{[(x-c)^2 + y^2](x^2 + y^2)}{c^2\left[\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 - 2\frac{a^2}{c}x + x^2 + y^2\right]} = \frac{[(x-c)^2 + y^2](x^2 + y^2)}{c^2\left[\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 + y^2\right]} \end{aligned}$$

Zatem, funkcja prądu może być zapisana w postaci

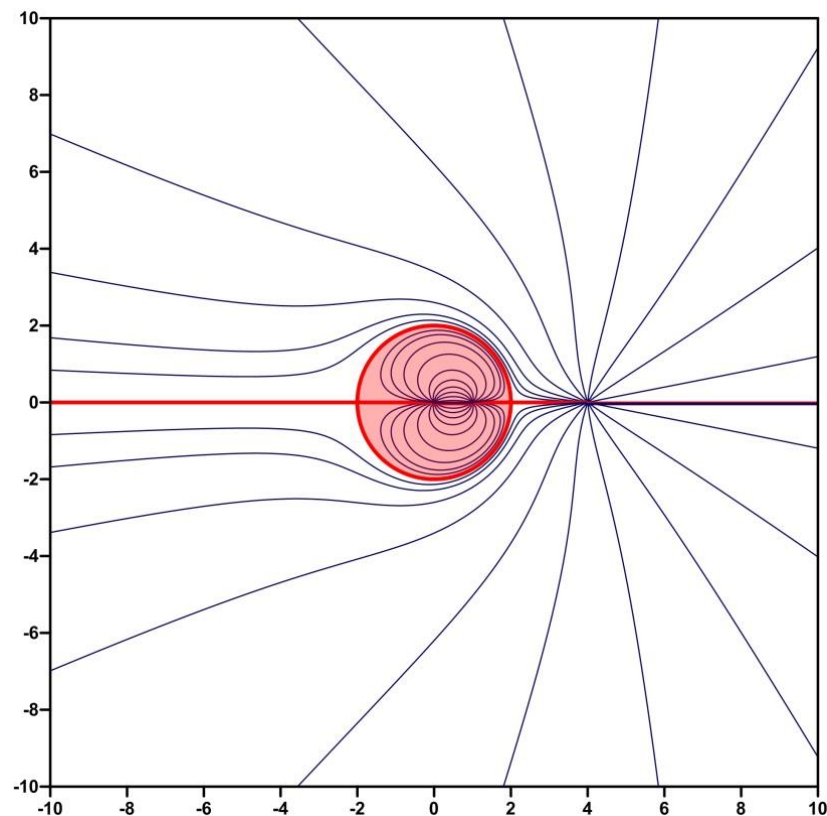
$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{(x-c)^2 + y^2}{\left(\frac{a^2x}{x^2+y^2} - c\right)^2 + \frac{a^4x^2}{(x^2+y^2)^2}} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{[(x-c)^2 + y^2](x^2 + y^2)}{c^2\left[\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 + y^2\right]} = \\ &= \underbrace{-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}_{\text{oryginalny wir } (\Gamma)} + \left(\underbrace{-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{wir w } (0,0) (\Gamma)} \right) + \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 + y^2}}_{\text{wir w punkcie inwersji } (-\Gamma)} + \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi} \ln c}_{\text{nieistotna stała}} \end{aligned}$$



A oto układ linii prądu

Analogicznie, można wyznaczyć przepływ po włożeniu profilu kołowego do przepływu wywołanego obecnością źródła/upustu (ćwiczenie – wzory i interpretacja)

Oto linie prądu tego przepływu ...



A może włożyć profil kołowy do przepływu wywołanego kombinacją wiru i źródła/upustu ...

