WYKŁAD 12

ENTROPIA I NIERÓWNOŚĆ THERMODYNAMICZNA

ENTROPIA PŁYNU IDEALNEGO W PRZEPŁYWIE BEZ NIECIĄGŁOŚCI

Załóżmy, że przepływ płynu idealnego jest „gładki”, tj. wszystkie pola wielkości kinematycznych i termomechanicznych są dostatecznie regularne (przynajmniej ciągłe). Pokażemy, że w takiej sytuacji **entropia jest zachowana wzdłuż trajektorii elementów płynu**.

W tym celu rozważmy **równanie energii wewnętrznej** wyprowadzone w **Wykładzie nr 11**. Dla płynu idealnego (nielepkiego i nie przewodzącego ciepła) równanie to sprowadza się do prostej postaci, a mianowicie

$$\rho \frac{D}{Dt} u = -p \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

Skorzystamy z wyprowadzonej wcześniej zależności

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt} \rho$$

wynikającej wprost z równania zachowania masy.

Wówczas, równanie energii wewnętrznej może być zapisane następujące

$$\frac{D}{Dt} u = -\frac{p}{\rho^2} \frac{D}{Dt} \rho = -p \frac{D}{Dt}(1/\rho) = -p \frac{D}{Dt} \vartheta \quad , \quad \vartheta \text{ - objętość właściwa}$$

Przypomnijmy, że Pierwsza Zasada Termodynamiki może być wyrażona przez **różniczki zupełne** trzech wielkości (potencjałów) termodynamicznych: entropii s, energii wewnętrznej u i objętości właściwej $\vartheta = 1/\rho$. Mamy wówczas

$$Tds = du + pd\vartheta$$

Po podstawieniu otrzymanej wcześniej formuły otrzymujemy

$$T\frac{D}{Dt}s = \frac{D}{Dt}u + p\frac{D}{Dt}\vartheta = -p\frac{D}{Dt}\vartheta + p\frac{D}{Dt}\vartheta = 0$$

co dowodzi, że **entropia wzdłuż torów elementów płynu jest zachowana**. Pokażemy później, że twierdzenie to nie jest prawdziwe, jeżeli przepływ nie jest ciągły (w sensie matematycznym), tj. pojawiają się w nim **silne nieciągłości zwane falami uderzeniowymi**.

Wprowadziliśmy wcześniej pojęcie przepływu **homoenergetycznego**. W takich przepływach całka równania energii ma tę samą wartość dla każdej linii prądu, czyli jest stała w całym obszarze przepływu

$$i + \tfrac{1}{2}\upsilon^2 - \Phi = C_e^{global} \qquad \text{lub równoważnie} \qquad \nabla\left(i + \tfrac{1}{2}\upsilon^2 - \Phi\right) = 0.$$

Analogicznie, można zdefiniować przepływ **homoentropowy**, jako przepływ w którym $\nabla s \equiv 0$. **W przepływach homoentropowych entropia jest stała w całym obszarze**.

Pierwsza Zasada termodynamiki może być zapisana w postaci

$$T\,ds = di - (1/\rho)dp$$

Dla dowolnego przepływu stacjonarnego mamy zatem

$$T\nabla s = \nabla i - (1/\rho)\nabla p$$

Jeśli przepływ jest **homoentropowy** to

$$\nabla i = (1/\rho)\nabla p = \nabla P.$$

Wynika z tego, że pole wektorowe $(1/\rho)\nabla p$ jest **potencjalne**, czyli **przepływ homoenergetyczny i homoentropowy jest automatycznie barotropowy**, a stała Bernoulliego C_B jest globalna. Wiemy z wcześniejszych rozważań, że **w przypadku dwuwymiarowym przepływ taki jest również przepływem potencjalnym**.

Powyższy wniosek można wyprowadzić również posługując się interesującym związkiem zwanym **równaniem Crocco**.

Punktem wyjścia jest równanie ruchu (Eulera) ustalonego zapisane w formie Lamba-Gromeki

$$\nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right)+\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{\omega}=-\tfrac{1}{\rho}\nabla p+\nabla\Phi$$

Składnik ciśnieniowy można wyeliminować przy pomocy równania Pierwszej Zasady Termodynamiki. Otrzymamy wówczas **równanie Crocco**

$$T\nabla s=\nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2+i-\Phi\right)+\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{\omega}$$

Z równania tego wynika natychmiast, że w **przepływie ustalonym, homoenergetycznym i homoentropowym** ma miejsce związek $\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$. Jak wiemy, implikuje on „globalność" stałej Bernoulliego (również w 3D).

NIERÓWNOŚĆ TERMODYNAMICZNA

Rozważmy obszar kontrolny Ω. Zmiana w czasie całkowitej entropii płynu wewnątrz tego obszaru w danej chwili może być wyrażona jako suma trzech składników:

- zmiany wywołanej transportem entropii przez brzeg $\partial\Omega$,
- zmiany wywołanej przewodnictwem ciepła w obszarze wskutek niejednorodności rozkładu temperatury,
- zmiany entropii związanej z zachodzeniem w obszarze Ω procesów termodynamicznie nieodwracalnych.

Zgodnie z Drugą Zasadą Termodynamiki procesy nieodwracalne termodynamicznie prowadzą zawsze do wzrostu entropii ośrodka.

Innymi słowy: całkowita zmiana entropii w płynie zawartym wewnątrz Ω **nie może być mniejsza niż zmiana wynikająca z transportu entropi do/z tego obszaru i przewodnictwa ciepła.**

Jak zwykle, w celu określenia całkowitej entropii płynu z obszarze Ω posłużymy się pojęciem pola entropii właściwej s. Entropia całkowita wyraża się wówczas całką

$$S_\Omega = \int_\Omega \rho s \, dV$$

Ponieważ obszar Ω jest ustalonym kontrolnym (niezmiennym w czasie), to całkowite tempo zmian wielkości S_Ω jest równe

$$\left.\frac{dS_\Omega}{dt}\right|_{calkow.} = \int_\Omega \tfrac{\partial}{\partial t}(\rho s)\, dV$$

Tempo zmian wielkości S_Ω wynikające z transportu przez brzeg obszaru możemy – zgodnie z ogólnymi rozważaniami przedstawionymi w **Wykładzie nr 3** – przedstawić za pomocą całki powierzchniowej

$$\left.\frac{dS_\Omega}{dt}\right|_{\substack{transport\\ przez\ \partial\Omega}} = -\int_{\partial\Omega} \rho s\, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, dA$$

Zatem, tempo produkcji „netto" wielkości S_Ω jest równe (szczegóły całkowania jak w W3)

$$\left.\frac{dS_\Omega}{dt}\right|_{produkcja} = \left.\frac{dS_\Omega}{dt}\right|_{calkow.} - \left.\frac{dS_\Omega}{dt}\right|_{\substack{transport\\ przez\ \partial\Omega}} = \int_\Omega \tfrac{\partial}{\partial t}(\rho s)\, dV + \int_{\partial\Omega} \rho s\, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, dA = \ldots = \int_\Omega \rho \tfrac{D}{Dt} s\, dV$$

Obliczmy teraz tempo zmian entropii płynu w obszarze Ω wynikające z przepływu ciepła wywołanego niejednorodnościami temperatury.

Rozważmy mały fragment $\Delta\Omega$ obszaru Ω. Niech ΔA oznacza brzeg $\Delta\Omega$. Ilość ciepła wymieniona przez ten fragment z ciągu krótkiego czasu Δt może być obliczona następująco

$$\Delta Q = -\Delta t \int_{\Delta A} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\, dA \underset{GGO}{=} -\Delta t \int_{\Delta\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{q}\, dV \approx -\Delta t\, \nabla \cdot \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\, \Delta V$$

Symbolem $\boldsymbol{q}$ oznaczyliśmy lokalną wartość wektora strumienia ciepła, a ΔV to objętość $\Delta\Omega$ Odpowiadający wymienionej ilości ciepła przyrost entropii to

$$\Delta S_{\Delta\Omega}\Big|_{cieplo} = \frac{\Delta Q}{T} \approx -\Delta t \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})}{T} \Delta V$$

Tempo zmian entropii płynu w obszarze Ω obliczymy całkując powyższe wyrażenie w tym obszarze, dzieląc wynik przez Δt i przechodząc do granicy $\Delta t \to 0$.

Oto wynik

$$\left.\frac{dS_\Omega}{dt}\right|_{cieplo} = -\int_\Omega \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})}{T} dV$$

Druga Zasada Termodynamiki może być teraz sformułowana jako nierówność

$$\left.\frac{dS_{\Omega}}{dt}\right|_{produkcja} \geq \left.\frac{dS_{\Omega}}{dt}\right|_{cieplo}$$

lub

$$\int_{\Omega} \rho \frac{Ds}{Dt} dV \geq -\int_{\Omega} \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})}{T} dV$$

Całka objętościowa po prawej stronie nierówności może być przekształcona następująco

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}}{T} dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{q}}{T} \right) dV + \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{q} \cdot \nabla T}{T^2} dV \underset{GGO}{=} \int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}}{T} dV + \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{q} \cdot \nabla T}{T^2} dV$$

Zatem, **nierówność termodynamiczna** może być zapisana następująco

$$\int_{\Omega} \rho \frac{Ds}{Dt} dV \geq -\int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}}{T} dA - \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{q} \cdot \nabla T}{T^2} dV$$

W szczególnym przypadku płyny izotropowego termicznie, wektor strumienia ciepła $\boldsymbol{q}$ związany jest z lokalnym gradientem temperatury **prawem Fouriera**

$$q = -\lambda \nabla T$$

gdzie $\lambda > 0$ to współczynnik przewodnictwa ciepła.

Po podstawieniu do nierówności termodynamicznej otrzymujemy jej szczególny przypadek (tzw. **nierówność Gibbsa-Duhema**)

$$\boxed{\int_{\Omega} \rho \frac{Ds}{Dt} dV \geq \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\nabla T \cdot \boldsymbol{n}}{T} dA + \int_{\Omega} \lambda \left| \frac{\nabla T}{T} \right|^2 dV}$$

Powyższa nierówność może być zinterpretowana następująco: jeżeli w przepływie występuje przewodnictwo ciepła to wyrażenie po prawej stronie nierówności opisuje minimalne tempo produkcji entropii w płynie.