Klasyczne metody iteracyjne - uzupełnienie (D1)

Wybrane zagadnienia zaawansowane

1. Rozkład regularny i zbieżność procesów iteracyjnych

Rozważmy układ liniowy postaci $Ax = b$

Poznane dotąd metody są szczególnymi przypadkami metod wynikających na bazie rozkładu macierzy A danego wzorem:

$$A = P - Q \quad , \quad \det P \neq 0.$$

Łatwo zauważyć, że proces iteracyjny postaci

$$x^{k+1} = P^{-1}Qx^k + P^{-1}b$$

jest zgodny z układem $Ax = b$ (tzn. punkt stały tego procesu jest rozwiązaniem układu).

Zacznijmy od podania ważnego twierdzenia (bez dowodu)

Twierdzenie Steina

Promień spektralny macierzy rzeczywistej G spełnia nierówność $\rho(G) < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje symetryczna i dodatnio określona macierz rzeczywista B taka, że macierz $B - G^T B G$ jest dodatnio określona

Wprowadzamy pojęcie P-regularnego rozkładu macierzy kwadratowej rzeczywistej.

DEF: Rozkład $A = P - Q$ nazywamy P-regularnym jeżeli P jest macierzą nieosobliwą a macierz $P + Q$ (niekoniecznie symetryczna) jest dodatnio określona.

Zachodzi ważne twierdzenie:

TWIERDZENIE: Jeżeli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona oraz rozkład $A = P - Q$ jest P-regularny to $\varrho(P^{-1}Q) < 1$

Komentarz: z twierdzenia wynika, że metoda iteracyjna oparta na P-regularnym rozkładzie macierzy symetrycznej i dodatnio określonej jest zbieżna przy dowolnym przybliżeniu początkowym.

Dowód: Oznaczmy $G = P^{-1}Q$ i niech $C = A - G^T A G$

Ponieważ $P^{-1}Q = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A$ to możemy napisać

$$C = A - (I - P^{-1}A)^T A (I - P^{-1}A) = \cancel{A} - \cancel{A} + (P^{-1}A)^T A +$$

$$+ AP^{-1}A - (P^{-1}A)^T P^{-1}A = (P^{-1}A)^T (P + P^T - A) P^{-1}A =$$

pokazać!

$$= (P^{-1}A)^T (P^T + Q)(P^{-1}A)$$

Z założenia $P + Q$ jest określone dodatnio, zatem i $P^T + Q$ również (dlaczego?!). Macierz C jest kongruentna do macierzy macierzy $P^T + Q$ (kongruencja macierzy M_1 i M_2 oznacza, że $M_2 = K^T M_1 K$ dla pewnej macierzy nieosobliwej K) zatem również macierz C jest określona dodatnio. Wobec tego z twierdzenia Steina wynika, że jeśli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona to $\varrho(G) < 1$ co kończy dowód.

Do kompletu podamy dwa twierdzenia mające charakter twierdzeń odwrotnych względem poprzedniego twierdzenia.

1-sze twierdzenie odwrotne o rozkładzie P-regularnym

Niech macierz A będzie symetryczna i nieosobliwa, niech rozkład $A = P - Q$ będzie P-regularny oraz niech $\rho(P^{-1}Q) < 1$. Wówczas macierz A jest dodatnio określona.

Dowód: Oznaczmy $G = P^{-1}Q$. Z założenia $\rho(G) < 1$. Zatem dla dowolnego x^0 ciąg wektorów $x^{k+1} = Gx^k$ zbiega do zera. Załóżmy - wbrew tezie - że macierz A nie jest dodatnio określona. Wówczas dla pewnego $x^0 \neq 0$ zachodzi nierówność $(x^0)^T A x^0 \leq 0$ oraz wektor $y^0 = P^{-1} A x^0$ jest niezerowy.

Wykorzystując macierz C wprowadzoną w dowodzie poprzedniego twierdzenia możemy napisać

$$(x^0)^T C x^0 = \underbrace{(x^0)^T (P^{-1}A)^T}_{(y^0)^T} (P^T + Q) \underbrace{(P^{-1}A)x^0}_{y^0} = (y^0)^T (P^T + Q) y^0$$

Ponieważ C jest określona dodatnio mamy $(y^0)^T (P^T + Q) y^0 > 0$ jako, że rozkład macierzy A jest P-regularny (co implikuje dodatnią określoność macierzy $P^T + Q$)

Ponieważ macierz C jest określona dodatnio to dla dowolnego numeru iteracji k mamy

$$0 \leq (x^k)^T C x^k = (x^k)^T [A - G^T A G] x^k =$$

$$= (x^k)^T A x^k - \underbrace{(x^k)^T G^T}_{(x^{k+1})^T} A \underbrace{G x^k}_{x^{k+1}} = (x^k)^T A x^k - (x^{k+1})^T A x^{k+1}$$

przy czym nierówność ostra zachodzi - jak pokazaliśmy - dla x^0. $(k=0)$. Wobec tego mamy ciąg nierówności

$$(x^{k+1})^T A x^{k+1} \leq (x^k)^T A x^k \leq \ldots \leq (x^1)^T A x^1 < (x^0)^T A x^0 \leq 0$$

bo (wiadomo) A nie jest dodatnio określona!

który przeczy faktowi, że $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$!

Wobec tego A musi być dodatnio określona, co należało pokazać.

2-gie twierdzenie odwrotne o rozkładzie P-regularnym.

Załóżmy, że macierz $A = P - Q$ jest symetryczna i nieosobliwa, macierz P jest symetryczna i dodatnio określona oraz $\varrho(P^{-1}Q) < 1$. Wówczas macierze A i $P+Q$ są dodatnio określone.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się inne użyteczne twierdzenie, a mianowicie:

TWIERDZENIE (o wartościach własnych iloczynu macierzy)
Niech macierze B i C będą rzeczywistymi macierzami symetrycznymi. Jeżeli którakolwiek z nich jest dodatnio określona to wartości własne macierzy BC są rzeczywiste. Jeżeli obie są dodatnio określone to wartości własne macierzy BC są rzeczywiste i dodatnie. Odwrotnie: jeżeli BC ma dodatnie wartości własne i choćby jeden z czynników jest dodatnio określony to oba są dodatnio określone.

Udowodnijmy 2-gie twierdzenie odwrotne.

Połóżmy - jak zwykle - $G = P^{-1}Q = I - P^{-1}A$. Ponieważ z założenia P^{-1} jest (również) dodatnio określona to z twierdzenia o iloczynie macierzy wynika, że wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ macierzy G są rzeczywiste, a ponieważ $\varrho(G) < 1$ to mają miejsce nierówności

$$-1 < \lambda_i < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (*)$$

Z faktu, że $G = I - P^{-1}A$ wynika teraz, że wszystkie wartości własne macierzy są dodatnie (wyjaśnij dlaczego!). Z ostatniej części tezy twierdzenia o iloczynie macierzy wynika natychmiast, że macierz A jest określona dodatnio.

Dalej, macierz $(I-G)^{-1}$ istnieje, a macierz

$H = (I-G)^{-1}(I+G)$ ma wartości własne równe

$\mu_i = \dfrac{1+\lambda_i}{1-\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, które są - na mocy $(*)$ dodatnie. Macierz H może być zapisana równoważnie jako

$$H = (I - P^{-1}Q)^{-1}(I + P^{-1}Q) = [P^{-1}(P-Q)]^{-1}P^{-1}(P+Q) =$$

$$= A^{-1}(P+Q)$$

Ponownie, z twierdzenia o iloczynie macierzy wynika dodatnia określoność macierzy $P+Q$ (H ma dodatnie wartości własne, a A^{-1} jest dodatnio określona)

Koniec dowodu.

D6

Podane w części podstawowej wykładu twierdzenie o zbieżności metody Jacobiego jest prostą konsekwencją twierdzeń o rozkładzie P-regularnym i 2-go twierdzenia odwrotnego. Wystarczy zauważyć, że w metodzie Jacobiego $P = D$ oraz $Q = -(L+U)$

Twierdzenie Ostrowskiego-Reicha o zbieżności SOR jest – w jedną stronę – konsekwencją Twierdzenia o rozkładzie P-regularnym, przy czym macierz G_{SOR} równa jak wiemy ($U = L^T$, bo A - symetryczna)

$$G_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega L^T\right]$$

Można pokazać (ćwiczenie), że $G_{SOR} = P^{-1}Q$, gdzie

$$P = \frac{1}{\omega}(D + \omega L) \quad \text{oraz} \quad Q = \frac{1}{\omega}\left[(1-\omega)D - \omega L^T\right]$$

Ponieważ (z założenia) macierz D ma wyłącznie dodatnie elementy to macierz P jest nieosobliwa i wystarczy wykazać, że $P+Q$ jest dodatnio określona. Część symetryczna tej macierzy to

$$\frac{1}{2}(P+P^T) + \frac{1}{2}(Q+Q^T) = \frac{1}{2\omega}(2D + \omega L + \omega L^T) +$$
$$+ \frac{1}{2\omega}\left[2(1-\omega)D - \omega L - \omega L^T\right] = \frac{2-\omega}{\omega}D$$

która jest dodatnio określona jeśli $\omega \in (0,2)$

Twierdzenie O-R „w drugą stronę" jest konsekwencją 1-szego twierdzenia odwrotnego o rozkładzie P-regularnym.

(D7)

Symetryczna metoda Gaussa-Seidela i nadrelaksacji

W metodach symetrycznych za pojedynczą iterację uważamy parę iteracji metody podstawowej, wykonanych kolejno w wariancie „wprzód" i „wstecz".
Oznacza to, że pojedyncza iteracja symetrycznej metody Gaussa-Seidela przedstawia się następująco:

Symetryczna metoda Gaussa-Seidela (SGS)

for $i = 1:n$ do

$$x_i^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{k+\frac{1}{2}} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{k}\Big)$$

end;

for $i = n:1:-1$ do

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{k+\frac{1}{2}} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{k+1}\Big)$$

end;

W zapisie macierzowo-wektorowym...

$$\begin{cases} x^{k+\frac{1}{2}} = -(D+L)^{-1} U x^{k} + (D+L)^{-1} b \\ x^{k+1} = -(D+U)^{-1} L x^{k+\frac{1}{2}} + (D+U)^{-1} b \end{cases}$$

Podstawienie formuły na $x^{k+\frac{1}{2}}$ do formuły dla x^{k+1} prowadzi do formy standardowego liniowego procesu iteracyjnego.

$$x^{k+1} = G_{sgs} x^{k} + W_{sgs}$$

$$G_{sgs} = (D+U)^{-1} L (D+L)^{-1} U$$

$$W_{sgs} = (D+U)^{-1} \left[I - L (D+L)^{-1} \right] b$$

Symetryczna metoda nadrelaksacji (SSOR) ma postać (w zwartym zapisie).

$$
\begin{cases}
\text{for } i=1:n \text{ do} \\
x_i^{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{\omega}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij} x_j^{k+\frac{1}{2}} - \sum\limits_{j>i} a_{ij} x_j^{k}\Big) + (1-\omega)x_i^k \\
\text{end;} \\
\text{for } i=n:1:-1 \text{ do} \\
x_i^{k+1} = \dfrac{\omega}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij} x_j^{k+\frac{1}{2}} - \sum\limits_{j>i} a_{ij} x_j^{k+1}\Big) + (1-\omega)x_i^{k+\frac{1}{2}}
\end{cases}
$$

W zapisie macierzowo-wektorowym (z podziałem na podmacierze)

$$
\begin{cases}
x^{k+\frac{1}{2}} = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]x^k + \omega(D+\omega L)^{-1}b \\
x^{k+1} = (D+\omega U)^{-1}[(1-\omega)D - \omega L]x^{k+\frac{1}{2}} + \omega(D+\omega U)^{-1}b
\end{cases}
$$

Oczywiście SGS jest szczególnym przypadkiem SSOR dla $\omega=1$.

Podstawiając formułę dla $x^{k+\frac{1}{2}}$ do wzoru na x^{k+1} możemy – jak w przypadku SGS – otrzymać standardową postać procesu iteracyjnego SSOR. Pozostawiamy to czytelnikowi jako ćwiczenie, w szczególności pokazanie, że

$$
G_{SSOR} = (D+\omega U)^{-1}[(1-\omega)D - \omega L](D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]
$$

Zależy nam jednak na czymś innym, a mianowicie na pokazaniu jak z twierdzenia o rozkładzie P-regularnym wynikają w-nki zbieżności SSOR (w szczególności – SGS). Nasuwa się też kluczowe pytanie – po co stosować metody w wariancie symetrycznym?! Możemy domyślać się, że ma to sens, gdy sam układ równań ma macierz symetryczną!

Popatrzmy na problem nieco ogólniej. Załóżmy, że macierz A jest symetryczna i rozważmy ogólny, dwuetapowy proces iteracyjny zadany wzorami:

$$\begin{cases} Sx^{k+\frac{1}{2}} = (S-A)x^{k} + b \\ S^{T}x^{k+1} = (S^{T}-A)x^{k+\frac{1}{2}} + b \end{cases} \quad (*)$$

Jest ewidentne, że proces ten jest zgodny z układem liniowym $Ax = b$.

Wyliczmy $x^{k+\frac{1}{2}}$ z 1-ej formuły, podstawmy do drugiej i rozwiążmy ją względem x^{k+1}. Oto wynik:

$$x^{k+1} = (I - S^{-T}A)(I - S^{-1}A)x^{k} + [(I - S^{-T}A)S^{-1} + S^{-T}]b \quad (**)$$

Załóżmy, że proces ten pochodzi od pewnego rozkładu macierzy $A = P - Q$. Jeśli tak jest to macierz P^{-1} musi stać przy wektorze b, czyli

$$P^{-1} = (I - S^{-T}A)S^{-1} + S^{-T} = S^{-T}(S + S^{T} - A)S^{-1}$$

a zatem

$$P = [S^{-T}(S + S^{T} - A)S^{-1}]^{-1} = S(S + S^{T} - A)^{-1}S^{T}$$

Ponieważ $P^{T} = [S(S + S^{T} - A)^{-1}S^{T}]^{T} = S(S^{T} + S - A^{T})^{-1}S^{T} =$
$= S(S + S^{T} - A)^{-1}S^{T} = P$

macierz P jest symetryczna. Odpowiednia macierz Q to:

$$Q = P - A = S(S + S^{T} - A)^{-1}S^{T} - A \quad \text{(oczywiście też symetryczna)}$$

Zauważmy, że iloczyn $P^{-1}Q = (I - S^{-T}A)(I - S^{-1}A)$ (rachunek - ćwiczenie!) czyli otrzymaliśmy macierz procesu $(**)$ tak jak powinniśmy.

Przejdźmy do konkretów, a mianowicie zauważmy, że metoda SSOR pasuje do schematu iteracyjnego $(\ast\ast)$. Podane wcześniej formuły dla tej metody można bowiem zapisać następująco ($U = L^T$ bo A-symetr.)

$$\frac{1}{\omega}(D + \omega L)x^{k+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1-\omega}{\omega}D - L^T\right]x^k + b$$

$$\frac{1}{\omega}(D + \omega L^T)x^{k+1} = \left[\frac{1-\omega}{\omega}D - L\right]x^{k+\frac{1}{2}} + b.$$

Mamy zatem $S = \frac{1}{\omega}(D + \omega L)$. Poza tym istotnie

$$S - A = \frac{1}{\omega}(D + \omega L) - (D + L + L^T) = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D - L^T =$$
$$= \frac{1-\omega}{\omega}D - L^T$$

Uzyskana wcześniej formuła pozwala obliczyć odpowiadające tej macierzy S macierze P i Q. Pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie rachunkowe wyprowadzenie następujących wzorów:

$$P = \frac{1}{\omega(\omega-2)}(D + \omega L)D^{-1}(D + \omega L^T) \quad \text{oraz}$$

$$Q = \frac{1}{\omega(\omega-2)}[(1-\omega)D - \omega L]D^{-1}[(1-\omega)D - \omega L^T]$$

Czytelnik może również sprawdzić, że mnożąc P^{-1} przez Q otrzyma macierz

$$P^{-1}Q = (D + \omega L^T)^{-1}D(D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega L]D^{-1}[(1-\omega)D - \omega L^T]$$

Macierz ta nie jest – pozornie – taka sama jak macierz G_{SSOR} podana na stronie D8 i przy $U = L^T$. Macierze te są jednak równe, co wynika z następującej równości:

$$[(1-\omega)D-\omega L](D+\omega L)^{-1} = D(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega L]D^{-1}$$

Dowód tej równości (nieco bardziej zaawansowane ćwiczenie) polega na wykorzystaniu faktu, że dla dowolnej macierzy B i stałych a i b iloczyn postaci $(I+B)^{-1}(aI+bB)$ jest przemienny (dlaczego?).

Jeżeli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona oraz $\omega \in (0,2)$ to podana na str. D10 macierz P jest również dodatnio określona. Dodatnio określona jest również macierz Q, chyba, że $\omega = 1$ (symetryczny Gauss-Seidel) – wówczas jest ona określona nieujemnie. W każdym z przypadków, suma $P+Q$ jest określona dodatnio wobec czego $A = P-Q$ jest rozkładem P-regularnym. Twierdzenia o rozkładzie P-regularnym (str. D2) i 1-sze twierdzenie odwrotne (str. D3÷D4) implikują wówczas, że:

<u>TW (o zbieżności SSOR)</u>: Jeżeli macierz A jest symetryczna, nieosobliwa i ma dodatnie elementy na diagonali oraz $\omega \in (0,2)$ to iteracje SSOR są zbieżne dla dowolnego przybliżenia początkowego wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest dodatnio określona.

Komentarz: jeżeli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona to wartości własne macierzy G_{SSOR} są rzeczywiste, a ponadto dodatnie jeśli $\omega \neq 1$. Jeśli $\omega = 1$ (czyli SSOR $\equiv$ SGS) to wartości te są nieujemne. Rzeczywiste są również wartości własne macierzy G_{Jacobi}.

Akceleracja Czebyszewa

Omówimy metodę przyspieszania zbieżności metod iteracyjnych podpadających pod ogólny schemat stacjonarnego procesu iteracyjnego postaci:

$$x^{k+1} = G x^k + w$$

Oczywiście, z warunku zbieżności mamy $\rho(G) < 1$.

Idea przyspieszenia zbieżności jest następująca: dysponując „historię" zbieżności skonstruujmy w kroku m-tym wektor

$$y^m = \sum_{k=0}^{m} \gamma_{m,k} x^k$$

który jest lepszym przybliżeniem rozwiązania x_* niż x^m.

Współczynniki $\gamma_{m,k}$ muszą spełniać warunek zgodności $\sum_{k=0}^{m} \gamma_{m,k} = 1$, bo jeśli $x^0 = x^1 = \ldots = x^m = x_*$ to i y^m musi być równe x_*. Zatem:

$$e^m := y^m - x_* = \sum_{k=0}^{m} \gamma_{mk} x^k - x_* = \sum_{k=0}^{m} \gamma_{mk} \underbrace{(x^k - x_*)}_{e^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \gamma_{mk} e^k = \sum_{k=0}^{m} \gamma_{mk} G^k e^0 = \underbrace{p_m(G)}_{\substack{\text{pewien wielomian macierzowy} \\ \text{stopnia } m.}} e^0$$

$$p_m(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \gamma_{mk} \lambda^k \quad \text{i} \quad p_m(1) = \sum_{k=0}^{m} \gamma_{mk} = 1.$$

D13

Załóżmy, że wszystkie wartości własne macierzy G SĄ RZECZYWISTE. Z warunku zbieżności wynika, że są to liczby z przedziału $[-\rho, \rho]$, gdzie $\rho \equiv \rho(G) < 1$.

Poszukamy wielomianu p_m takiego, że:

- $p_m(1) = 1$
- $\max\limits_{-\rho \leq x \leq \rho} |p_m(x)|$ jest możliwie najmniejsza

Jeśli to się uda, to wartości własne macierzy $p_m(G)$ czyli liczby $p_m[\lambda(G)]$ będą możliwie najmniejsze, czyli promień spektralny macierzy $p_m(G)$ będzie tak mały jak to tylko możliwe. Oczekujemy, że tempo zbieżności procesu iteracyjnego znacząco wzrośnie.

Przypomnijmy definicję i własności wielomianów Czebyszewa.

DEF: Wielomianami Czebyszewa (2-go rodzaju) nazywamy funkcje:

$$\begin{cases} T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x \\ T_{k+1}(x) = 2x\,T_k(x) - T_{k-1}(x) \end{cases}$$

Wielomiany Czebyszewa mają szereg ważnych własności:

1) $T_k(1) = 1$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$
2) $T_k(x) = 2^{k-1} x^k + \ldots$
3) $|T_k(x)| \leq 1$ dla $|x| \leq 1$
4) $T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \arccos x) & \text{gdy } |x| \leq 1 \\ \cosh(k \operatorname{arccosh} x) & \text{gdy } |x| > 1. \end{cases}$

D 14

5) miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa $T_k(x)$ to:

$$x_i^k = \cos\frac{2i-1}{2k}\pi, \quad i=1,2,\dots,k \quad i \quad |x_i^k| < 1$$

6) $T_k(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^k + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-k}\right], \quad |x|>1$

7) $T_k(1+\varepsilon) \geq \frac{1}{2}\left(1+k\sqrt{2\varepsilon}\right), \quad \varepsilon>0$, tj. wartość $T_k(1+\varepsilon)$ rośnie szybko (dla ustalonego ε) ze wzrostem k.

Np. dla $\varepsilon = 10^{-4}$ mamy:

$T_{10}(1+\varepsilon) \approx 1.0$

$T_{100}(1+\varepsilon) \approx 2.2$

$T_{200}(1+\varepsilon) \approx 8.5$

$T_{1000}(1+\varepsilon) \approx 6.93 \cdot 10^5$

Zdefiniujmy wielomian $p_m(x) = T_m(x/\rho)/T_m(1/\rho)$

Dla dowolnego m, $p_m(1) = 1$

Jeśli $x \in [-\rho, \rho]$ to $p_m(x) \leq 1/T_m(1/\rho)$

Jeśli $\rho = (1+\varepsilon)^{-1}$ to $p_m(x) \leq \frac{1}{T_m(1+\varepsilon)}$

czyli $p_m(x)$ jest małe dla dużych m i „niezbyt" małych ε.

Ekonomiczna implementacja wykorzystuje rekurencyjną definicję wielomianów Czebyszewa. Pozwala ona obliczyć y^m jedynie na podstawie y^{m-1} i y^{m-2}!

Oto jak to działa...

Oznaczamy $\mu_m = 1/T_m(1/\rho)$. Wówczas

$$p_m(G) = \mu_m T_m\left(\frac{1}{\rho}G\right)$$

(D15)

Ze związku rekurencyjnego mamy

$$T_m(1/\varrho) = \frac{2}{\varrho} T_{m-1}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - T_{m-2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

czyli $$\frac{1}{\mu_m} = \frac{2}{\varrho \mu_{m-1}} - \frac{1}{\mu_{m-2}} \qquad (\Delta)$$

Dalej:

$$y^m - x_* = p_m(G)e^0 = \mu_m T_m\left(\frac{1}{\varrho}G\right)e^0 =$$

$$= \mu_m\left[\frac{2}{\varrho} G T_{m-1}\left(\frac{1}{\varrho}G\right)e^0 - T_{m-2}\left(\frac{1}{\varrho}G\right)e^0\right] =$$

$$= \mu_m\left[\frac{2}{\varrho} G \frac{1}{\mu_{m-1}} p_{m-1}\left(\frac{1}{\varrho}G\right)e^0 - \frac{1}{\mu_{m-2}} p_{m-2}\left(\frac{1}{\varrho}G\right)e^0\right] =$$

$$= \mu_m\left[\frac{2}{\varrho} G \frac{1}{\mu_{m-1}}\left(y^{m-1} - x_*\right) - \frac{1}{\mu_{m-2}}\left(y^{m-2} - x_*\right)\right]$$

Zatem:

$$y^m = \frac{2\mu_m}{\varrho\mu_{m-1}} G y^{m-1} - \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} y^{m-2} + d_m$$

gdzie

$$d_m = x_* - \frac{2\mu_m}{\mu_{m-1}}\frac{1}{\varrho} G x_* + \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} x_* =$$

$$= x_* - \frac{2\mu_m}{\mu_{m-1}}\frac{1}{\varrho}\left(x_* - w\right) + \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} x_* =$$

$$= \mu_m \underbrace{\left[\frac{1}{\mu_m} - \frac{2}{\mu_{m-1}} + \frac{1}{\mu_{m-2}}\right]}_{0 \text{ bo } (\Delta)!} x_* + \frac{2\mu_m}{\varrho\mu_{m-1}} w =$$

$$= \frac{2\mu_m}{\varrho\mu_{m-1}} w.$$

D16

Ostatecznie, mamy algorytm:

START: $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = \varrho,\ y^0 = x^0,\ y^1 = G x^0 + W$

DLA $m = 2, 3, \dots$:

1) $\mu_m = 1 / \left(\frac{2}{\varrho \mu_{m-1}} - \frac{1}{\mu_{m-2}} \right)$

2) $y^m = \frac{2\mu_m}{\varrho \mu_{m-1}} \left(G y^{m-1} + W \right) - \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} y^{m-2}$

3) test zbieżności ...

KONIEC

Zauważmy, że metody klasyczne: Jacobiego oraz symetryczne warianty SGS i SSOR, zastosowane do układów równań z macierzą symetryczną i dodatnio określoną spełniają w-nek stosowalności algorytmu akceleracji Czebyszewa (odpowiednie macierze mają rzeczywiste wartości własne).

Zadanie domowe: Napisać program realizujący akcelerację Czebyszewa dla SSOR-u i zastosować opracowany algorytm do układu liniowego otrzymanego w wyniku dyskretyzacji zagadnienia brzegowego 1-szego rodzaju (Dirichleta) postawionego dla równania Poissona $\nabla^2 f = r$ lub Helmholtza $\alpha u - \nabla^2 u = r$ $(\alpha > 0)$ w obszarze $[0,1] \times [0,1]$.