

Wytrzymałość konstrukcji 1

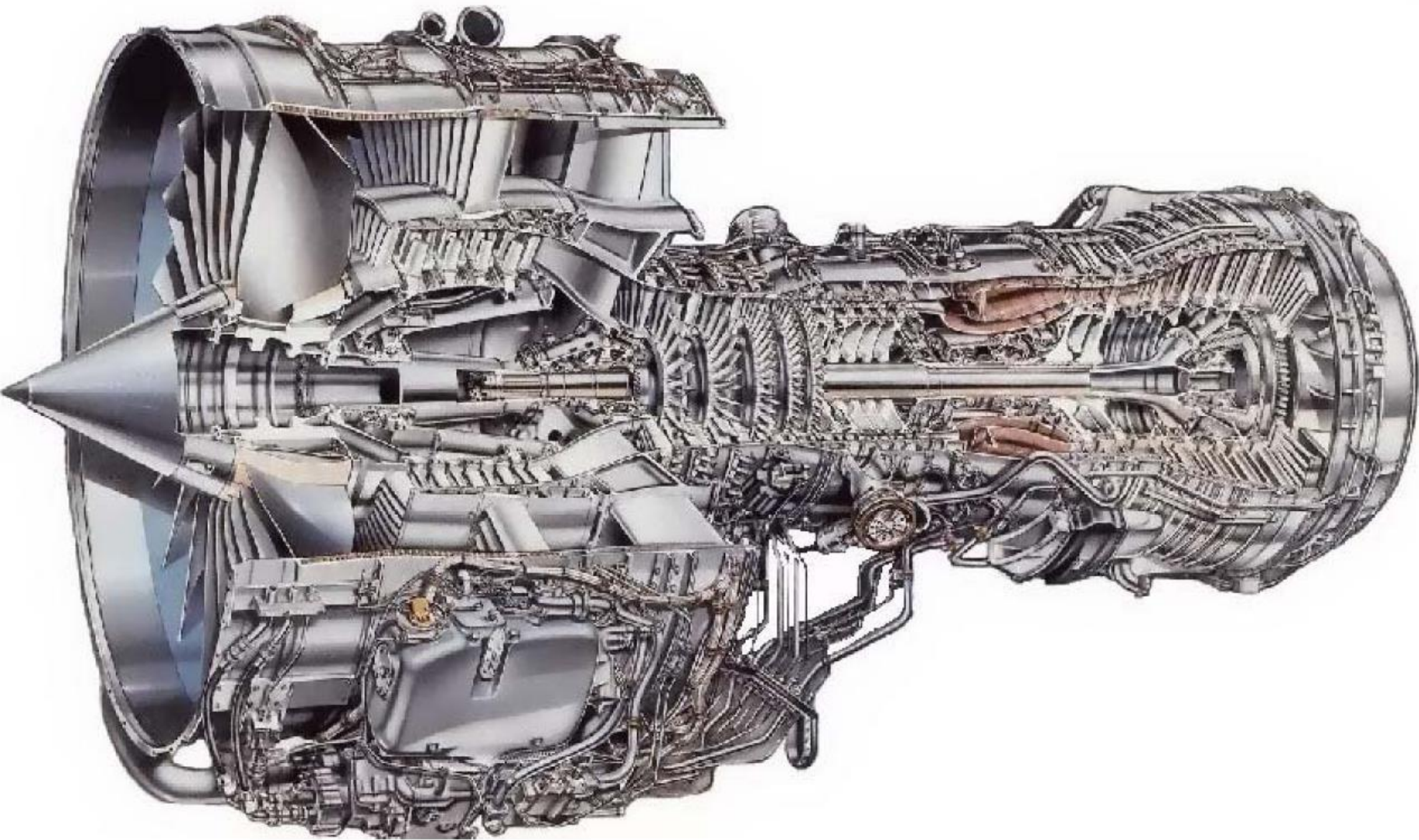
Wykład 8

Pręty skręcane swobodnie

Pręt kołowy

Rura cienkościenna

Pręty o przekroju otwartym

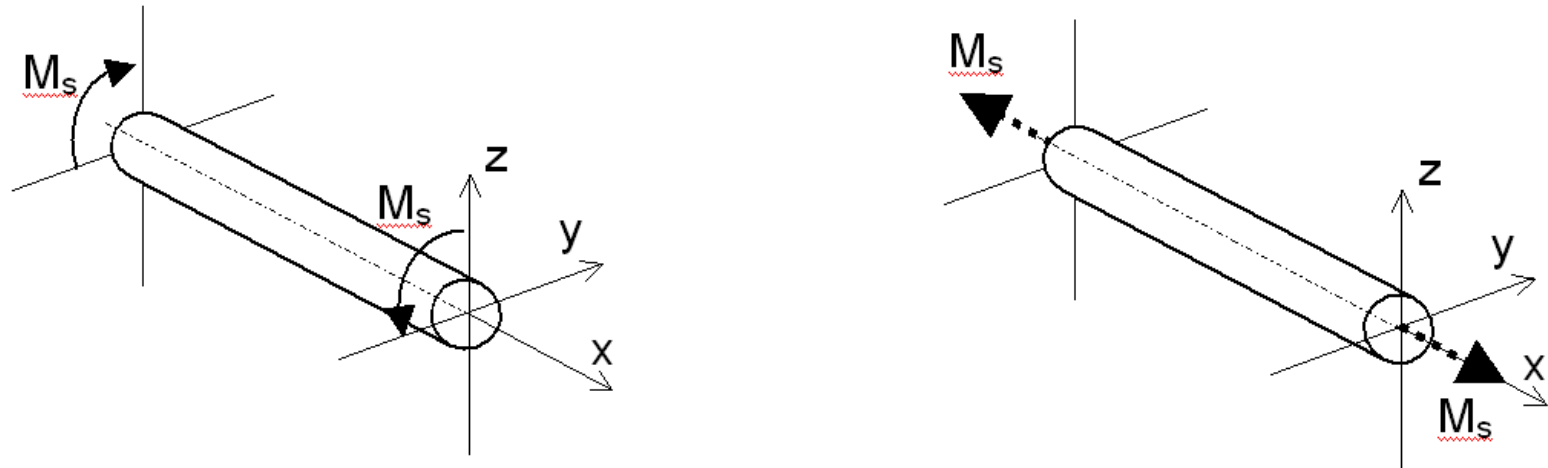


Dwuprzepływowy silnik odrzutowy V2500

Ciąg: od: 97 kN, do 145 kN

Wyznaczanie składowej wysiłku przekroju w pręcie skręcanym

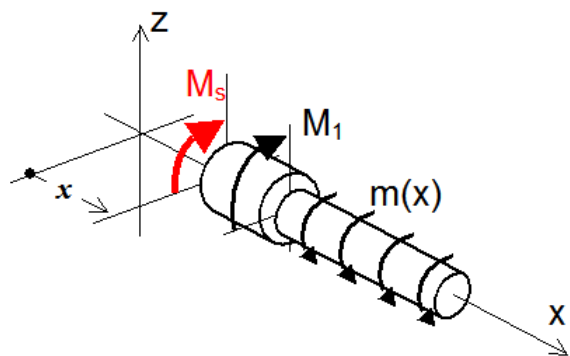
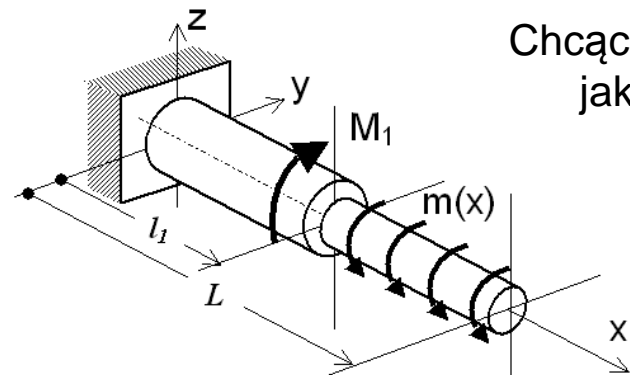
Skręcanie to taki przypadek obciążenia pręta, w którym jedyną składową wysiłku przekroju jest moment skręcający. Konwencję dodatniego znaku momentu skręcającego M_s przedstawia rys.3.1.



Rys. 3.1. Konwencja dodatniego znaku momentu skręcającego

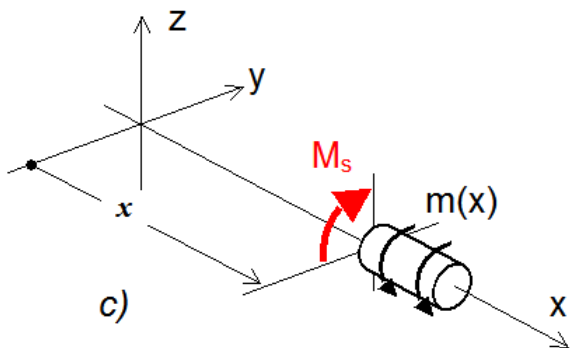
Wyznaczanie składowej wysiłku przekroju w pręcie skręcanym

Chcąc wyznaczyć składowe wysiłku przekroju postępujemy podobnie jak dla pręta rozciąganego wprowadzając myślowe przecięcie



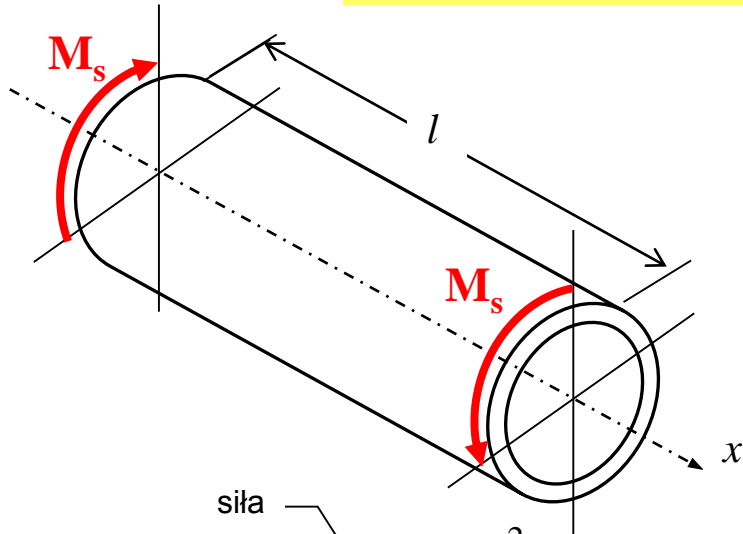
Równania równowagi momentów względem osi x w kolejnych przedziałach:

$$\text{dla } x \in (0, l_1): \quad -M_s(x) + \int_{l_1}^L m(s) ds - M_1 = 0$$

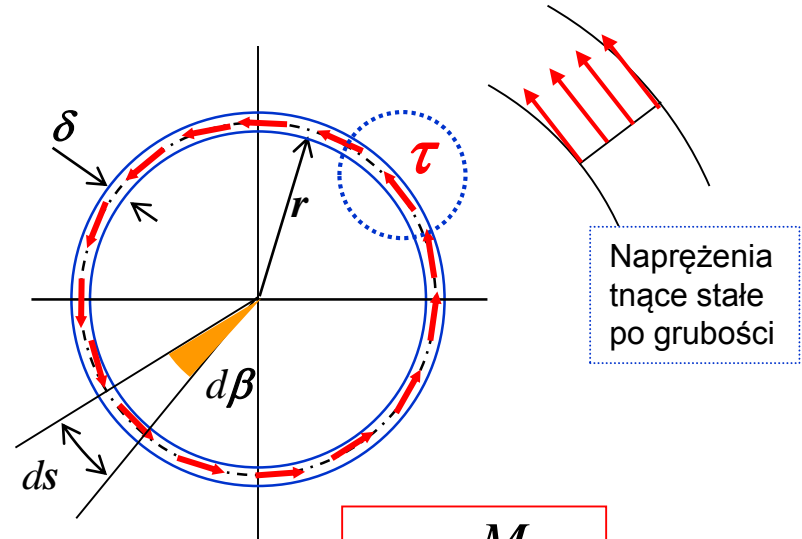


$$\text{dla } x \in (l_1, L): \quad -M_s(x) + \int_x^L m(s) ds = 0$$

Skręcanie cienkiej rury o przekroju kołowym

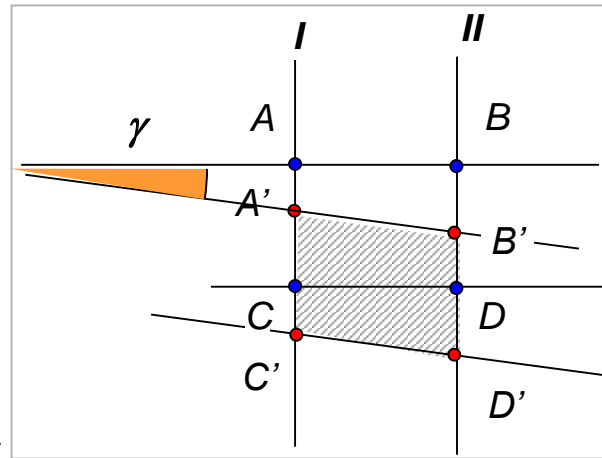
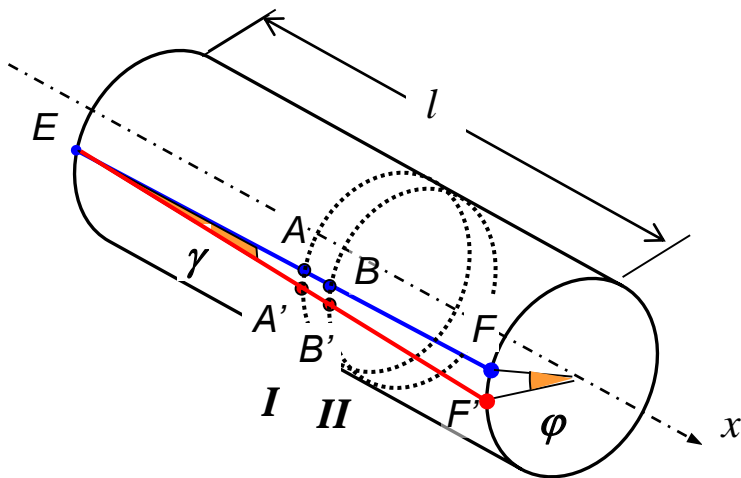


r - średni promień
 δ - grubość ($\delta \ll r$)
 l - długość



$$M_s = \int_A r \cdot \tau \cdot \delta ds = \int_0^{2\pi} \tau \delta r \cdot r d\beta = 2\pi r^2 \delta \cdot \tau$$

$$\tau = \frac{M_s}{2\pi r^2 \delta}$$



φ - kąt skręcenia w przekroju końcowym

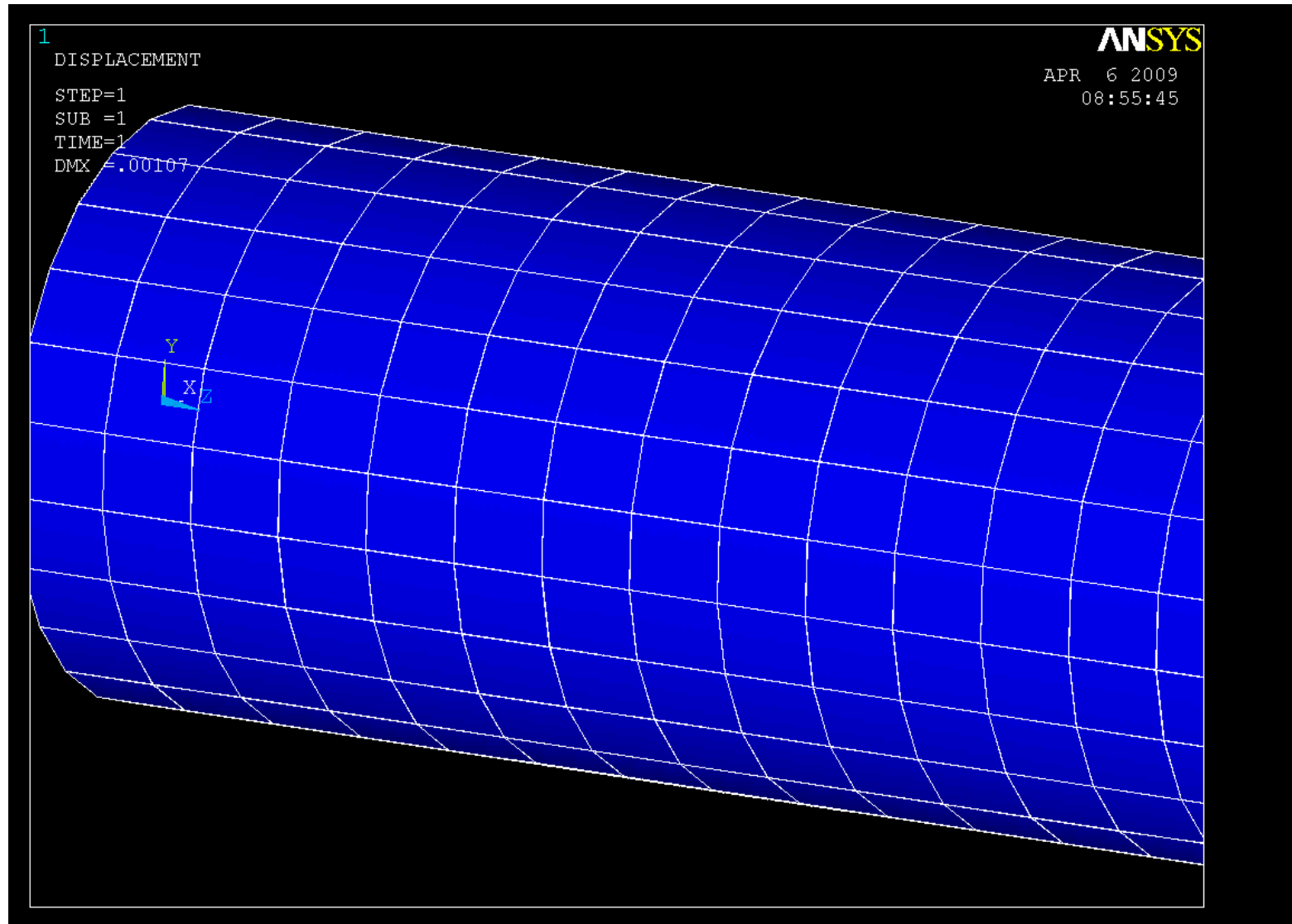
γ - kąt odkształcenia postaciowego

θ - kąt skręcenia na jednostkę długości

$$|FF'| = \gamma \cdot l = \varphi \cdot r \longrightarrow \gamma = \frac{\varphi}{l} \cdot r = \theta \cdot r$$

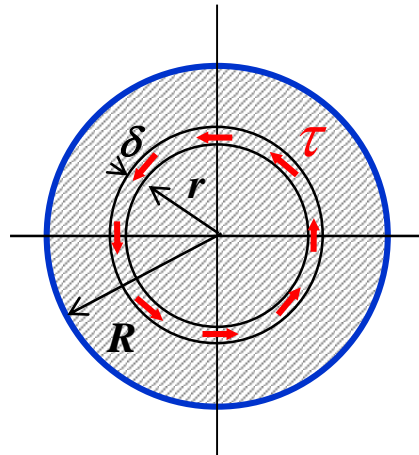
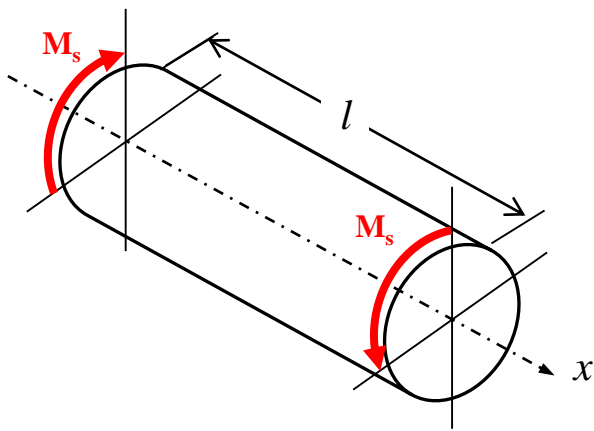
Skrećanie pręta o przekroju kołowym

Skrećanie swobodne to taki przypadek skrećania, w którym istnieje pełna swoboda ewentualnego pacyenia się przekroju, czego konsekwencją jest istnienie tylko naprężeń stycznych.



Skręcanie pręta kołowego

Pręt o przekroju kołowym skręca się tak, że kolejne jego przekroje obracają się względem osi nie podlegając deplanacji (*pozostają płaskie, a punkty przekroju leżące wzdłuż promienia pozostają współliniowe*). Opisuje to tzw. hipoteza płaskich przekrojów.



HIPOTEZA PŁASKICH PRZEKROJÓW

- Skręcenie jest równomierne wzdłuż długości pręta
- Przekrój poprzeczny pozostaje płaski
- Punkty leżące wzdłuż promienia pozostają współliniowe

Kąt odkształcenia postaciowego:

$$\gamma = \frac{\varphi}{l} \cdot r = \theta \cdot r$$

Naprężenia tnące:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot r$$

$$M_s = \int_A dM_s = \int_0^R \tau \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r = 2\pi G \theta \int_0^R r^3 dr = 2\pi G \theta \frac{1}{4} R^4$$

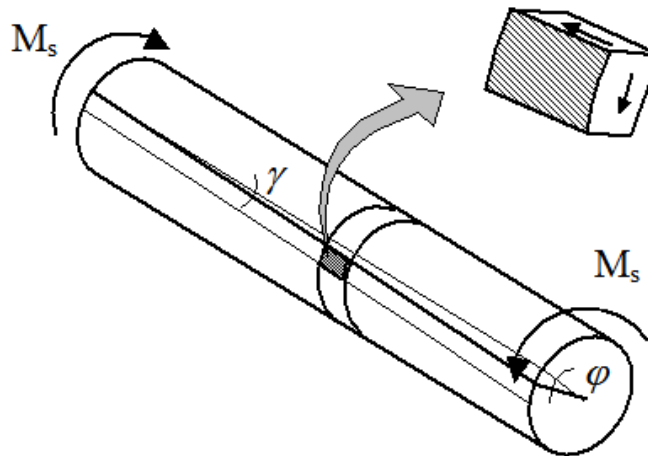
$$M_s = G \theta \frac{1}{2} \pi R^4 = G \theta \frac{1}{32} \pi D^4 = G \theta J_0 \rightarrow \theta = \frac{M_s}{GJ_0}$$

Jednostkowy kąt skręcenia

$$J_0 = \frac{\pi}{32} (D_z^4 - D_w^4)$$

Moment bezwładności na skręcanie pręta kołowego drążonego

Rozkład naprężeń tnących w przekroju



$$\tau = \gamma \cdot G = G \cdot \theta \cdot r = G \cdot \frac{M_s}{GJ_0} \cdot r$$

$$\tau = \frac{M_s \cdot r}{J_0}$$

Wartość naprężeń tnących w przekroju poprzecznym pręta kołowego zmienia się liniowo z promieniem r

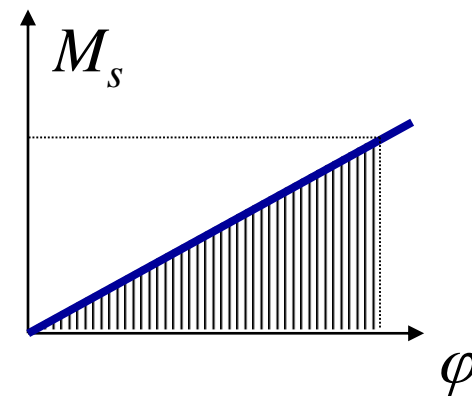
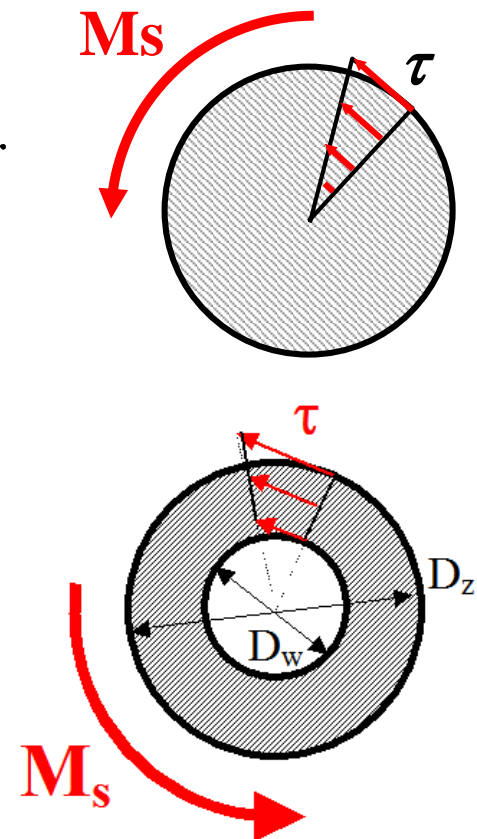
Względny kąt skręcenia względem przekroju x_0 wyznaczyć możemy przez scałkowanie wzdłuż długości pręta:

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \theta(x) dx$$

Energia sprężysta pręta skręcanego

$$U_{spr} = \frac{1}{2} M_s \cdot \varphi$$

$$U_{spr} = \frac{1}{2} M_s \cdot \frac{M_s l}{GJ_0} = \frac{1}{2} \frac{M_s^2 l}{GJ_0}$$

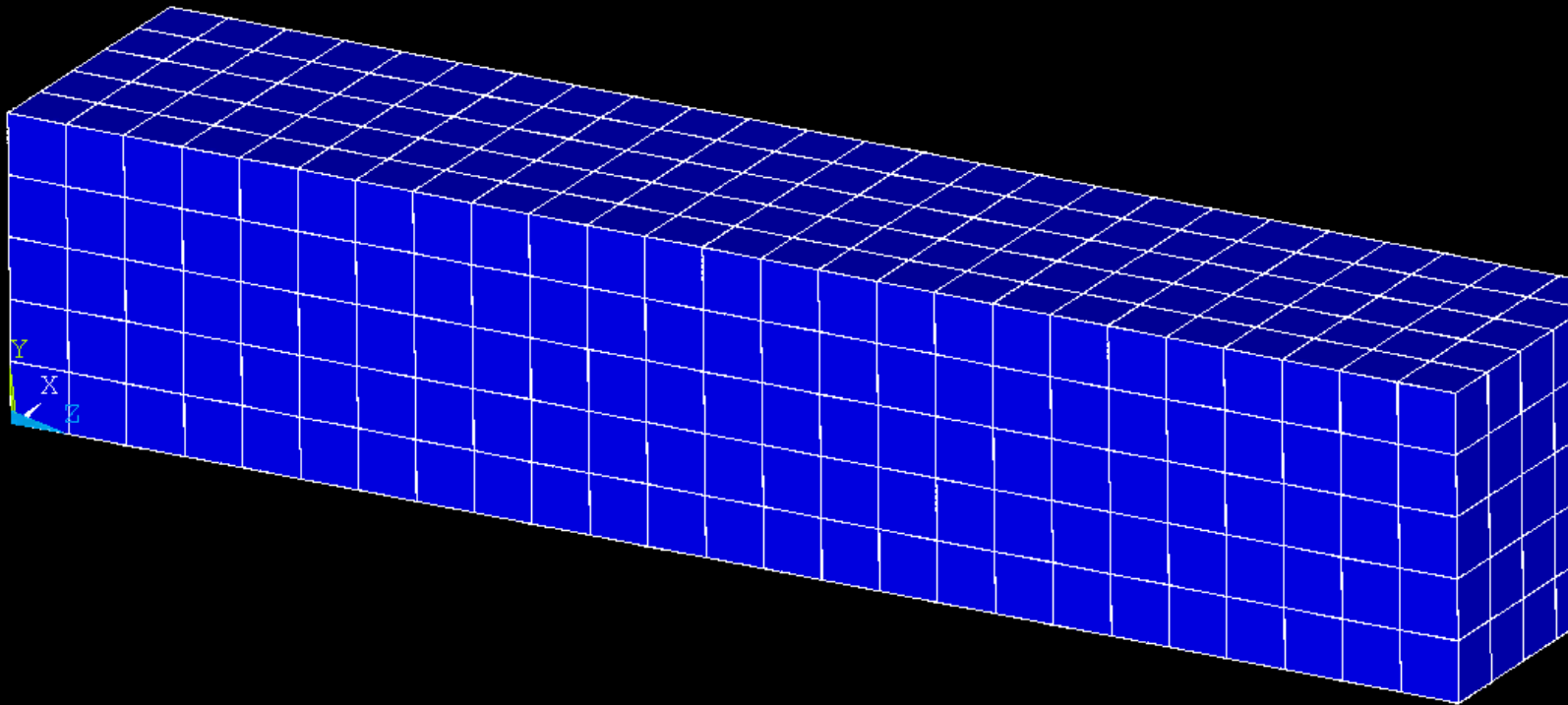


Skręcanie pręta o przekroju niekołowym

1
DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =1
TIME=1
DMX =.004079

ANSYS

APR 6 2009
09:05:52



Skręcanie pręta o przekroju niekołowym

1

DISPLACEMENT

STEP=1

SUB =1

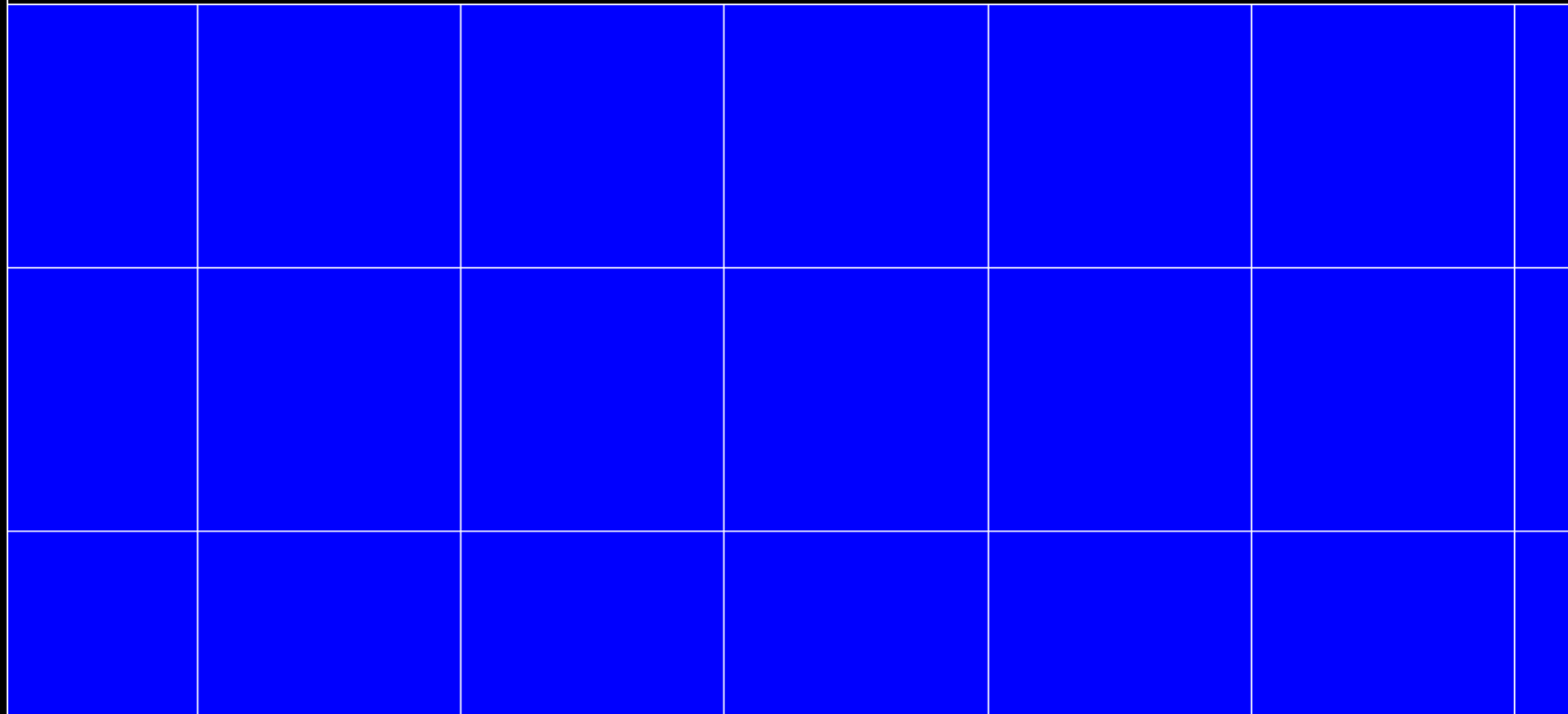
TIME=1

DMX =.004079

ANSYS

APR 6 2009

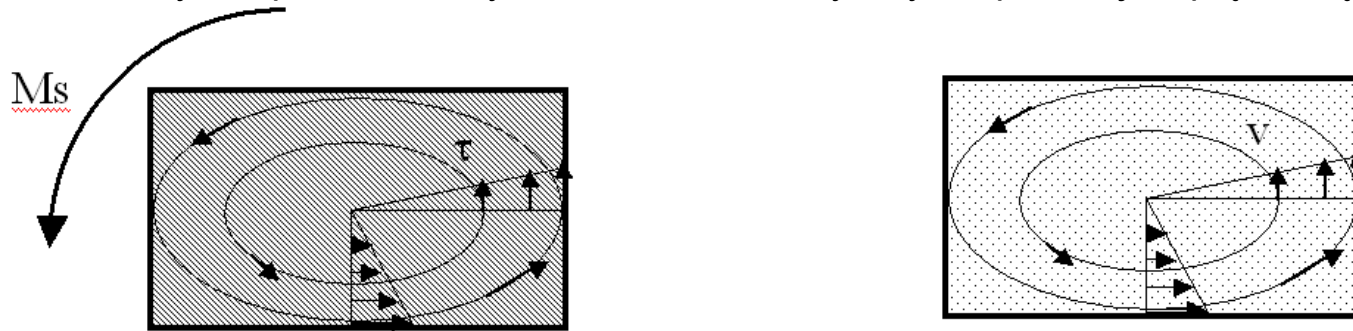
09:16:56



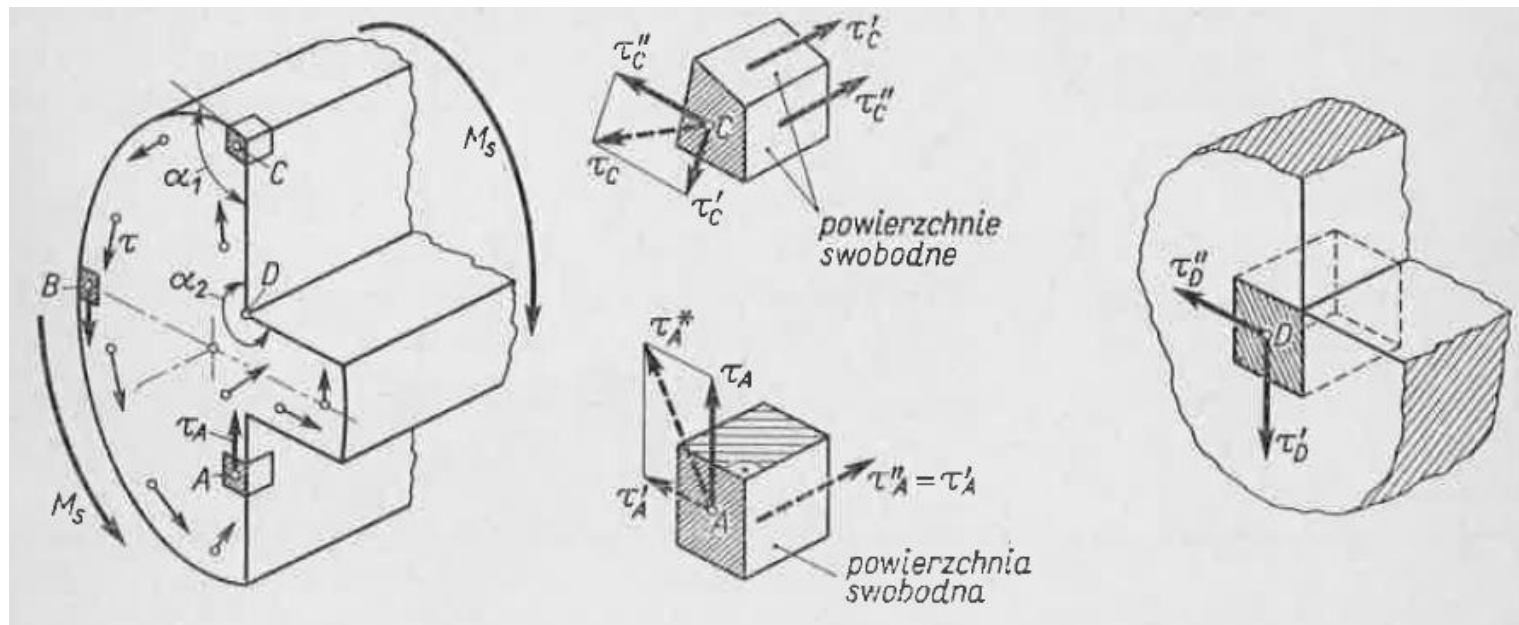
Skręcanie pręta o przekroju niekołowym

Skręcanie swobodne to taki przypadek skręcania, w którym istnieje pełna swoboda ewentualnej deplanacji przekroju, czego konsekwencją jest istnienie tylko naprężeń stycznych.

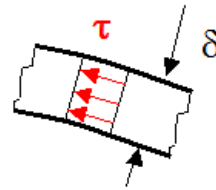
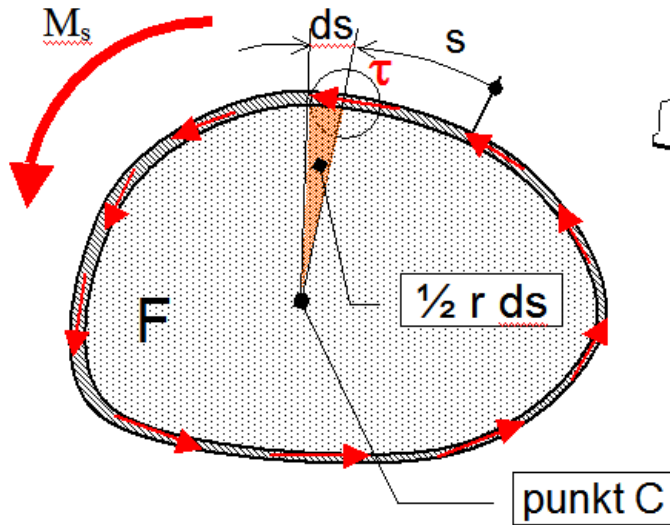
Dla przekroju o dowolnym kształcie rozkład naprężeń wykazuje analogię hydrodynamiczną, tzn. rozkład naprężeń tnących jest analogiczny do rozkładu prędkości cieczy nielepkiej i nieściśliwej krążącej ruchem ustalonym w płaskim naczyniu o kształcie identycznym z przekrojem pręta skręcanego.



Rys. 3.4. Obraz naprężeń przy skręcaniu i analogia hydrodynamiczna



Skręcanie rur cienkościennych



$$q = \tau \delta = \text{const}$$

Moment względem punktu C:

$$M_s = \oint q r ds = q \oint r ds = 2F q$$

F - pole

I wzór BREDTA

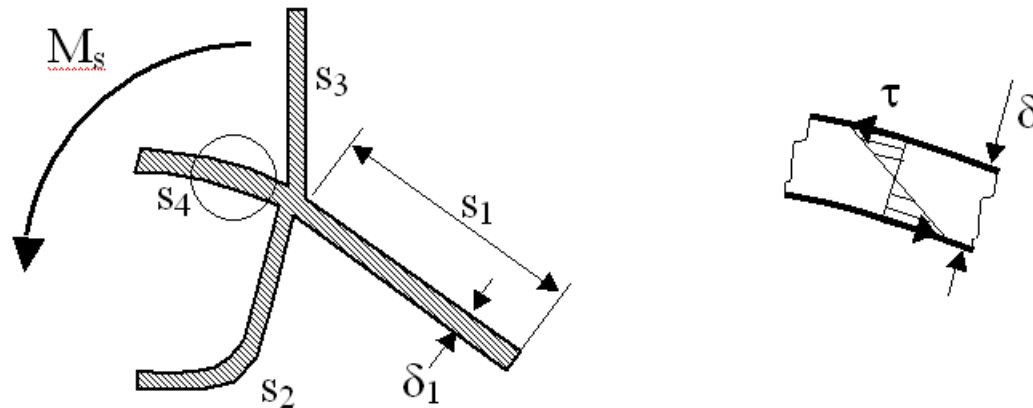
$$q(s) = \tau(s) \cdot \delta(s) = \frac{M_s}{2F} \quad \text{- stały wydatek naprężeń stycznych}$$

II wzór BREDTA

$$\theta(x) = \frac{M_s(x)}{4GF^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)} \quad \text{- jednostkowy kąt skręcenia}$$

Skęrcanie swobodne cienkościennego pręta o przekroju otwartym

Taki profil bardzo źle pracuje na skęrcanie swobodne (rys.3.7):



Rys. 3.7. Obraz pracy skęrcanego pręta cienkościennego o przekroju otwartym

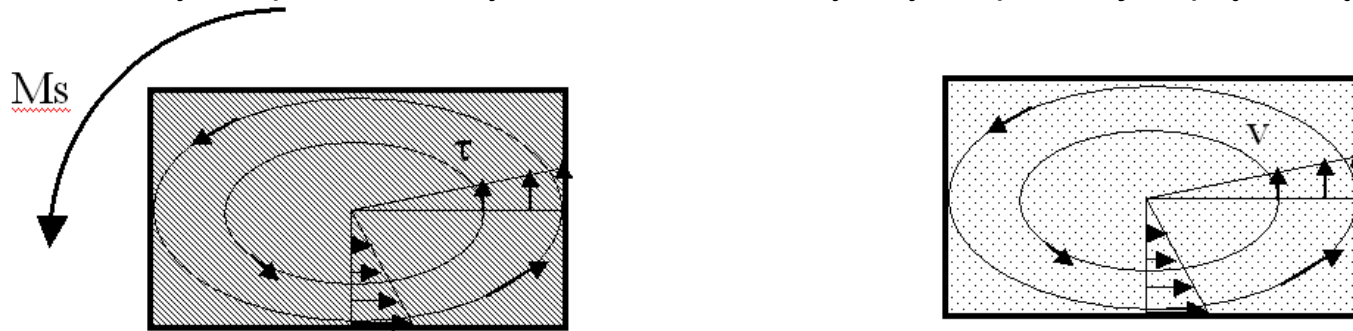
$$\tau_i = \frac{3M_s \cdot \delta_i}{\sum_i s_i \cdot \delta_i^3} \text{ - napręzenia maksymalne w odgaęzieniu,}$$

$$\theta(x) = \frac{3M_s(x)}{G \sum_i s_i \cdot \delta_i^3} \text{ - jednostkowy kąt skęrcenia}$$

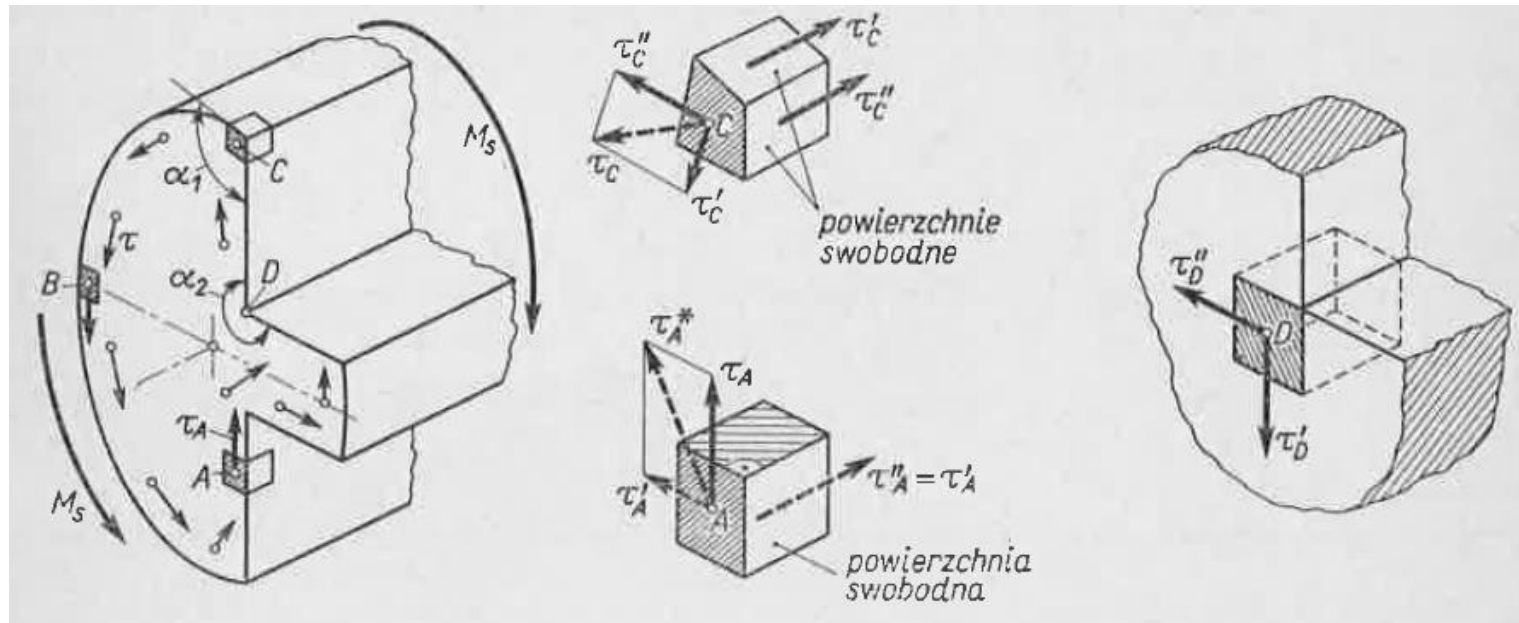
Skręcanie pręta o przekroju niekołowym

Skręcanie swobodne to taki przypadek skręcania, w którym istnieje pełna swoboda ewentualnej deplanacji przekroju, czego konsekwencją jest istnienie tylko naprężeń stycznych.

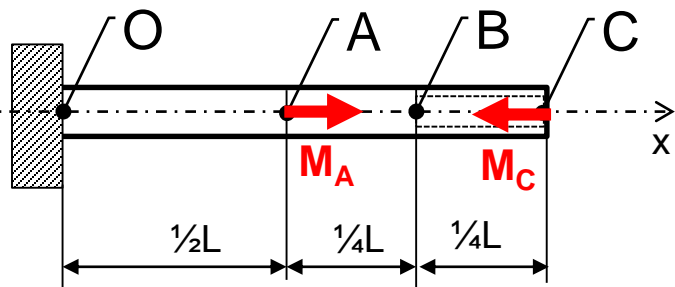
Dla przekroju o dowolnym kształcie rozkład naprężeń wykazuje analogię hydrodynamiczną, tzn. rozkład naprężeń tnących jest analogiczny do rozkładu prędkości cieczy nielepkiej i nieściśliwej krążącej ruchem ustalonym w płaskim naczyniu o kształcie identycznym z przekrojem pręta skręcanego.



Rys. 3.4. Obraz naprężeń przy skręcaniu i analogia hydrodynamiczna

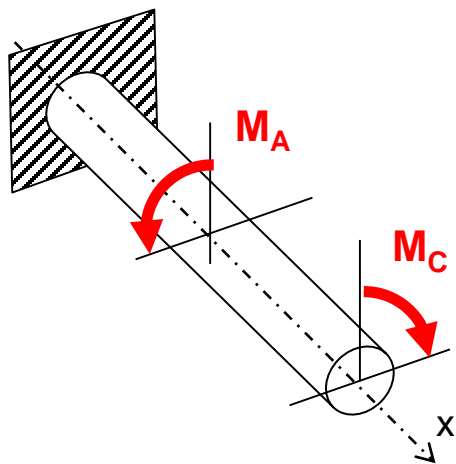
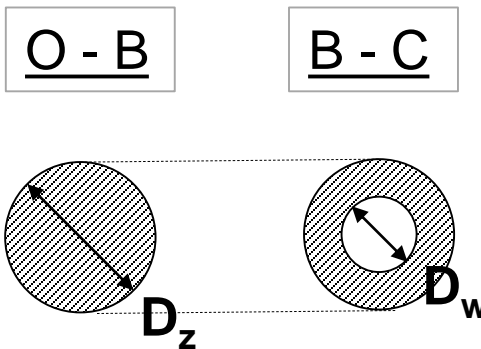


Zadanie 8.1 Skręcanie pręta o przekroju kołowym



$$\begin{aligned} D_z &= 8 \text{ cm} \\ D_w &= 5 \text{ cm} \\ L &= 2 \text{ m} \\ E &= 7 \cdot 10^4 \text{ MPa} \\ \nu &= 0.35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_A &= 3 \cdot M^* \\ M_C &= M^* = 5 \text{ kNm} \end{aligned}$$



Wyznaczyć:

$M_s(x) = ?$ - rozkład momentu skręcającego

$\tau_{\max}(x) = ?$ - rozkład maksymalnego naprężenia tnącego

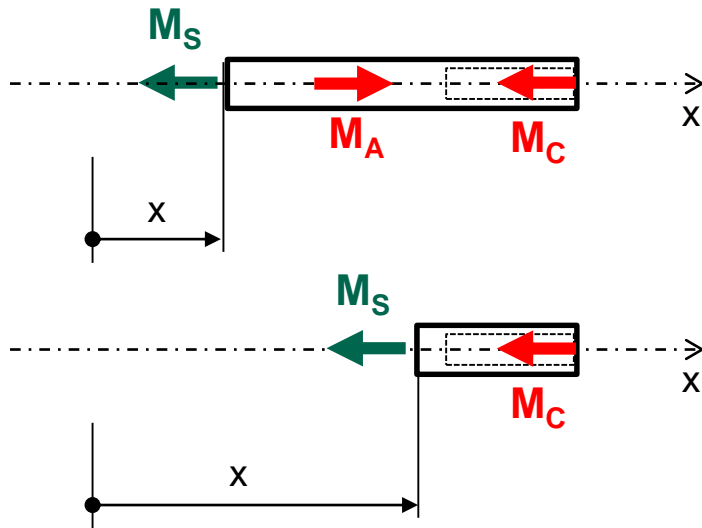
$\theta(x) = ?$ - rozkład jednostkowego kąta skręcenia

$\varphi(x) = ?$ - rozkład kąta skręcenia wzdłuż długości pręta

0. Wyliczenie Modułu Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 2.6 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

1. Rozkłady sił wewnętrznych



Przecinamy myślowo w przedziale O-A

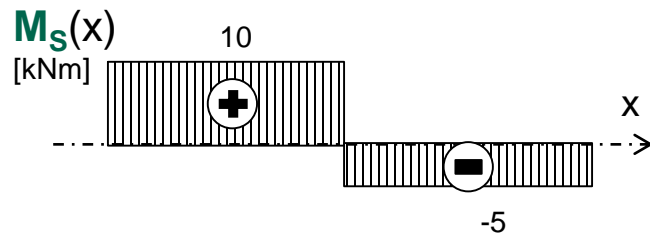
Równanie równowagi momentów względem osi x:

$$-M_S + M_A - M_C = 0 \rightarrow M_S = M_A - M_C = 10 \text{ kNm}$$

Przecinamy myślowo w przedziale A-C

Równanie równowagi momentów względem osi x:

$$-M_S - M_C = 0 \rightarrow M_S = -M_C = -5 \text{ kNm}$$



2. Charakterystyki geometryczne przekrojów

Charakterystyki geometryczne przekroju w przedziale O-B

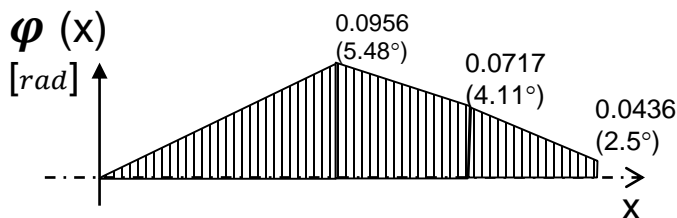
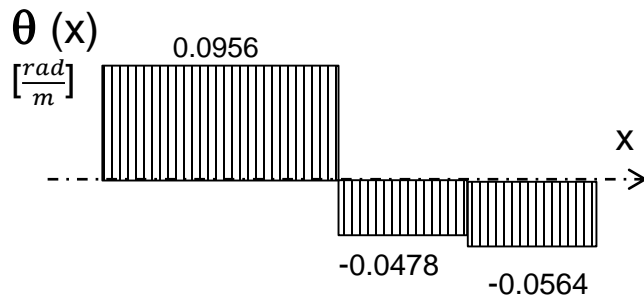
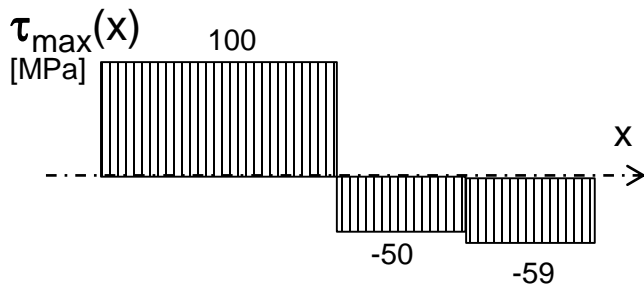
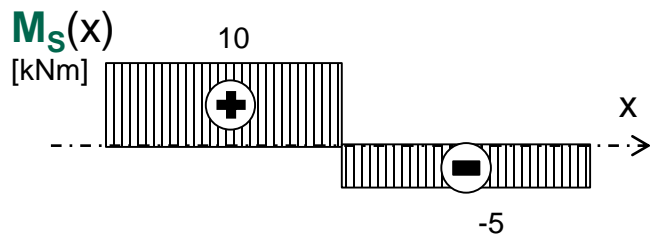
$$J_o = \frac{\pi}{32} D_Z^4 = \frac{\pi}{32} 8^4 \approx 402 \text{ cm}^4 - \text{moment bezwładności na skręcanie}$$

$$w_o = \frac{J_o}{r_{max}} = \frac{402}{4} \approx 100 \text{ cm}^3 - \text{wskaźnik wytrzymałości na skręcanie}$$

Charakterystyki geometryczne przekroju w przedziale B-C

$$J_o = \frac{\pi}{32} (D_Z^4 - D_w^4) = \frac{\pi}{32} (8^4 - 5^4) \approx 340 \text{ cm}^4 - \text{moment bezwładności na skręcanie}$$

$$w_o = \frac{J_o}{r_{max}} = \frac{341}{4} \approx 85 \text{ cm}^3 - \text{wskaźnik wytrzymałości na skręcanie}$$



3. Rozkłady maksymalnego naprężenia tnącego

Maksymalne naprężenia tnące dla przekrojów w przedziale O-A

$$\tau_{\max} = \frac{M_S}{W_0} = \frac{10000 \text{ Nm}}{100 \text{ cm}^3} \approx 100 \text{ MPa}$$

Maksymalne naprężenia tnące dla przekrojów w przedziale A-B

$$\tau_{\max} = \frac{M_S}{W_0} = \frac{-5000 \text{ Nm}}{100 \text{ cm}^3} \approx -50 \text{ MPa}$$

Maksymalne naprężenia tnące dla przekrojów w przedziale B-C

$$\tau_{\max} = \frac{M_S}{W_0} = \frac{-5000 \text{ Nm}}{85 \text{ cm}^3} \approx -59 \text{ MPa}$$

4. Rozkłady jednostkowego kąta skręcenia

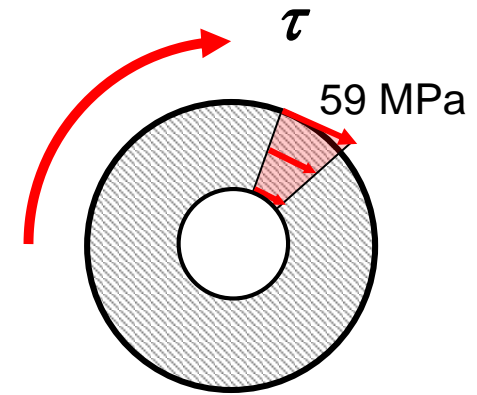
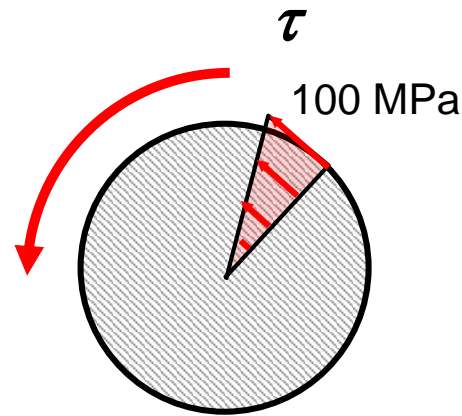
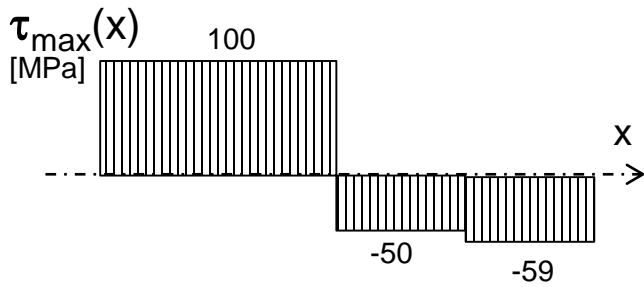
$$\underline{\text{O-A:}} \quad \theta(x) = \frac{M_S(x)}{GJ_0} = \frac{10000 \text{ Nm}}{2.6 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 402 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \approx 0.0956 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\underline{\text{A-B:}} \quad \theta(x) = \frac{M_S(x)}{GJ_0} = \frac{-5000 \text{ Nm}}{2.6 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 402 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \approx -0.0478 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

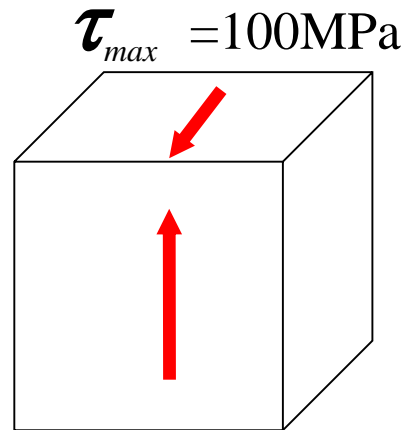
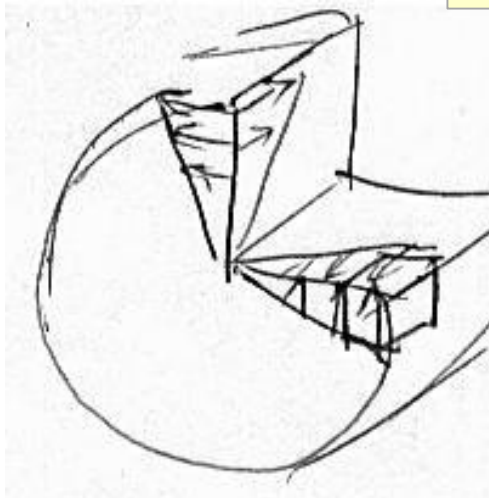
$$\underline{\text{B-C:}} \quad \theta(x) = \frac{M_S(x)}{GJ_0} = \frac{-5000 \text{ Nm}}{2.6 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 341 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \approx -0.0564 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

5. Względny kąt skręcenia

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \theta(x) dx$$



6. Naprężenia zredukowane:



1) Według Hipotezy Treski

$$\sigma_{red}^T = 2 \cdot \tau_{max} = 200 \text{ MPa}$$

2) Według Hipotezy Hubera

$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\sigma_{red}^H = \sqrt{3} \cdot \tau_{max} = 173 \text{ MPa}$$