

DRGANIA

Informacja o drganiach nieliniowych,
parametrycznych i samowzbudnych

Drgania nieliniowe układów o jednym stopniu swobody

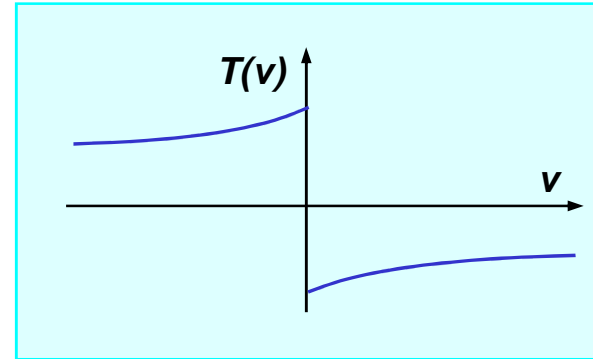
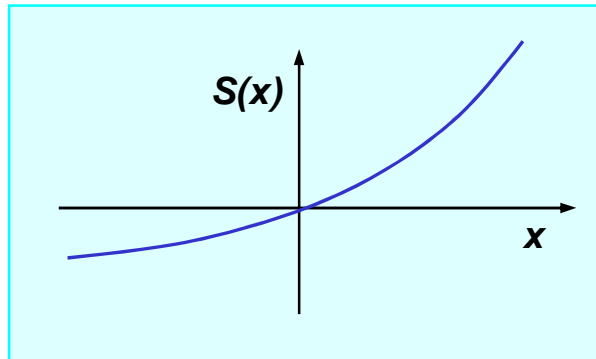
Drgania nieliniowe - wprowadzenie

Pod pojęciem drgań nieliniowych rozumiemy drgania opisane pewnym równaniem nieliniowym, na przykład

$$m\ddot{x} + T(\dot{x}) + S(x) = 0$$

gdzie $S(x)$ jest nieliniową siłą sprężystą, zaś $T(v)$ jest tłumieniem zależnym nieliniowo od prędkości (np. tarciem suchym).

Przykładowe charakterystyki siły sprężystej i tłumienia przedstawione są na rysunkach

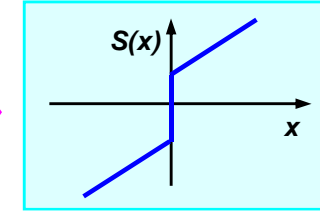
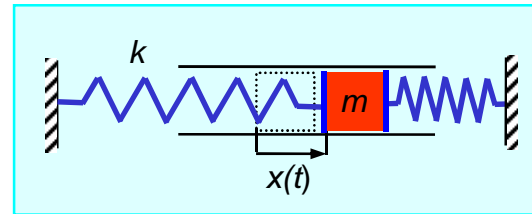
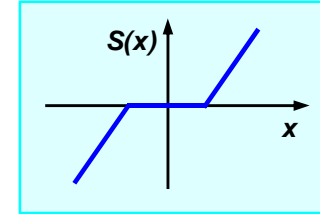
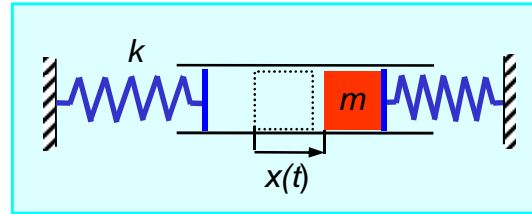


W układzie występuje silna nieliniowość - nieciągłość $T(v)$ dla $v = 0$.

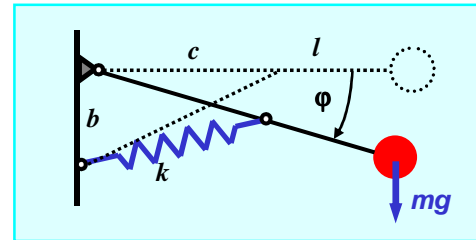
Równanie powyższe opisuje drgania swobodne układu z nieliniową charakterystyką sprężystą i tarciem suchym.

Źródła nieliniowości mogą być rozmaite:

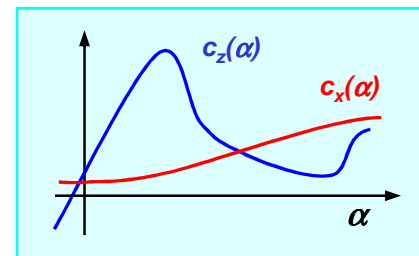
- nieliniowe charakterystyki sprężyste,
- luzy występujące w układzie,
- nieliniowe charakterystyki tłumienia,
- napięcie wstępne elementów sprężystych,



- nieliniowa geometria układu,



- siły zewnętrzne zależne nieliniowo od ruchu układu (np. siły aerodynamiczne),



$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S c_z(\alpha)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S c_x(\alpha)$$

- i wiele innych...

Wszystkie pojęcia zdefiniowane dla drgań liniowych stosują się do drgań nieliniowych, w szczególności: częstość, częstotliwość i okres drgań, amplituda i faza.

Podobnie jak drgania liniowe, drgania nieliniowe mogą być swobodne bądź wymuszone; tłumione lub nie tłumione.

W drganiach nieliniowych spotyka się też wszystkie zjawiska występujące w drganiach liniowych: np. tłumienie, rezonans.

Drgania nieliniowe cechują się jednak bogactwem zjawisk nie spotykanym w drganiach liniowych:

- częstość drgań może zależeć od amplitudy,
- mogą wystąpić różne rodzaje stanów równowagi układu,
- występują przeskoki amplitudy,
- istnieje jakościowa zależność ruchu od warunków początkowych,
- możliwe są drgania o skończonym czasie trwania,
- ... a w końcu mogą pojawić się **drgania chaotyczne (!)**

UWAGA! Dla układów nieliniowych nie obowiązuje zasada superpozycji.

Równanie drgań nieliniowych ma zazwyczaj postać w której bezwładność jest liniową funkcją przyspieszenia

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \quad (2.2.1.2)$$

Klasyfikację drgań można przeprowadzić przedstawiając równanie drgań nieliniowych w następującej postaci

$$m\ddot{x} + S(x) = Q(x, \dot{x}) + P(t) \quad (2.2.1.4)$$

gdzie: $S(x)$ jest nieliniową siłą zachowawczą,
 $Q(x, \dot{x})$ jest nieliniową siłą niezachowawczą,
 $P(t)$ jest siłą wymuszającą zależną od czasu.

Równanie (2.2.1.4) można przedstawić w postaci energetycznej

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{dE}{dt} = v Q(x, v)$$

Znak wyrażenia $vQ(x, v)$ decyduje o tym, czy energia jest odbierana czy doprowadzana do układu.

- Jeżeli $vQ(x, v) = 0$ na całej płaszczyźnie fazowej (x, v) to energia układu jest zachowana i nazywa się go **układem zachowawczym**.
- Jeżeli $vQ(x, v) < 0$ na całej płaszczyźnie fazowej (x, v) to układ rozprasza energię i nazywa się go **układem dysypatywnym**.
- Jeżeli $vQ(x, v) > 0$ w niektórych obszarach płaszczyzny fazowej (x, v) , zaś w innych $vQ(x, v) < 0$ to mamy **układ samowzbudny**.

Układy dysypatywne i samowzbudne są **układami niezachowawczymi**.

Równanie Rayleigha drgań samowzbudnych z tłumieniem nieliniowym

$$\ddot{x} + (-A\dot{x} + B\dot{x}^3) + \omega_0^2 x = 0$$

- przy małych prędkościach tłumienie jest ujemne, energia jest doprowadzana do układu i amplituda drgań rośnie,
- przy prędkościach większych tłumienie jest dodatnie, energia jest odprowadzana z układu i amplituda drgań maleje.

Linearyzacja równania w otoczeniu położenia równowagi

Nieliniowe równanie drgań w wielu przypadkach może być zastąpione równoważnym równaniem liniowym.

Osiąga się to najczęściej poprzez linearyzację równania nieliniowego **w otoczeniu pewnego położenia równowagi**.

Rozważmy równanie nieliniowe

$$\ddot{x} + s(x) = 0$$

gdzie $s(x)$ jest nieliniową siłą sprężystą, $s(0) = 0$.

Rozwijamy funkcję $s(x)$ w szereg Taylora w otoczeniu $x_0 = 0$

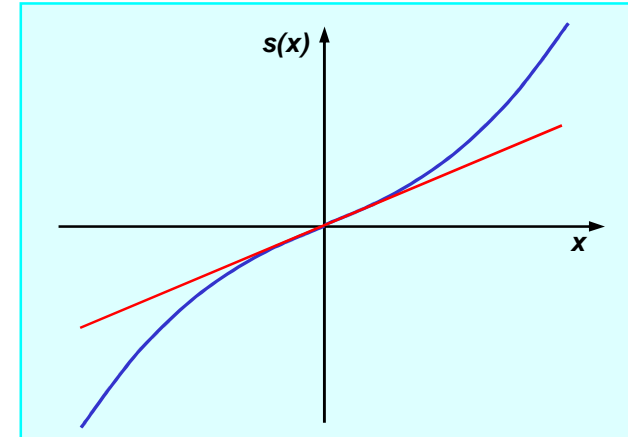
$$s(x_0 + \Delta x) = s(x_0) + \left. \frac{ds}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \dots$$

Jeżeli oznaczymy $s'(0) = \omega_0^2$ oraz zdefiniujemy nową zmienną

$$\xi = \Delta x = x - x_0$$

to otrzymamy równanie zlinearyzowane wokół położenia równowagi

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$$



Drgania opisane równaniem zlinearyzowanym

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$$

w pewnym otoczeniu punktu równowagi x_0

$$|\xi - x_0| < x_L$$

różnią się „mało” od drgań opisanych równaniem nieliniowym,

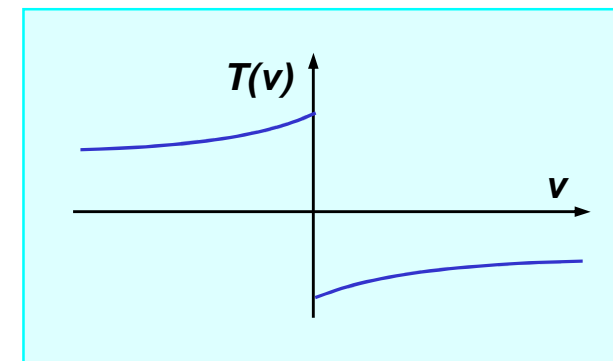
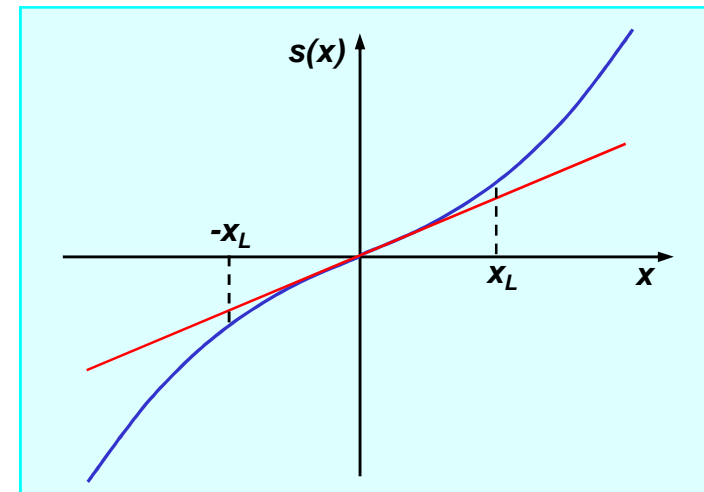
$$|\xi(t) - x(t)| < \delta, \quad t > t_0$$

Takie drgania nazywamy **małymi drganiami układu** w otoczeniu punktu równowagi.

Wartość x_L nie jest określona ściśle; przyjmuje się na ogół, że różnica δ nie powinna przekraczać kilku procent amplitudy drgań układu nieliniowego.

UWAGA! Nie każde równanie można sensownie zlinearyzować!

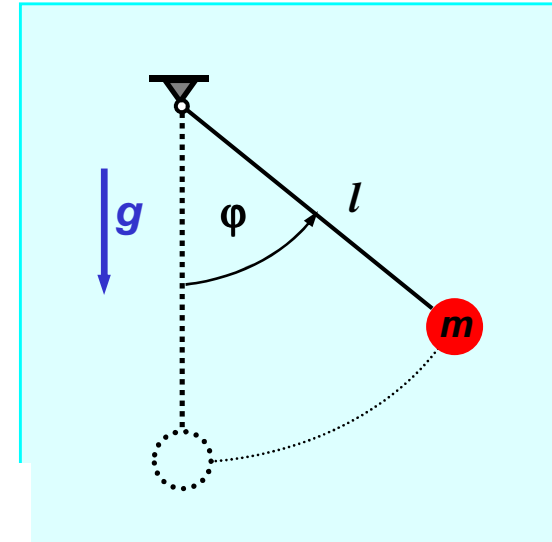
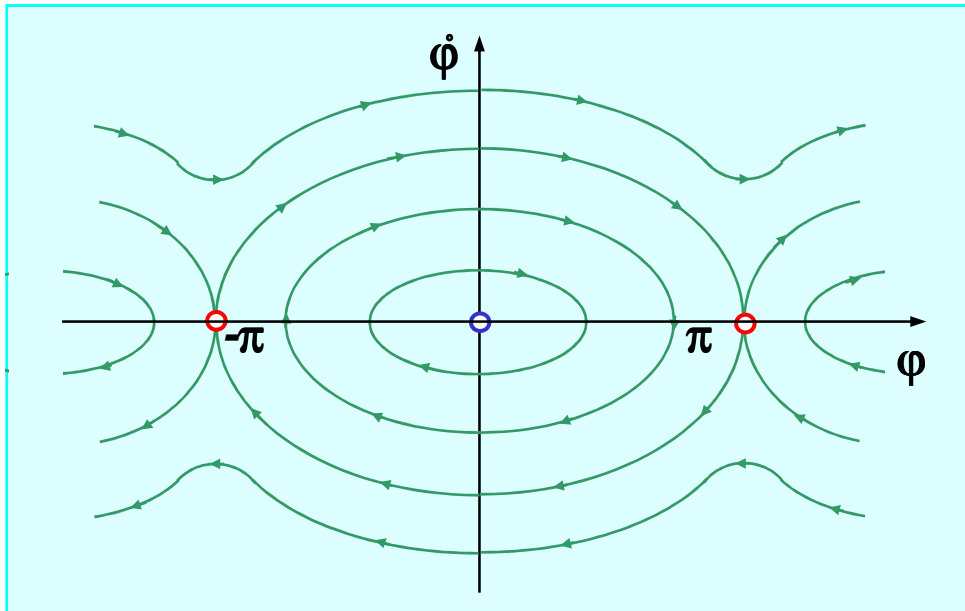
- charakterystyka może być nieciągła,
- równanie zlinearyzowane może mieć zupełnie inne własności, niż wyjściowe równanie nieliniowe.



Wahadło matematyczne - stateczne i niestateczne punkty równowagi

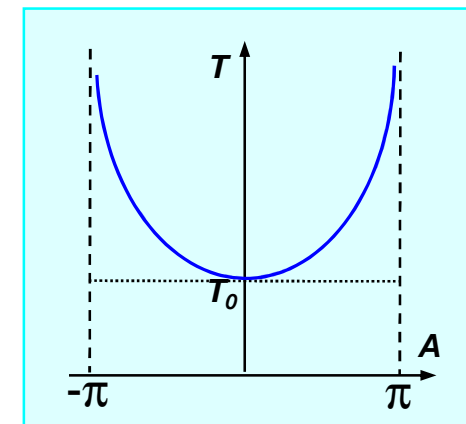
$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0$$

Trajektorie fazowe wahadła $\omega(\varphi)$



Własności drgań wahadła nieliniowego

- dolne położenie równowagi $\varphi = 0$ jest stateczne,
- górne położenie równowagi $\varphi = \pm\pi$ jest niestateczne,
- okres drgań zależy od amplitudy - rośnie z jej wzrostem.



Drgania nieliniowe swobodne nietłumione

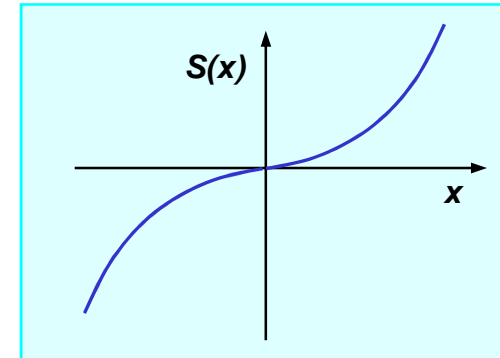
Równanie drgań z nieliniową charakterystyką sprężystą

$$\ddot{x} + s(x) = 0$$

$s(x)$ - nieliniowa charakterystyka sprężysta;

Energia potencjalna nieliniowej siły sprężystej wyraża się całką

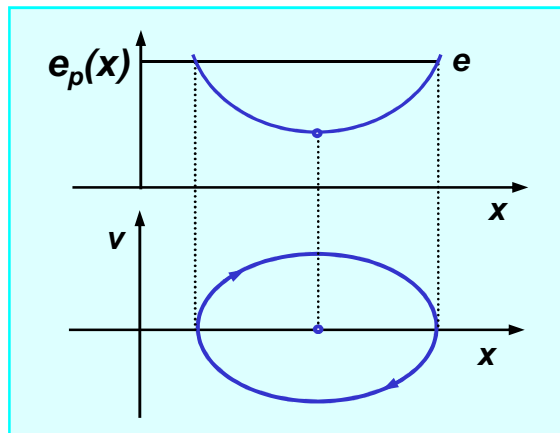
$$e_p(x) = \int_0^x s(\xi) d\xi$$



Punkty osoblive trajektorii fazowych $v(x)$ określone są równaniem

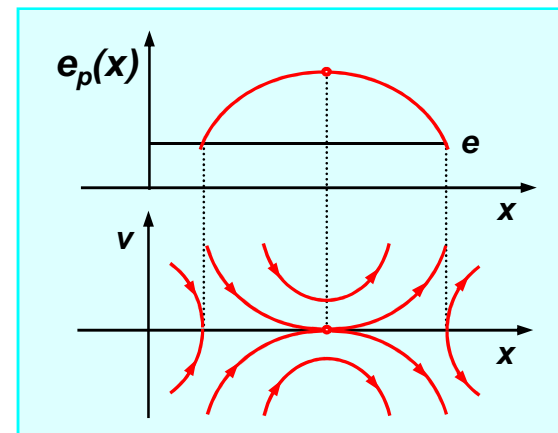
$$\frac{de_p}{dx} = s(x) = 0$$

Punkty osoblive trajektorii mogą być stateczne lub niestateczne.



Centrum
(stateczny)

Siodło
(niestateczny)



Masa na sprężynie nieliniowej - drgania złożone

$$\ddot{x} + s(x) = 0$$

$$s(x) = \omega_0^2 x + \mu x^3$$

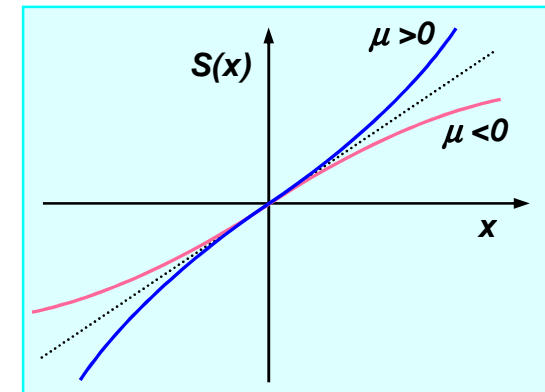
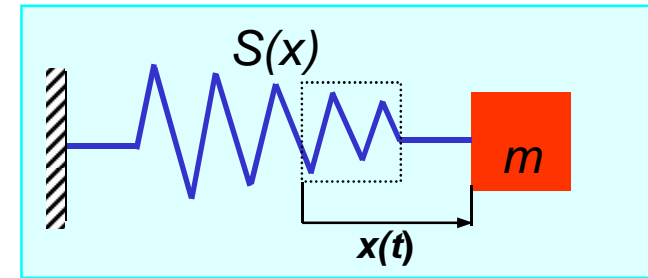
- gdy $\mu > 0$ charakterystyka jest „twarda”,
- gdy $\mu < 0$ charakterystyka jest „mięka”,

Rozwiązanie ścisłe (ciąg nieskończony)

$$x(t) = \left(A - \frac{\mu}{32\omega^2}\right) \cos \omega t + \frac{\mu}{32\omega^2} A^3 \cos 3\omega t + C_5 \cos 5\omega t + \dots$$

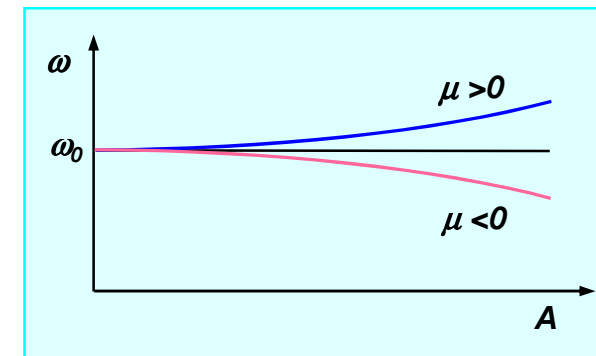
Częstość drgań jest w przybliżeniu równa

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + \frac{3}{4} \mu A^2$$



Własności drgań z nieliniową charakterystyką sprężystą:

- drgania są złożone - występują w nich składniki z wielokrotnością częstości podstawowej,
- częstość drgań zależy od amplitudy,
- przy charakterystyce twardej częstość drgań rośnie z amplitudą, zaś przy miękkiej - maleje.

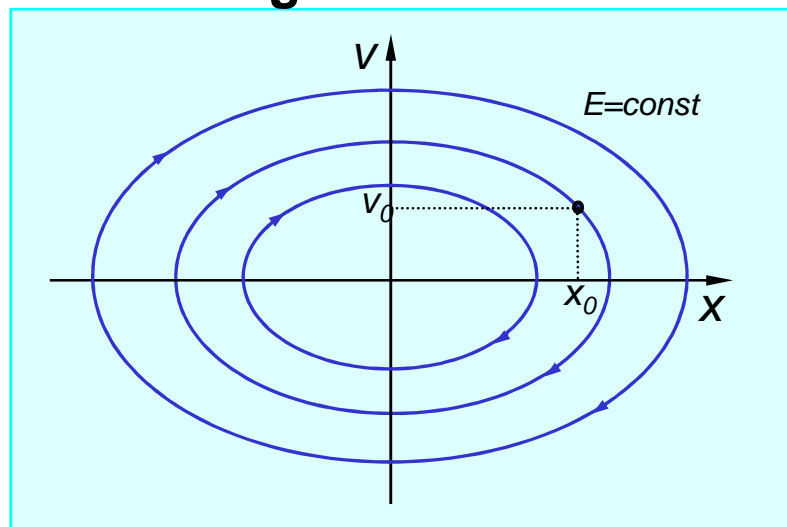


Porównanie trajektorii fazowych drgań liniowych i nieliniowych

Trajektorie fazowe ruchu (np. drgań) są liniami na płaszczyźnie x, v które:

- obrazują stan układu (x, v) w kolejnych chwilach czasu,
- okrążają punkt równowagi $x=0, v=0$,
- są zamknięte gdy układ wykonuje ruch okresowy.

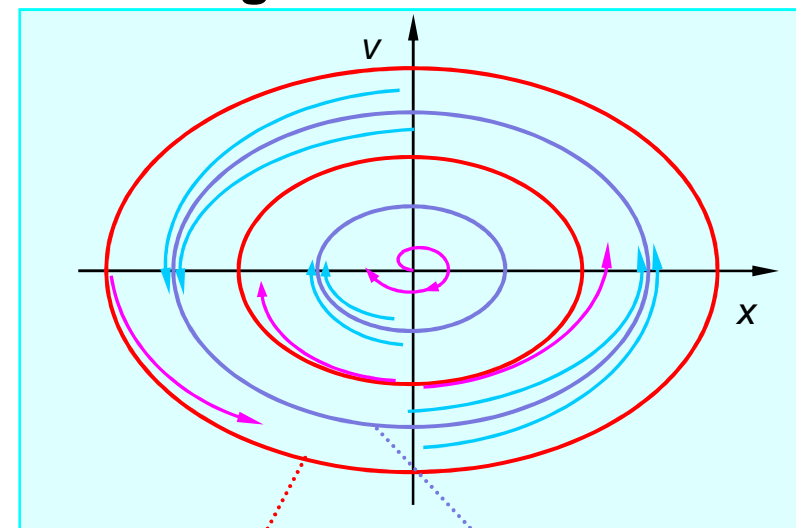
Drgania liniowe



Trajektorie fazowe drgań liniowych:

- są jednoznacznie określone warunkami początkowymi,
- są **stateczne**.

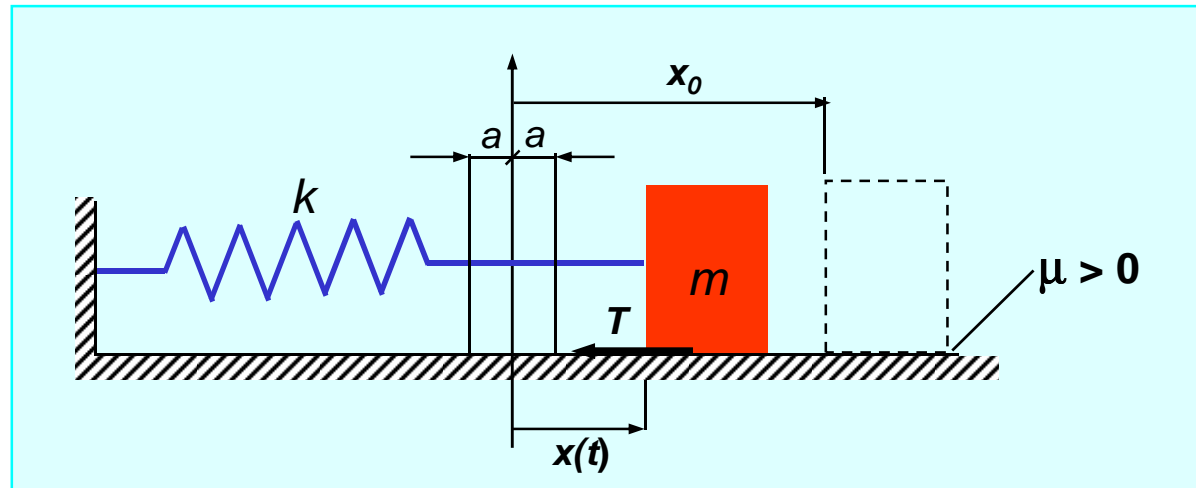
Drgania nieliniowe



Trajektorie fazowe drgań nieliniowych:

- mogą być zarówno **stateczne**, jak i **niestateczne**,
- nie zależą jednoznacznie od warunków początkowych,
- realizują się tylko trajektorie stateczne.

Drgania nieliniowe tłumione tarciem suchym

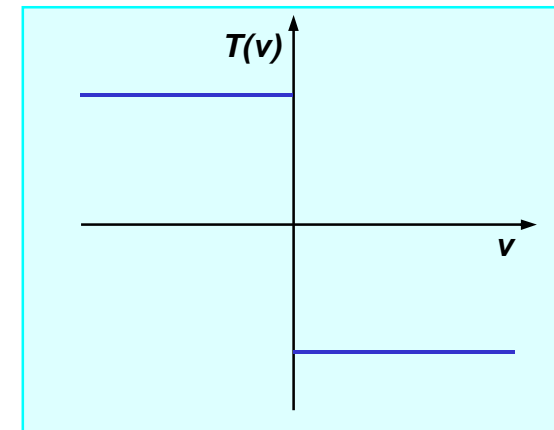


$$T = \begin{cases} -\mu mg & \text{dla } \dot{x} > 0 \\ +\mu mg & \text{dla } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2.2.3.1)$$

Tarcie suche wprowadza silną nieliniowość \Rightarrow

Strefa nieczułości a jest równa

$$a = \frac{\mu mg}{k} \quad (2.2.3.2)$$



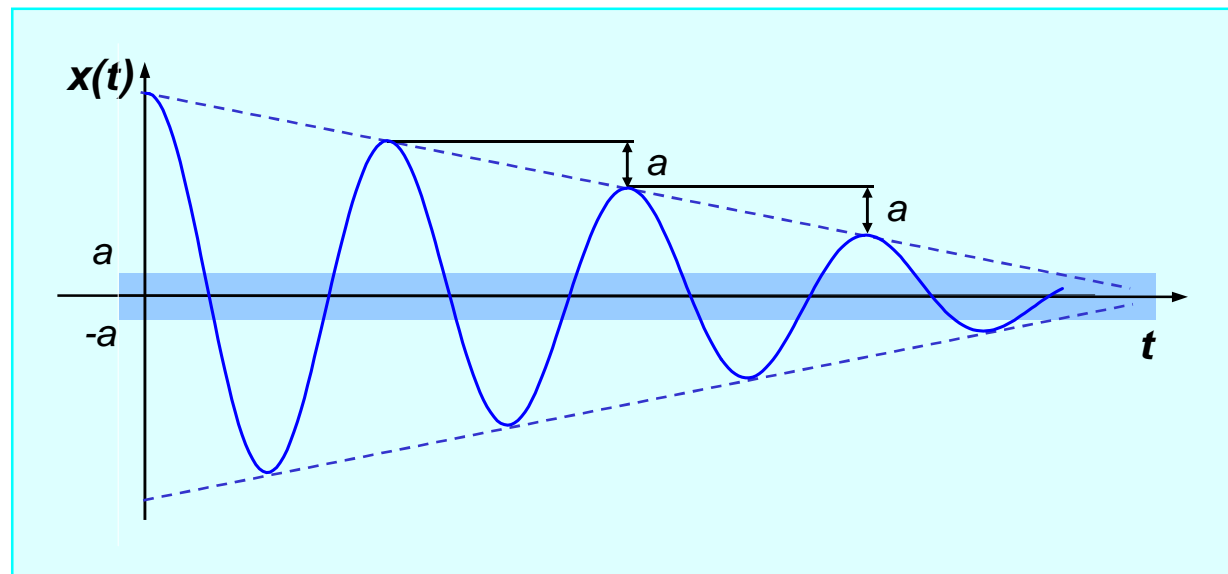
Przy małych wychyleniach masy tarcie równoważy siłę sprężystości, więc
ruch nie wystąpi gdy $|x| < a$.

Ruch masy w lewo opisany jest równaniem

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg = -k(x - a) \quad \text{dla } \dot{x} < 0 \quad (2.2.3.4)$$

Ruch masy w prawo opisany jest równaniem

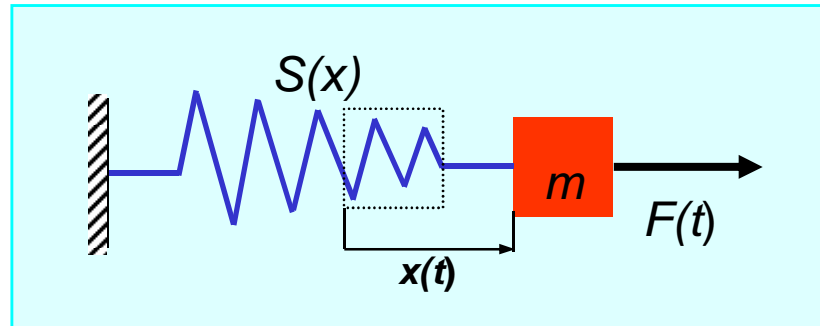
$$m\ddot{x} = -kx - \mu mg = -k(x + a) \quad \text{dla } \dot{x} > 0 \quad (2.2.3.9)$$



Własności drgań tłumionych tarciem suchym:

- częstość drgań jest równa częstości drgań nietłumionych,
- amplituda drgań maleje liniowo (o $2a$ w każdym okresie),
- czas trwania ruchu jest skończony.

Drgania nieliniowe wymuszone nietłumione



$$s(x) = \omega_0^2 x + \mu x^3 \quad (2.2.4.1)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = f_0 \sin(\Omega t) \quad (2.2.4.2)$$

Rozwiązanie przybliżone ma postać

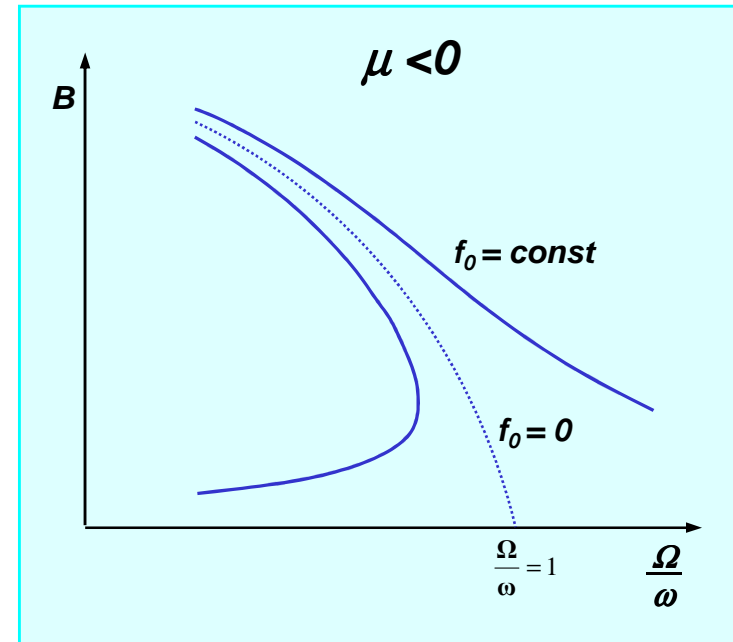
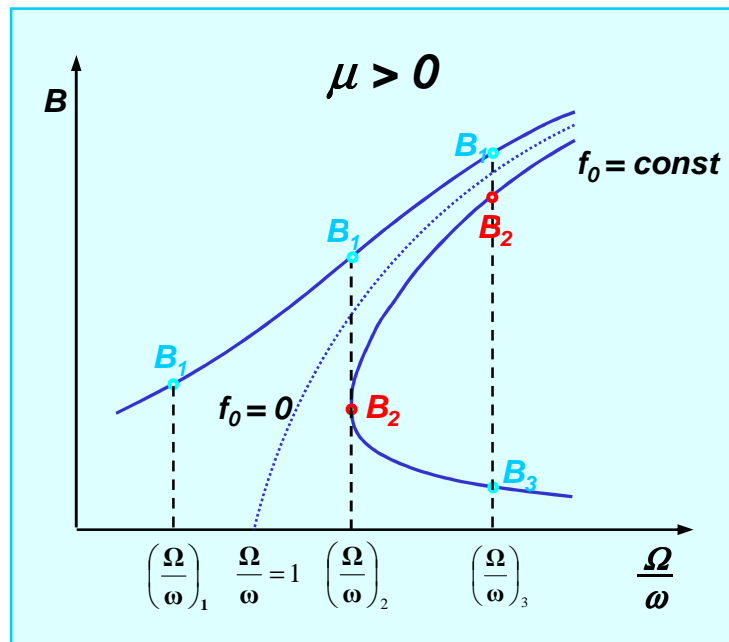
$$x(t) \approx B \sin \Omega t \quad (2.2.4.3)$$

Amplituda B spełnia równanie trzeciego stopnia

$$\frac{\mu f_0}{\omega^2} - \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)B + \frac{3\mu f_0}{4\omega^2} B^3 = 0 \quad (2.2.4.6)$$

$$\frac{\mu f_0}{\omega^2} - \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)B + \frac{3\mu f_0}{4\omega^2}B^3 = 0 \quad (2.2.4.6)$$

W zależności od współczynników tego równania istnieją: jedna, dwie lub trzy (rzeczywiste) wartości amplitudy drgań wymuszonych, B_1 , B_2 , B_3



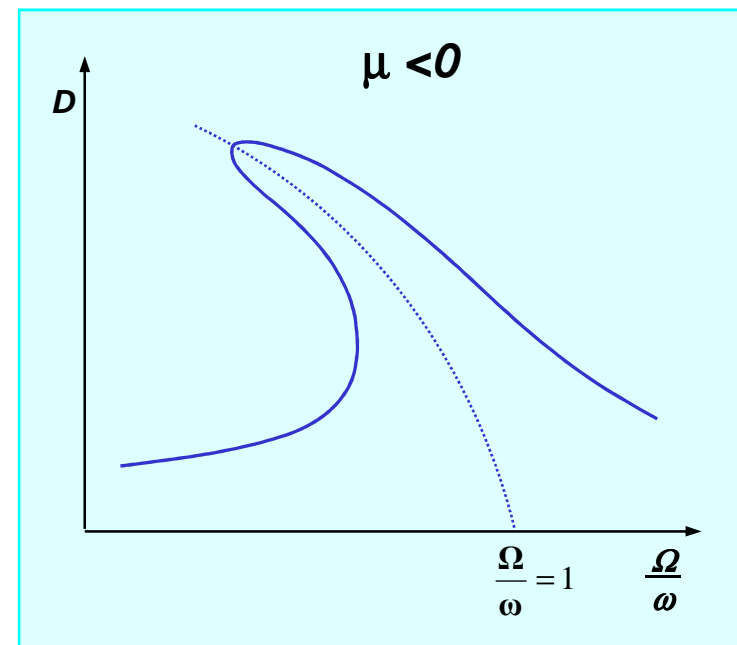
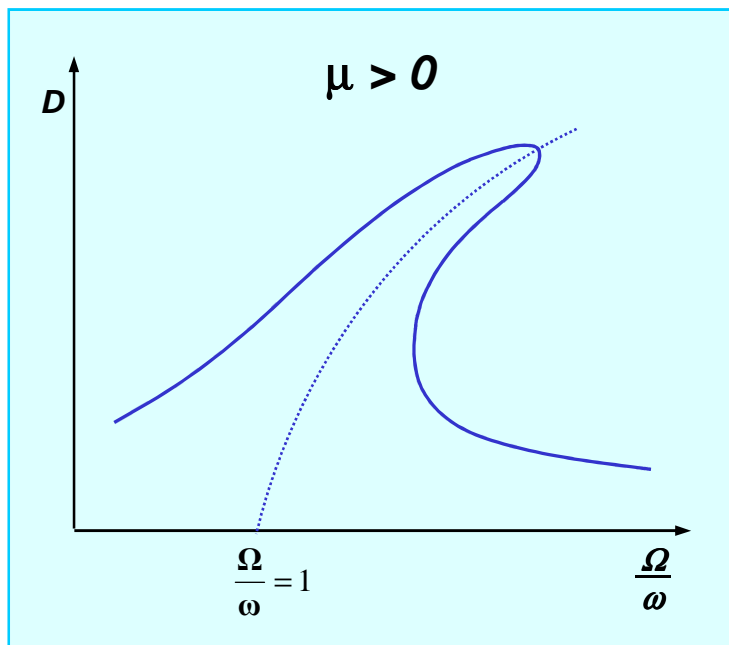
W układzie nieliniowym możliwe są drgania ustalone o różnych amplitudach (przy tej samej częstotliwości wymuszenia)

Drgania nieliniowe wymuszone tłumione

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = f_0 \sin(\Omega t) \quad (2.2.5.1)$$

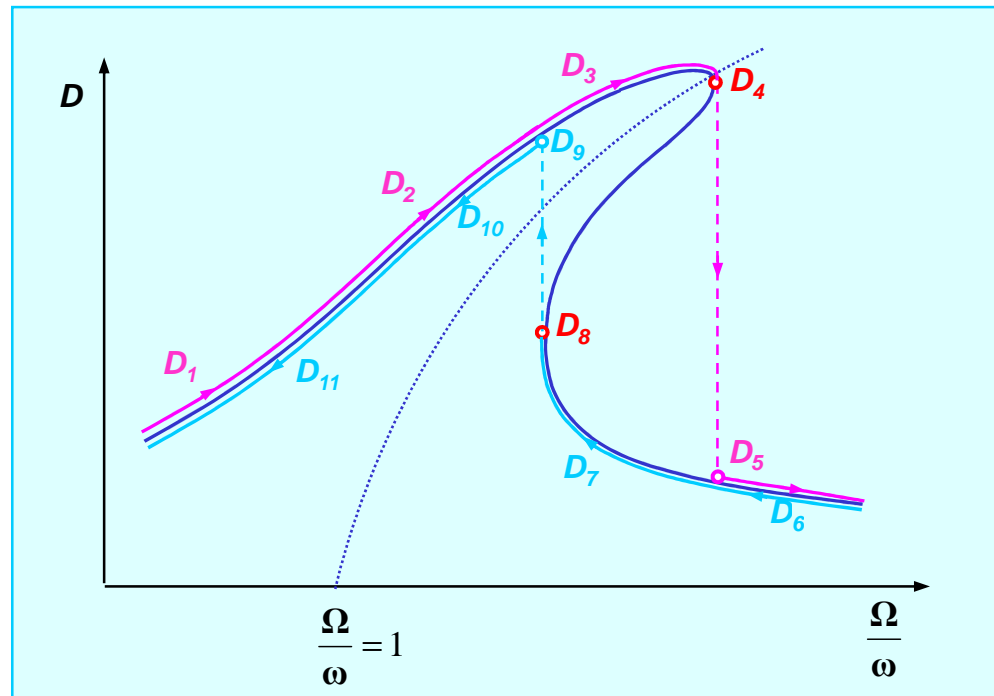
Rozwiązanie przybliżone ma postać

$$x(t) = D \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2.2.5.2)$$



- amplitudy drgań są ograniczone,
- występuje przesunięcie fazowe drgań w stosunku do siły wymuszającej.

Zjawisko przeskoku amplitudy



- Przy zwiększaniu częstości wymuszenia amplitudy rosną do wartości D_4 .
- Przy dalszym zwiększaniu częstości następuje **skokowy spadek** amplitudy do wartości D_5 - jest to **zjawisko przeskoku**.
- Przy zmniejszaniu częstości wymuszenia amplitudy rosną do wartości D_8 .
- Przy dalszym zmniejszaniu częstości następuje **skokowy wzrost** amplitudy do wartości D_9 - jest to również **zjawisko przeskoku**.
- Drgania z amplitudami na łuku $D_4 - D_8$ są niestateczne.

Drgania nieliniowe – bogactwo zjawisk ...

- Drgania mogą być złożone - występują w nich składniki z wielokrotnością częstości podstawowej.
- Częstość (a więc i okres) drgań nieliniowych może zależeć od amplitudy drgań.
- Drgania mogą zaniknąć po skończonym czasie.
- Może istnieć wiele punktów równowagi.
- Punkty równowagi mogą być stateczne lub niestateczne.
- Przy danej częstości wymuszenia układ może drgać z różnymi amplitudami.
- W trakcie drgań mogą występować nagłe zmiany amplitudy - przeskokki.
- Mogą występować cykle graniczne, stateczne lub nie.

DRGANIA

Informacja o drganiach nieliniowych,
parametrycznych i samowzbudnych

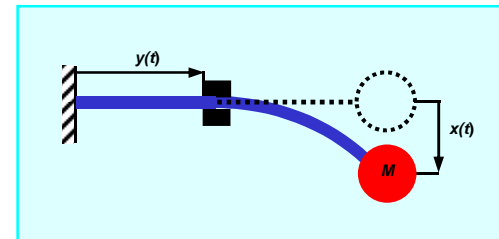
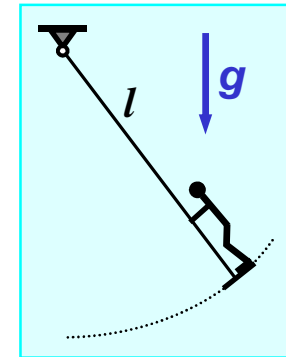
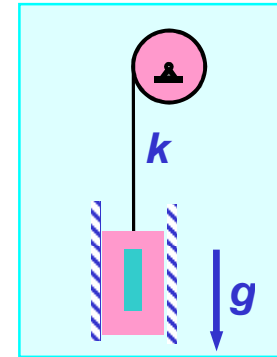
Drgania parametryczne

Drgania parametryczne są to drgania układów których parametry (masa, sztywność, tłumienie) zmieniają się w czasie.

$$m(t), I(t), k(t), c(t), \dots$$

Przykłady:

- huśtawka (zmienny moment bezwładności),
- układ kół zębatych (zmienna sztywność),
- mechanizm korbowo-wodzikowy,
- winda na sprężystej linii,
- wahadło z ruchomym punktem podwieszenia,
- drgania wirujących wałów,
- wibrujący telefon komórkowy,
- pręt o zmiennej długości.



Drgania parametryczne wywołane są zmianami wartości parametrów
- **do ich wywołania siła zewnętrzna nie jest potrzebna.**

Układy w których występują drgania parametryczne mogą być zarówno liniowe, jak i nieliniowe.

Huśtawka - klasyczny układ parametryczny

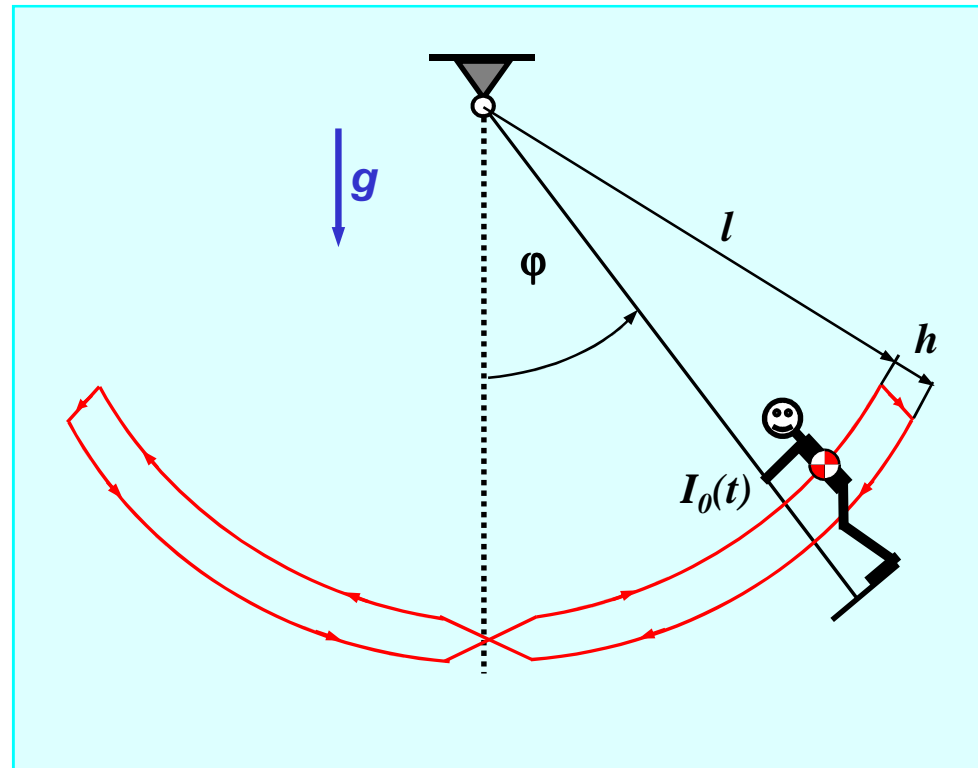
- można ją rozhuścić do bardzo dużych amplitud (a nawet kręcić się na niej w kółko w przypadku huśtawek treningowych),
- rozhuśnięcie nie dokonuje się pod działaniem sił zewnętrznych,
- w czasie huśtania następuje zmiana położenia środka masy, a co za tym idzie - momentu bezwładności huśtawki:

$$l(t) = l_0 + h(t) \quad (2.3.1)$$

$$I(t) = m(l_0 + h(t))^2 \quad (2.3.2)$$

Równanie ruchu huśtawki

$$ml^2(t) \ddot{\varphi} + 2ml(t) \dot{\varphi} + mgl(t) \varphi = 0 \quad (2.3.3)$$

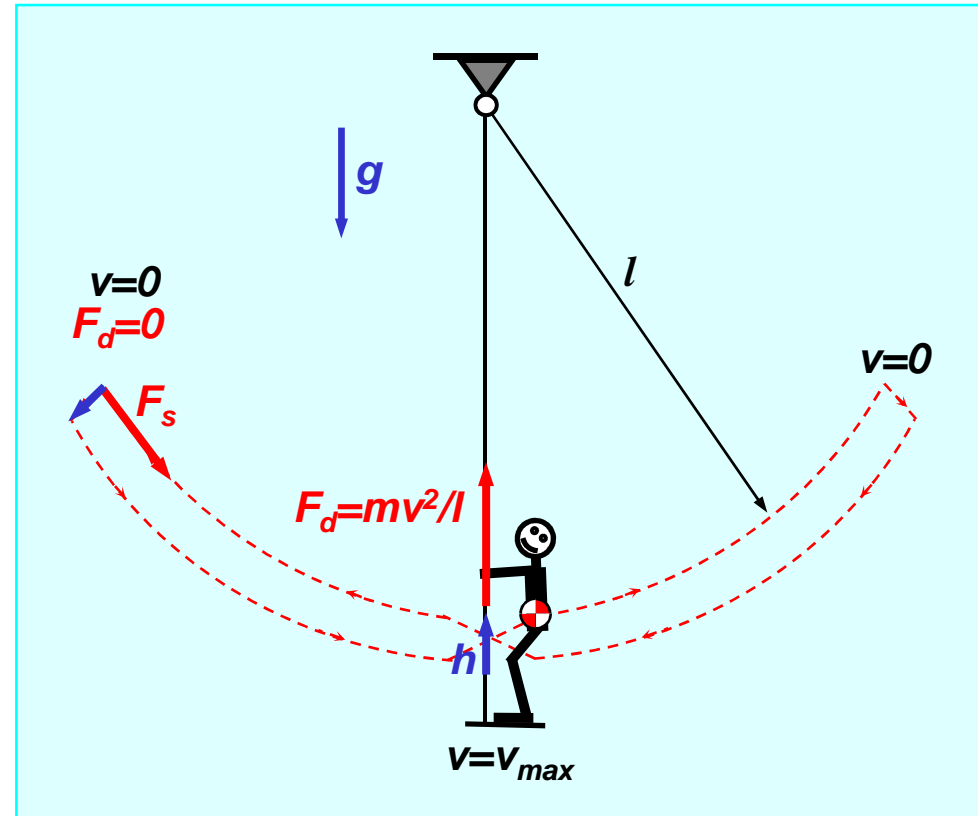


- człowiek przysiada w chwilach zatrzymania się huśtawki, a wstaje gdy huśtawka przechodzi przez położenie równowagi,
- potencjalna siła ciężkości wykonuje pracę równą zero na pełnym okresie ruchu huśtawki,
- siła styczna F_s nie wykonuje pracy, gdyż $F_s \perp h$,
- siła dośrodkowa F_d nie wykonuje pracy w skrajnych położeniach huśtawki, gdyż $F_d = 0$,
- przy przechodzeniu przez położenie równowagi siła dośrodkowa F_d **dwa razy** wykonuje pracę dodatnią na przemieszczeniu h ,

$$\Delta L = 2(mv^2/l)h$$

- praca ta dodaje się do energii całkowitej układu powodując wzrost amplitudy huśtania.
- źródłem energii jest sam człowiek - a dokładniej - energia chemiczna zawarta w jego pożywieniu.

Huśtanie się stanowi przykład **rezonansu parametrycznego**.

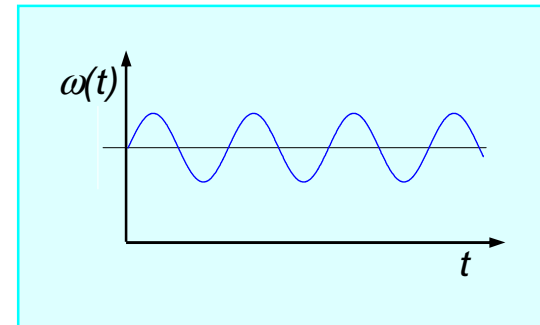


Układy z parametrami zmiennymi harmonicznie

$$\omega_0^2(t) = \omega_0^2(1 - 2q \cos(2pt)) \quad (2.3.6)$$

Równanie *Mathieu*

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - 2q \cos(2pt))x = 0 \quad (2.3.7)$$



Definiujemy: **współczynnik częstości** λ i **współczynnik modulacji** μ

$$\lambda = \frac{\omega_0^2}{4p^2} \quad \mu = -2q\lambda = -\frac{2q\omega_0^2}{4p^2} \quad (2.3.8)$$

Równanie Mathieu w postaci standardowej

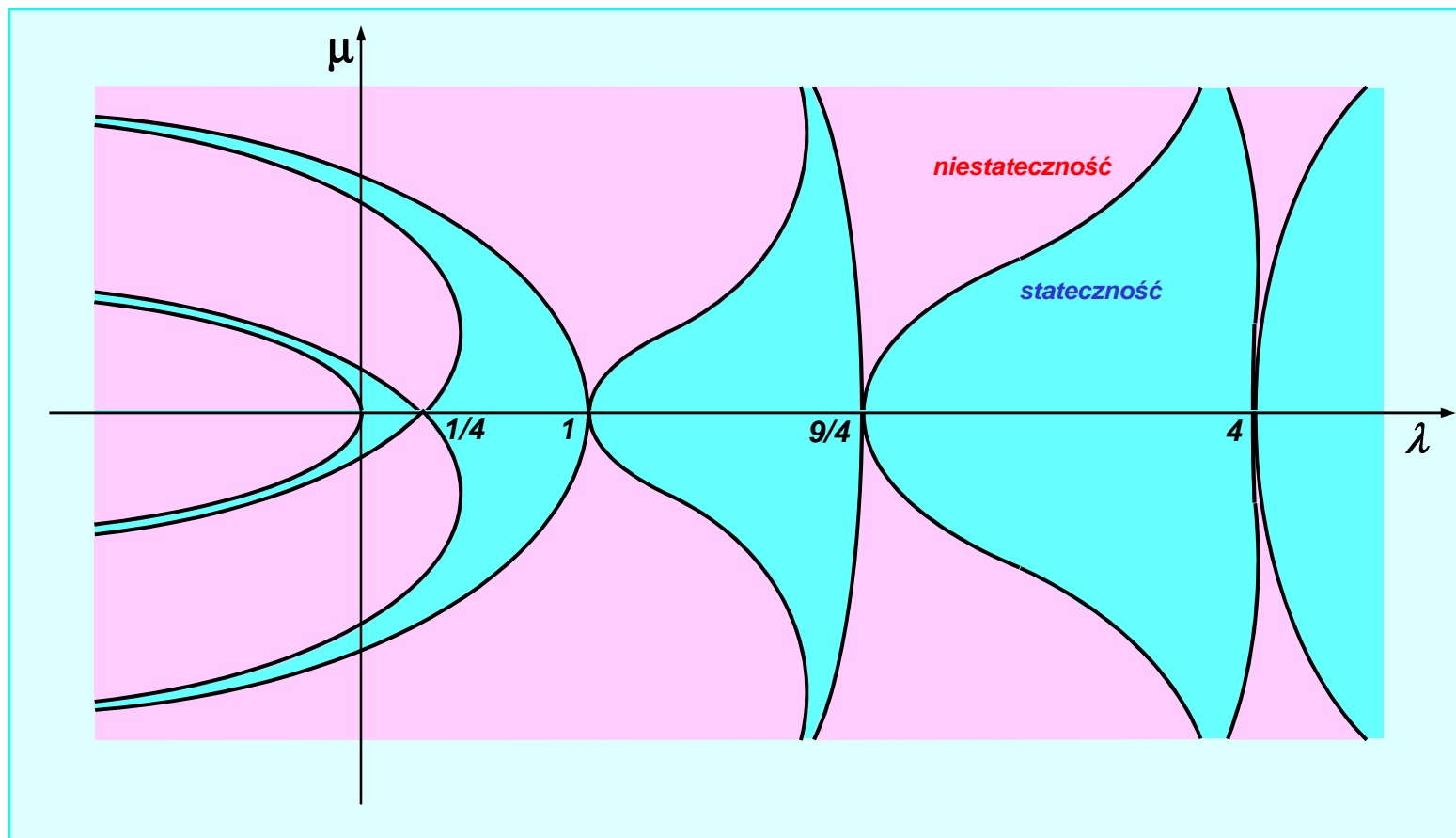
$$\ddot{x} + (\lambda + \mu \cos pt)x = 0 \quad (2.3.9)$$

Rezonans parametryczny przy $\mu = 0$ zachodzi dla

$$\lambda = \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \dots \quad (2.3.10)$$

$$2p = 2\omega_0, \omega_0, \frac{2}{3}\omega_0, \frac{1}{4}\omega_0, \dots$$

$$\ddot{x} + (\lambda + \mu \cos pt)x = 0$$



Wykres Ince'a-Strutta

2.3. Drgania parametryczne

Wahadło matematyczne z ruchomym punktem zaczepienia

Przemieszczenie punktu zaczepienia wahadła

$$x(t) = b \cos(2pt) \quad (2.3.11)$$

$$\ddot{x} = -4p^2b \cos(2pt)$$

Siła bezwładności działająca na masę m

$$B_x = -m\ddot{x} \Rightarrow (B_x)_\varphi = 4mp^2b \cos(2pt) \varphi$$

Równanie ruchu wahadła

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi + 4mp^2b \cos(2pt) \varphi l \quad (2.3.12)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \left(1 - \frac{4p^2b}{g} \cos(2pt)\right) \varphi = 0$$

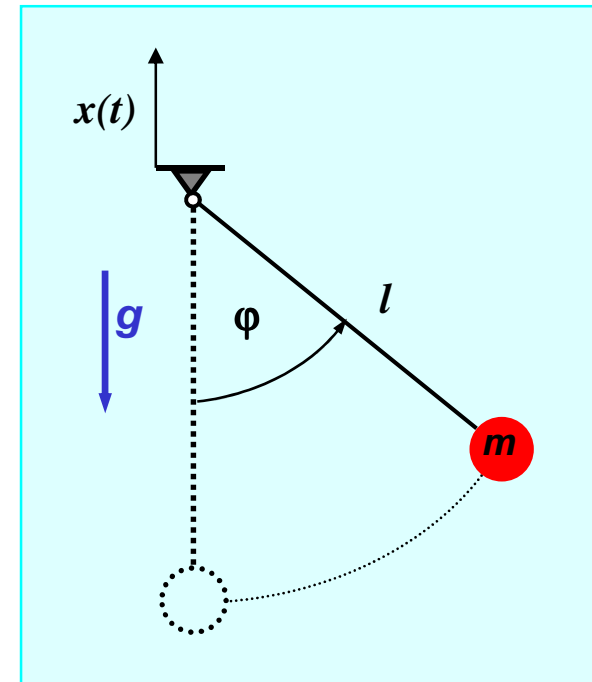
$$\lambda = \omega_0^2 = \frac{g}{l} > 0 \quad \mu = -\lambda \frac{4p^2b}{g} < 0 \quad (2.3.13)$$

Równanie ruchu w formie równania Mathieu

$$\ddot{\varphi} + (\lambda + \mu \cos(2pt)) \varphi = 0 \quad (2.3.14)$$

Częstości drgań rezonansu parametrycznego:

$$p = \omega_0, \frac{1}{2}\omega_0, \frac{1}{3}\omega_0, \dots \quad (2.3.15)$$



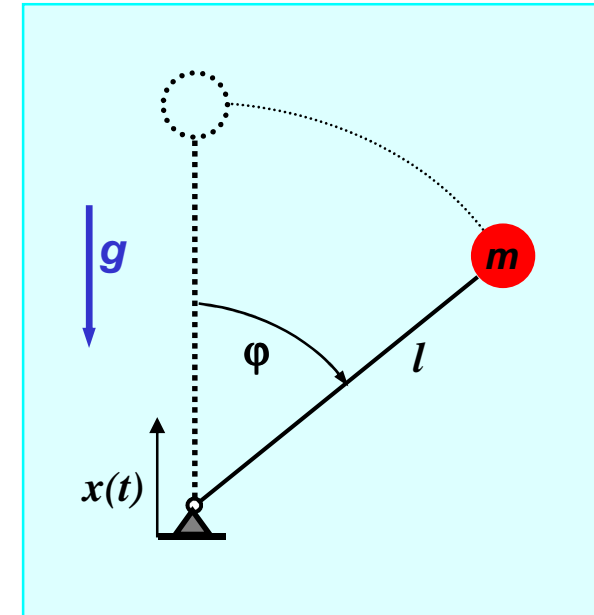
Wahadło odwrócone z ruchomym punktem zaczepienia

Równanie ruchu wahadła odwróconego

$$ml^2\ddot{\varphi} = mgl\varphi + 4mp^2b \cos(2pt)\varphi l \quad (2.3.16)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \left(-1 - \frac{4p^2b}{g} \cos(2pt) \right) \varphi = 0$$

$$\lambda = -\frac{g}{l} < 0 \quad \mu = -\lambda \frac{4p^2b}{g} > 0 \quad (2.3.17)$$



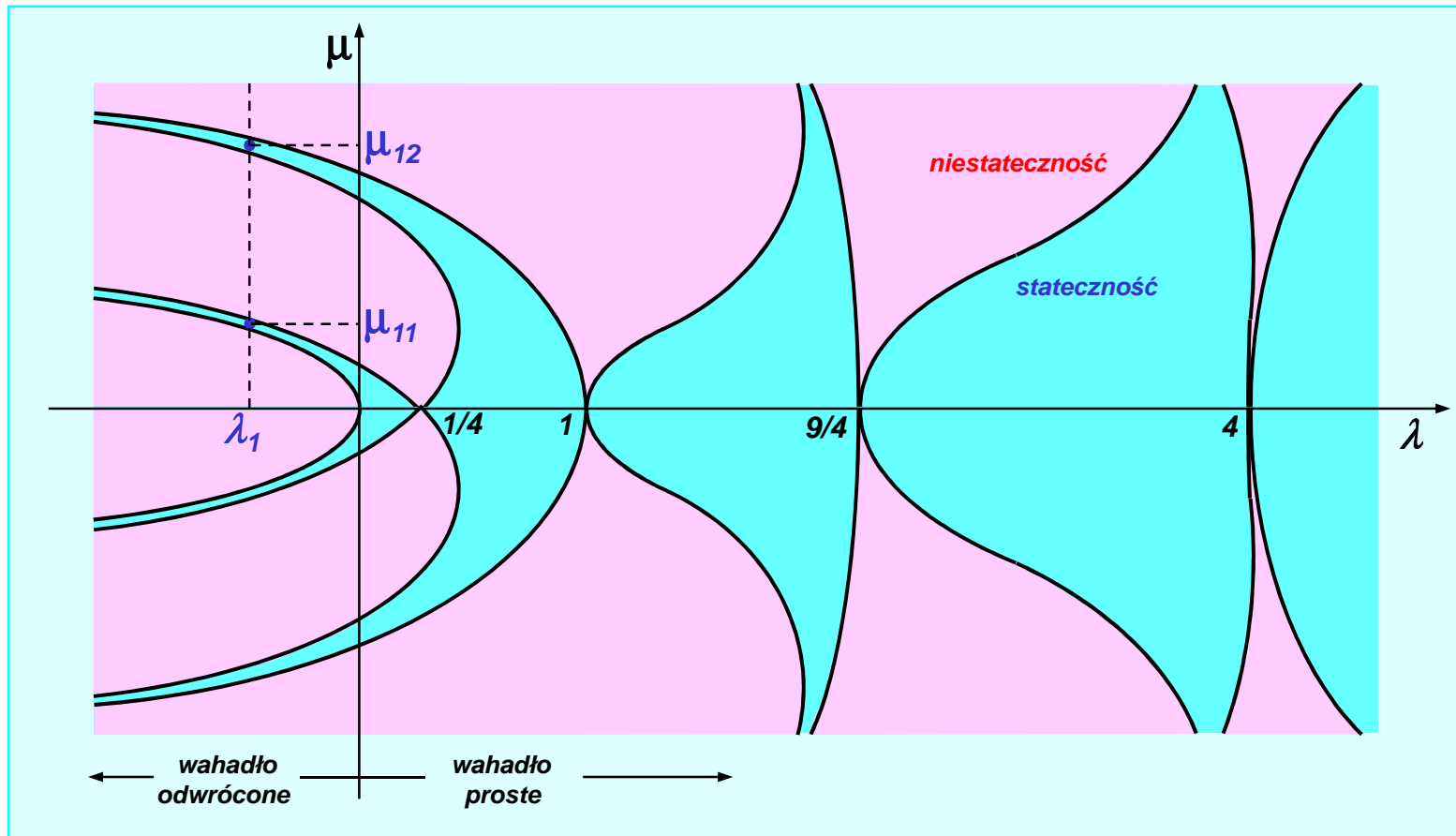
Równanie ruchu w formie równania Mathieu

$$\ddot{\varphi} + (\lambda + \mu \cos(2pt)) \varphi = 0$$

Rezonans parametryczny wahadła odwróconego nie występuje.

Ruch jest na ogół niestateczny, ale dla każdego $\lambda < 0$ istnieją wartości μ przy których ruch stateczny jest możliwy.

Wahadło matematyczne z ruchomym punktem zaczepienia



Niestateczny układ, jakim jest wahadło odwrócone, może być ustabilizowany poprzez odpowiedni ruch punktu zaczepienia.

Wnioski

- Drgania parametryczne powstają na skutek zmian w czasie takich parametrów obiektu, jak masa lub sztywność.
- Do wywołania drgań parametrycznych nie jest potrzebna zewnętrzna siła wymuszająca.
- Drgania parametryczne są drganiami wymuszonymi jakby „od wewnątrz”
- Przy periodycznych zmianach parametrów może wystąpić rezonans parametryczny.
- Częstość drgań w rezonansie parametrycznym jest ułamkiem częstości wymuszenia.
- Najgroźniejszy jest rezonans przy częstości wymuszenia dwukrotnie większej od częstości drgań własnych.

DRGANIA

Informacja o drganiach nieliniowych,
parametrycznych i samowzbudnych

Drgania samowzbudne

2.4. Drgania samowzbudne

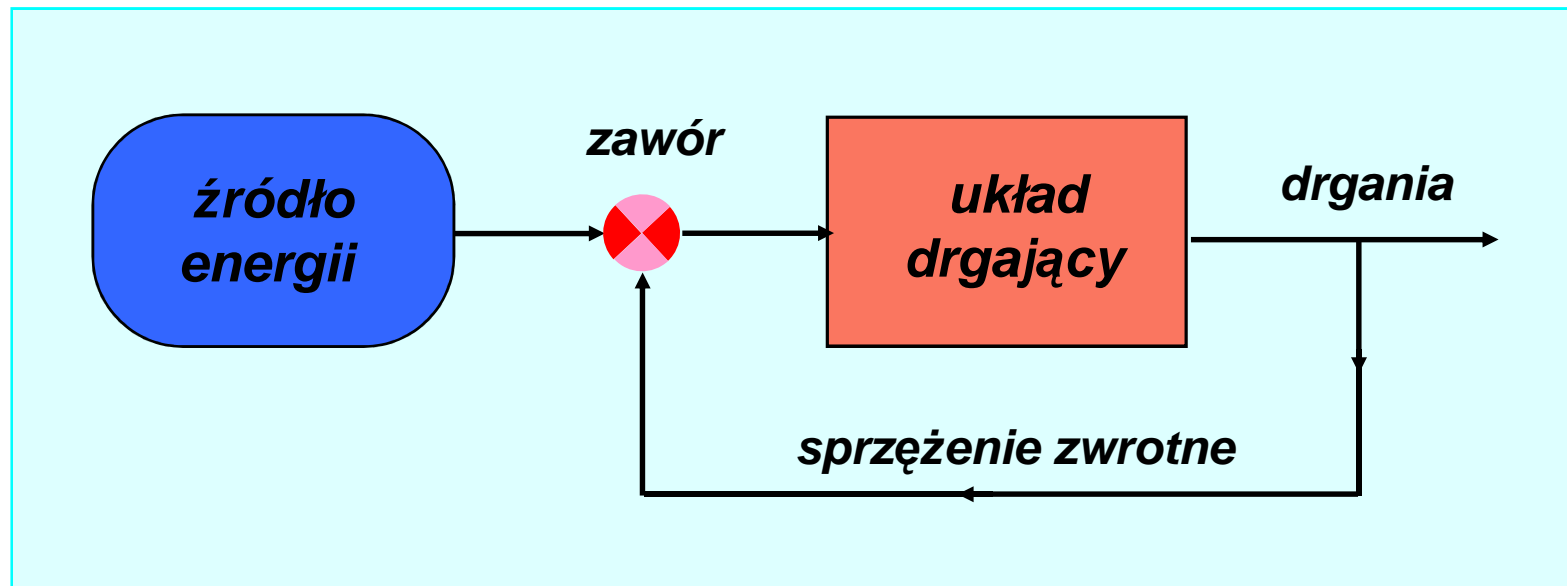
Drgania samowzbudne są to drgania wymuszone nieoscylacyjną siłą zewnętrzną, sterowane przez sam układ drgający.

Przykłady:

- dzwonek elektryczny,
- zegar sprężynowy lub napędzany ciężarkami,
- instrumenty smyczkowe (skrzypce, wiolonczela),
- szklanka z wodą pocierana palcem,
- pisk kredy podczas pisania na tablicy,
- drgania ciężkich przedmiotów przy ich przesuwaniu,
- skrzypienie zawiasów w drzwiach,
- drgania noża tokarskiego w trakcie obróbki skrawaniem,
- pisk kół tramwaju na zakrętach,
- zabawka - dzięcioł,
- buczenie rur wodociągowych,
- drgania zaworów pomp,
- drgania powietrza w kanałach wentylacyjnych i kominach,
- generatory drgań elektrycznych,
- galopowanie przewodów elektrycznych,
- kołysanie się kominów, mostów, budynków,
- wężykowanie podwozia („shimmi”),
- flutter skrzydeł lub sterów samolotów.

Drgania samowzbudne występują w przyrodzie i technice powszechnie!

Istotą powstania i trwania drgań samowzbudnych jest dopływ energii ze źródła zewnętrznego sterowany przez sam układ.



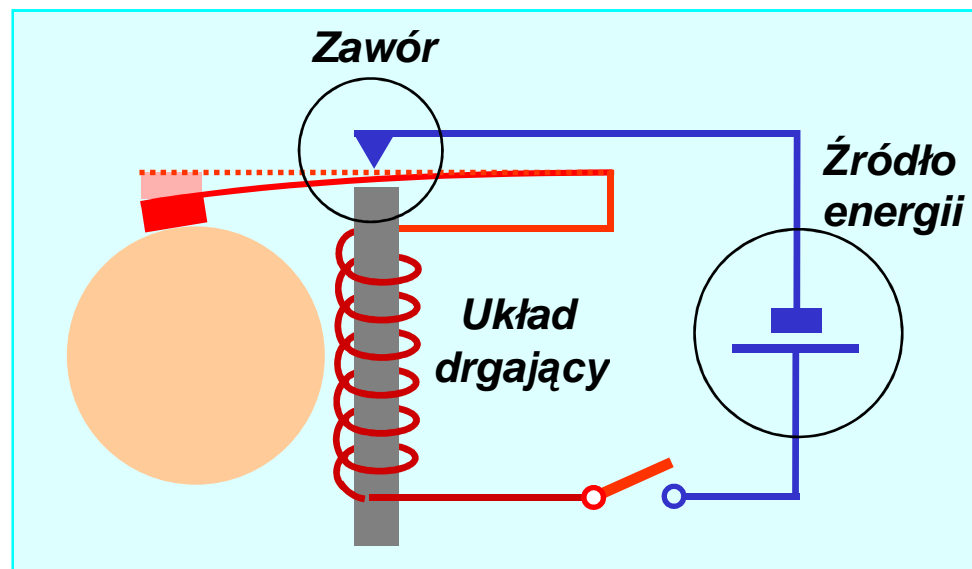
Zasadniczą cechą układów w których powstają drgania samowzbudne jest występowanie **sprężenia zwrotnego** sterującego dopływem energii.

Źródło energii nie wykonuje drgań.

Dzwonek elektryczny

Jest to jeden z najprostszych układów w którym powstają drgania samowzbudne

- źródłem energii jest bateria,
- układ drgający tworzą elektromagnes i kotwica,
- zaworem regulującym dopływ energii jest wyłącznik utworzony z kotwicy i stycznika,
- kotwica wykonuje drgania samowzbudne



Drgania kotwicy są ustalone - trwają tak długo, póki nie wyłączy się dopływu prądu.

W dzwonku energia elektryczna zamieniana jest na energię mechaniczną drgań (a ta z kolei zamieniana jest na energię akustyczną i ciepłą).

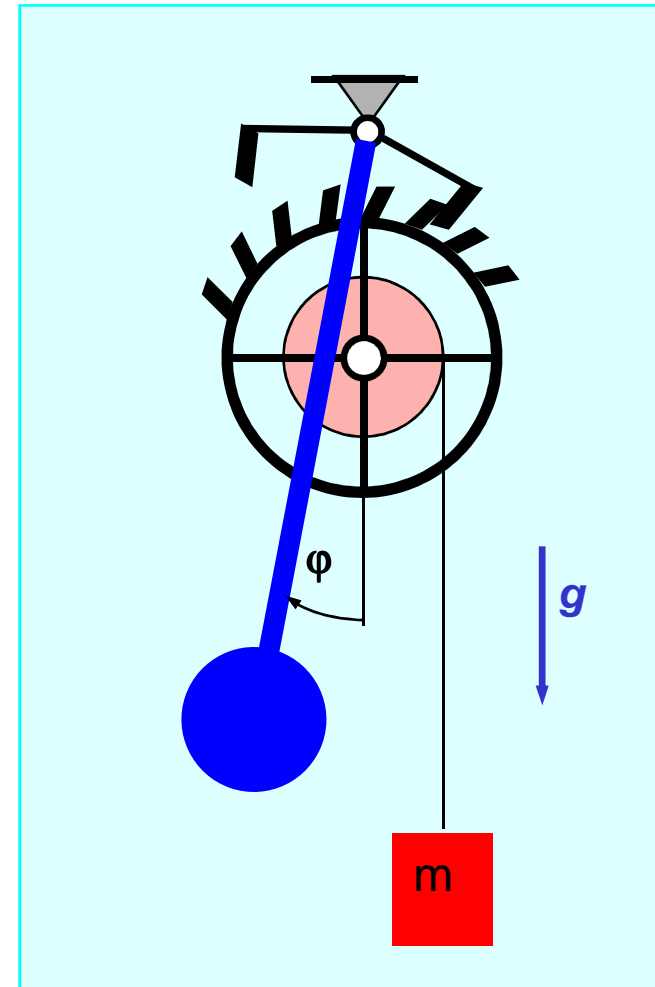
Dzwonek, pomimo swojej prostoty, jest układem nieliniowym!

Zegar wahadłowy

Jest to klasyczny układ mechaniczny, w którym powstające drgania samowzbudne są wykorzystywane z pożytkiem w praktyce

- źródłem energii grawitacja lub sprężyna,
- układem drgającym jest wahadło lub balans,
- zaworem regulującym dopływ energii jest koło wraz z kotwicą,
- wahadło wykonuje drgania samowzbudne.

W zegarze energia grawitacyjna lub sprężysta zamieniana jest na energię mechaniczną wahań.



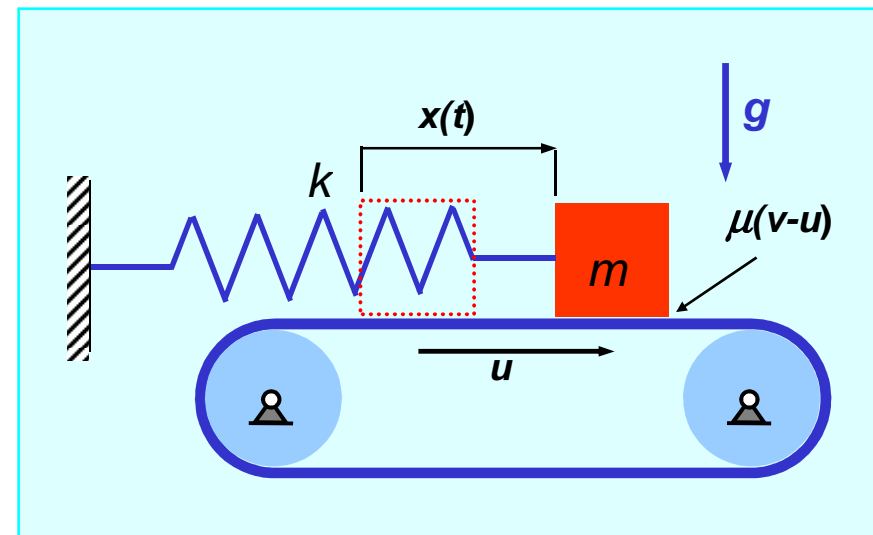
Układy z tarciem suchym

W bardzo wielu maszynach i urządzeniach występuje tarcie suche

- koła i sprzęgi pojazdów szynowych,
- łożyska panewkowe i kulkowe,
- walcowane metale.

Masa na taśmociągu

- źródłem energii jest ruchoma szorstka taśma,
- układ drgający stanowi masa na sprężynie,
- zaworem regulującym dopływ energii jest tarcie masy o taśmę,
- masa wykonuje drgania samowzbudne



Energia kinetyczna taśmociągu zamieniana jest na energię mechaniczną masy.

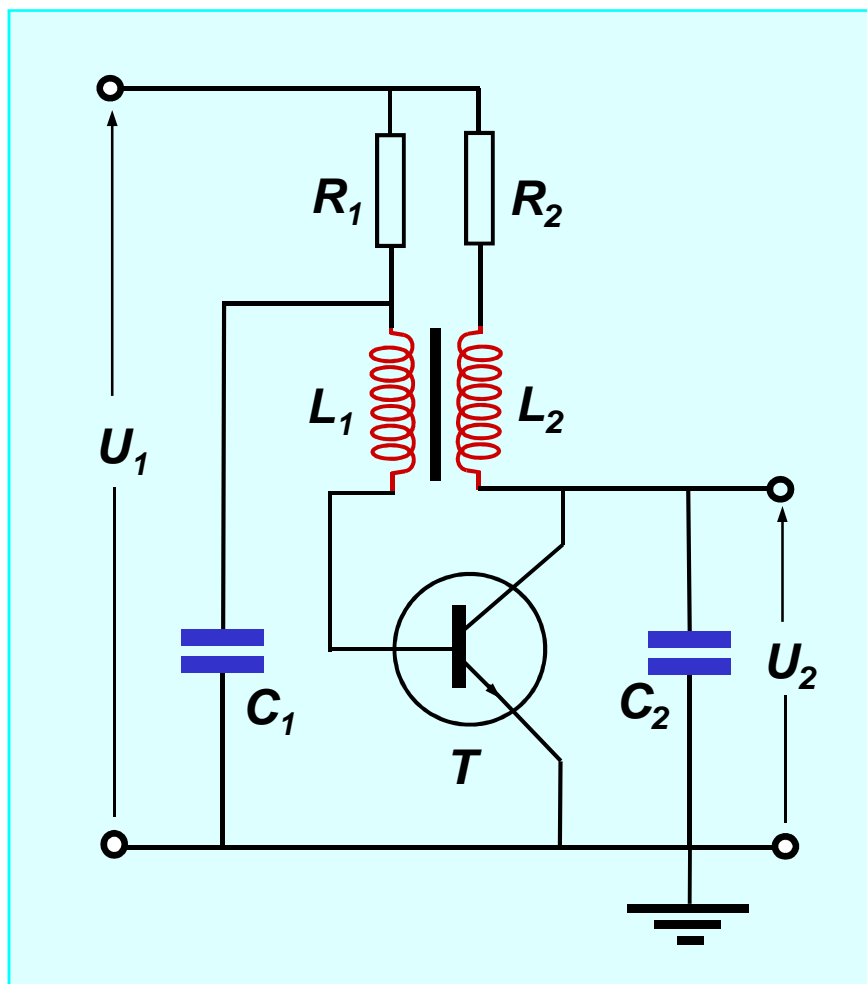
Układ jest silnie nieliniowy.

Układy elektroniczne

W urządzeniach elektronicznych drgania samowzбудne są generowane celowo, bądź powstają w wyniku sprzężeń elektromagnetycznych.

Generator drgań elektrycznych

- źródłem energii jest bateria zasilająca o napięciu U_1 ,
- układem drgającym jest obwód rezonansowy złożony z indukcyjności L_2 i pojemności C_2 ,
- zaworem regulującym dopływ energii jest tranzystor T oraz indukcyjność L_1
- obwód rezonansowy $L_2 C_2$ wykonuje drgania samowzбудne,
- napięcie U_2 ma przebieg sinusoidalny.



Układy z ośrodkiem płynnym

W urządzeniach przepływowych drgania samowzbudne występują bardzo często:

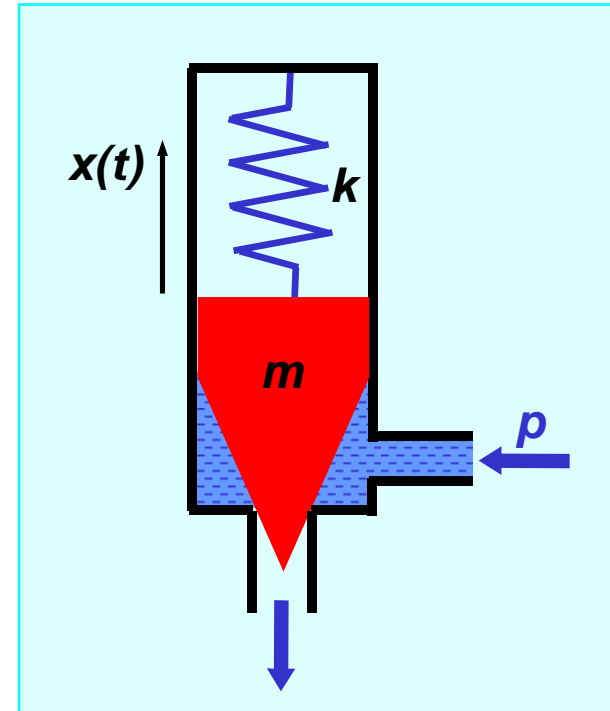
- buczenie rur wodociągowych,
- drgania zaworów,
- galopowanie przewodów,
- **większość lotniczych zjawisk aeroelastycznych.**

Aerohydroelastyczność - dziedzina w której najważniejszym zjawiskiem są drgania samowzbudne.

Układy z ośrodkiem płynnym

Drgania zaworu wtryskiwacza paliwa

- źródłem energii jest ciśnienie cieczy lub gazu,
- układem drgającym jest zawór wtryskiwacza dociskany sprężyną do dyszy wylotowej,
- regulacja dopływu energii następuje poprzez sprężystość,
- zawór wykonuje drgania samowzbudne



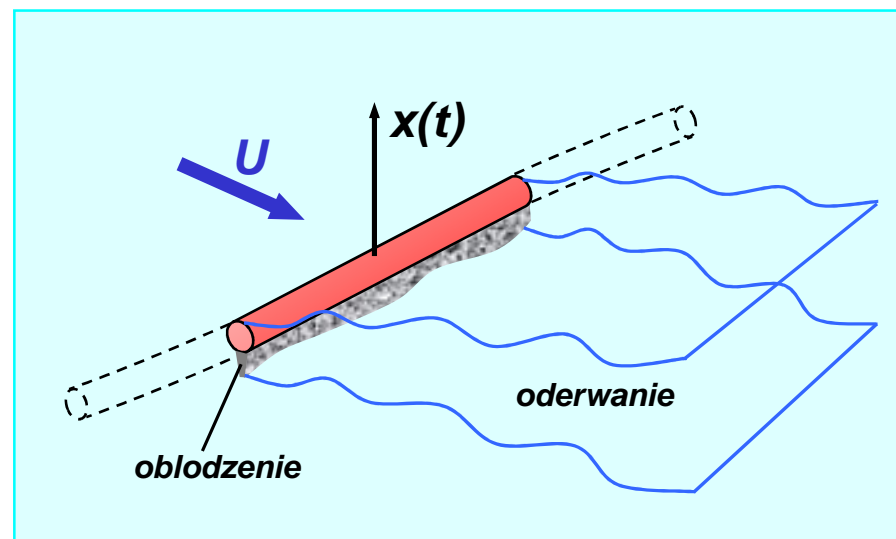
W podobny sposób wywoływane są drgania samowzbudne zaworów w kranach wodociągowych („buczenie rur”).

Rolę sprężyny pełni przy tym rura, zaś elementem regulującym dopływ energii jest obłuzowany grzybek zamykający dopływ wody.

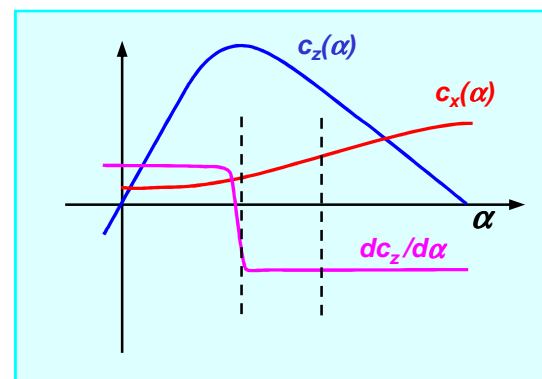
Układy z ośrodkiem płynnym

Galopowanie przewodów energetycznych wywołane oderwaniem

- źródłem energii jest wiatr,
- układem drgającym jest oblodzony odcinek przewodu pomiędzy słupami,
- zaworem regulującym dopływ energii jest odrywanie się przepływu od przewodu na skutek przekroczenia krytycznego kąta natarcia,
- przewód wykonuje drgania samowzbudne.



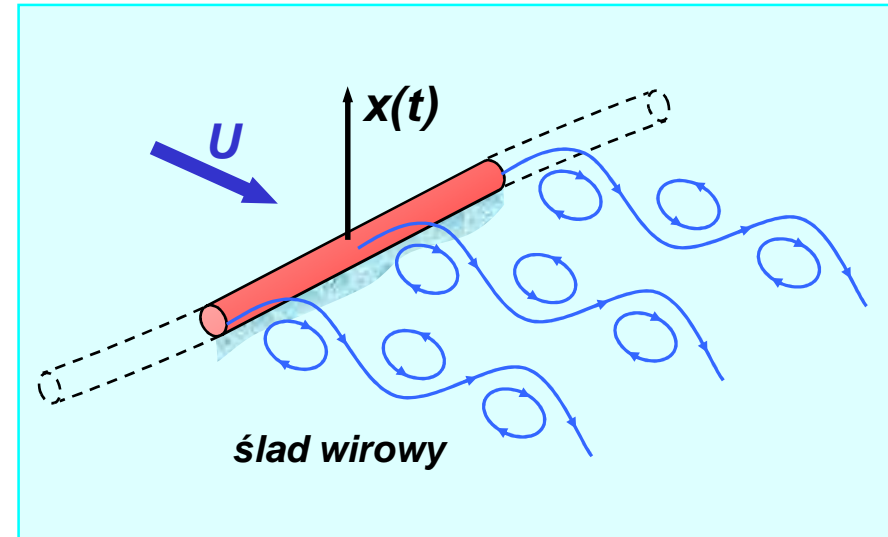
Cechą charakterystyczną tego typu drgań samowzbudnych jest **mała częstotliwość** drgań ($\sim 1\text{Hz}$), **znaczna amplituda** ($\sim 3\text{ m}$) oraz mała liczba okresów ($\sim 1-2$).



Układy z ośrodkiem płynnym

Galopowanie przewodów energetycznych wywołane śladem wirowym

- źródłem energii jest wiatr,
- układem drgającym jest oblodzony odcinek przewodu pomiędzy słupami,
- zaworem regulującym dopływ energii jest odrywanie się **wirów Karmana** od przewodu,
- przewód wykonuje drgania samowzbudne.

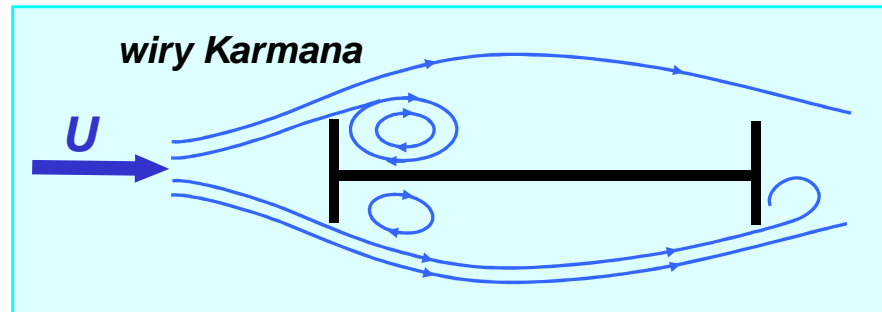


Cechą charakterystyczną tego typu drgań samowzbudnych jest **duża częstotliwość** drgań (~ 100 Hz), **mała amplituda** (~ 0.1 m) oraz duża liczba okresów ($\sim 20-30$).

Układy z ośrodkiem płynnym

Katastrofa mostu Tacoma (USA, 1940)

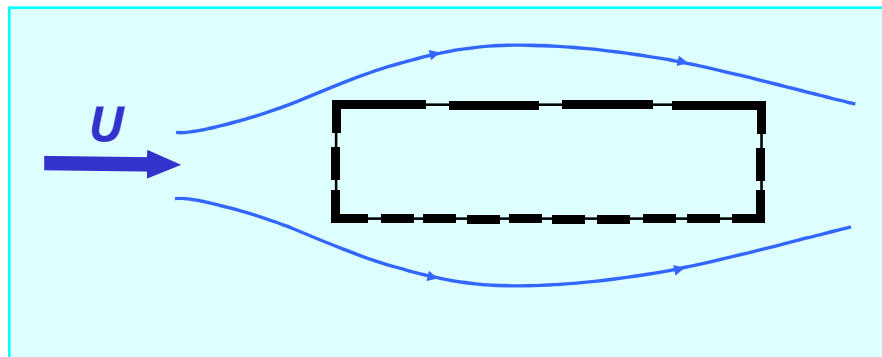
- źródłem energii był wiatr (42 mph),
- układem drgającym był most,
- zaworem regulującym dopływ energii była ścieżka wirowa Karmana.



Mała sztywność skrętna i duża różnica ciśnień generowana wirami Karmana spowodowały wystąpienie drgań samowzbudnych o dużej amplitudzie i zawalenie się mostu.

Po analizie katastrofy (University of Washington):

- usztywniono konstrukcję na skręcanie,
- usunięto boczne usztywnienia zapobiegając w ten sposób powstawaniu wirów Karmana,
- wykonano otwory zmniejszające różnice ciśnień.



Wnioski

- Drgania samowzbudne są jednymi z najczęściej występujących w przyrodzie i technice.
- Drgania samowzbudne powstają na skutek doprowadzenia do układu energii ze źródła zewnętrznego.
- Źródło energii jest nieoscylacyjne.
- W układzie samowzbudnym występuje mechanizm regulujący dopływ energii zewnętrznej.
- W układach samowzbudnych występują cykle graniczne stateczne lub niestateczne
- Amplitudy tych cykli granicznych są ściśle określone.
- W układach liniowych w których występuje tłumienie ujemne mogą pojawić się drgania samowzbudne.
- Drgania samowzbudne występują często w układach przepływowych.