6. Zbieżność klasycznych metod iteracyjnych w przypadku układów z macierzami symetrycznymi i dodatnio określonymi

DEF: Macierz kwadratową A nazywamy symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy

1) w przypadku rzeczywistym $(a_{ij} \in R)$ $A = A^T$
czyli dla $i, j = 1, .., n = \dim A$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$

2) w przypadku zespolonym $(a_{ij} \in C)$, $A = A^* \equiv (\overline{A^T})$
czyli dla $i, j = 1, .., n$ $\quad a_{ij} = \bar{a}_{ji}$

Ćwiczenie: wykazać, że wszystkie wartości własne macierzy symetrycznej są liczbami rzeczywistymi.

DEF: Macierz rzeczywistą A nazywamy dodatnio (ujemnie) określoną wtedy i tylko wtedy jeśli dla dowolnego wektora $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność
$$x^T A x > 0 \ (\text{odpowiednio} - x^T A x < 0)$$

DEF: Macierz A nazywamy symetryczną i dodatnio określoną jeśli $A = A^*$ i $x^* A x > 0$ dla każdego $x \neq 0$.

Objaśnienie: w przypadku zespolonym dodatnia określoność bez założenia symetrii nie ma sensu bo liczba $x^* A x$ nie musi być rzeczywista.

Ćwiczenie: wykazać, że wszystkie elementy a_{ii}, $i = 1, .., n$ macierzy rzeczywistej, symetrycznej i dodatnio określonej są dodatnie.

Twierdzenie o zbieżności metody Jacobiego

Jeśli macierz $A = D + L + U$ jest symetryczna i nieosobliwa oraz $a_{ii} > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n = \dim A$ (czyli D jest dodatnio określona) to iteracje Jacobiego są zbieżne przy dowolnym wektorze startowym x^0 wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno macierz A jak i macierz $\tilde{A} = D - (L+U)$ są dodatnio określone.

Komentarz: podany warunek jest ostry – w praktyce spotykamy zagadnienia takie, że macierz A jest SDO, ale $\tilde{A}$ – nie! (np. macierz otrzymana w wyniku dyskretyzacji zagadnienia brzegowego postawionego dla r-nia Poissona $\nabla^2 f = r$)

Lemat Kahana: Załóżmy, że macierz A (niekoniecznie symetryczna) ma dodatnie wartości na diagonalnej. Promień spektralny macierzy procesu iteracyjnego odpowiadającego metodzie SOR czyli

$$G_{SOR} = (D + \omega L)^{-1} \left[(1-\omega) D - \omega U \right]$$

spełnia nierówność $\varrho(G_{SOR}) \geq |\omega - 1|$

Wniosek: dla zbieżności SOR należy wymagać aby

$$|\omega - 1| < 1 \implies \omega \in (0, 2) \quad \text{(w-ek konieczny)}$$

Twierdzenie Ostrowskiego-Reicha

Jeżeli macierz A jest symetryczna i nieosobliwa z dodatnimi elementami diagonalnymi oraz $\omega \in (0, 2)$ to metoda SOR jest zbieżna do rozwiązania przy dowolnym x^0 wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest dodatnio określona.