KINEMATYKA PRZEPŁYWÓW - ROZSZERZENIE

CYRKULACJA

Definicja: Cyrkulacją pola wektorowego $\boldsymbol{w}$ wzdłuż (zamkniętego) konturu $\mathcal{L}$ nazywamy całkę

$$\Gamma = \oint_{\mathfrak{L}} \boldsymbol{w} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Twierdzenie Kelvina

Założenia:
- pole sił objętościowych $\boldsymbol{f}$ jest polem **potencjalnym**,
- płyn jest **nielepki** i **barotropowy,**
- przepływ jest **ustalony**.

Wówczas: cyrkulacja pola prędkości $\boldsymbol{v}$ wzdłuż dowolnej **linii materialnej** $\mathcal{L}(t)$ nie zmienia się w czasie, tj.

$$\tfrac{d}{dt}\Gamma(t) \equiv \tfrac{d}{dt} \oint_{\mathfrak{L}(t)} \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Dowód:

Ponieważ przepływ jest z założenia barotropowy, a pole sił objętościowych jest potencjalne, to możemy napisać równości

$$\nabla P = \tfrac{1}{\rho}\nabla p \qquad , \qquad \boldsymbol{f} = \nabla \Phi$$

Wobec tego, pole przyspieszenia płynu (z założenia stacjonarności ma ono wyłącznie składnik konwekcyjny) może być wyrażone następująco

$$\boldsymbol{a} \equiv (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla(P - \Phi)$$

W celu obliczenia pochodnej czasowej cyrkulacji wzdłuż linii materialnej zastosujemy opis Lagrange'a. Wówczas, cyrkulacja dana jest wzorem

$$\Gamma(t) = \oint_{\mathfrak{L}(t)} \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{\mathfrak{L}_0(t)} \boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{\xi})\cdot \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{l}_0$$

gdzie $\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}$ jest macierzą Jacobiego transformacji pomiędzy współrzędnymi Eulera $\boldsymbol{x}$ i współrzędnymi Lagrange'a $\boldsymbol{\xi}$.

Obliczamy pochodną czasowa funkcji $\Gamma(t)$ …

$$\frac{d}{dt}\oint_{\mathfrak{L}(t)} \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{d}{dt}\oint_{\mathfrak{L}_0(t)} \boldsymbol{V}(t,\xi)\cdot \boldsymbol{J}(t,\xi)d\boldsymbol{l}_0 = \oint_{\mathfrak{L}_0(t)} \boldsymbol{a}(t,\xi)\cdot \boldsymbol{J}(t,\xi)d\boldsymbol{l}_0 +$$

$$+\oint_{\mathfrak{L}_0(t)} \boldsymbol{V}(t,\xi)\cdot \underbrace{\nabla_\xi \boldsymbol{V}(t,\xi)}_{=\partial_t \boldsymbol{J}(t,\xi)} d\boldsymbol{l}_0 = \oint_{\mathfrak{L}(t)} \boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{l} + \underbrace{\oint_{\mathfrak{L}_0(t)} \nabla_\xi (\tfrac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})(t,\xi)\cdot d\boldsymbol{l}_0}_{\substack{=0 \\ \text{calka gradientu wzdluż zamkniętej pętli}}} =$$

$$= \underbrace{-\oint_{\mathfrak{L}(t)} \nabla(P+\Phi)\cdot d\boldsymbol{l}}_{\substack{=0 \\ \text{calka gradientu wzdluż} \\ \text{zamkniętej pętli}}} = 0$$

W powyższym rachunku wykorzystaliśmy równość $\partial_t \boldsymbol{J}(t,\xi) = \nabla_\xi \boldsymbol{V}(t,\xi)$.

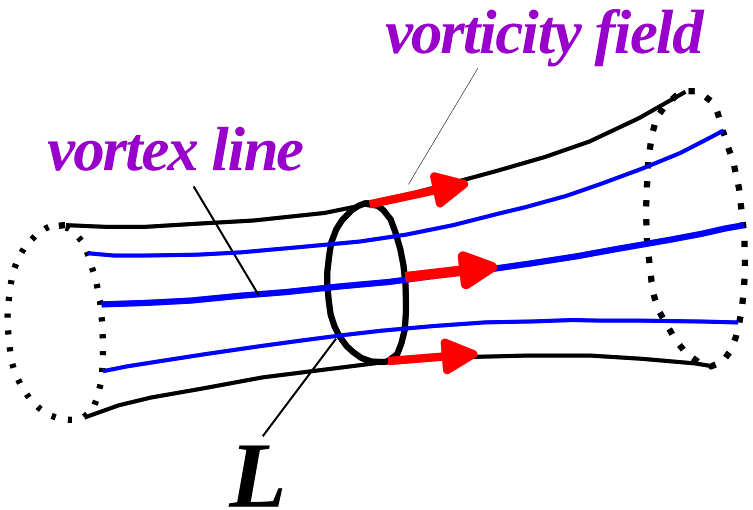
WIROWOŚĆ

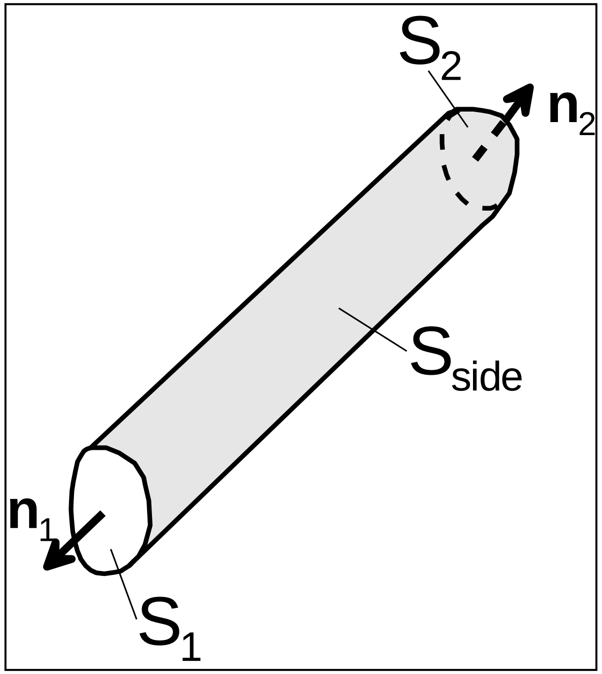
Pole wirowości zdefiniowane jest jako rotacja pola prędkości, tj.

$$\boldsymbol{\omega} = rot\,\boldsymbol{v} \equiv \nabla \times \boldsymbol{v}$$

Definicje:

- Linią wirową nazywamy linię pola wektorowego wirowości. Oznacza to, że w każdym punkcie linii wirowej wektor wirowości jest do tej linii styczny.
- Rurką wirową nazywamy obszar ograniczony powierzchnią zbudowaną z linii wirowych przeprowadzonych przez wszystkie punkty zamkniętej linii (na rysunku oznaczonej symbolem L).





Intensywność Γ rurki wirowej określa strumień wirowości przez przekrój poprzeczny rurki. Stosując do dowolnie wybranego przekroju poprzecznego rurki Twierdzenie Stokesa mamy

$$\int_S \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \oint_l \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} = \Gamma$$

Widzimy, że **intensywność rurki wirowej równa jest cyrkulacji pola prędkości wzdłuż konturu otaczającego rurkę**.

Powyższa definicja intensywności/cyrkulacji rurki wirowej nie zależy od wyboru szczególnego konturu całkowania. Ponieważ pole wirowości ma zerową dywergencję, strumień tego pola przez dowolny przekrój rurki jest taki sam. Istotnie, rozważmy segment rurki wirowej Ω położony pomiędzy dwoma przekrojami S_1 i S_2 . Z Tw. GGO mamy

$$0 = \int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{x} = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,ds + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,ds + \underbrace{\int_{S_{side}} \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,ds}_{=0} = 0$$

Zauważmy, że całka po powierzchni bocznej obszaru S_{side} znika, ponieważ powierzchnia ta jest „utkana” z linii wirowych, a zatem wersor normalny $\boldsymbol{n}$ jest na tej powierzchni prostopadły do wektora wirowości.

Zauważmy również, że orientacje wersorów na powierzchniach przekrojów rurki S_1 i S_2 są przeciwne (zgodnie ze sformułowaniem Tw. GGO, cała powierzchnia obszaru jest zorientowana zewnętrznie).

Odwracając zwrot wersora $\boldsymbol{n}$ na S_2 otrzymujemy wniosek

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

Twierdzenie (3-cie) Helmholtza

Załóżmy, że:

- płyn jest nielepki i barotropowy,
- pole sił objętościowych jest potencjalne.

Wówczas: każda linia wirowa składa się z tych samych elementów płynu, tj. **wszystkie linie wirowe są liniami materialnymi**.

Dowód:

Wyznaczymy **prawo transformacji wektorów stycznych do dowolnej linii materialnej**.

Niech w chwili początkowej $t = 0$ linia materialna będzie opisana parametrycznie wzorem $l_0 : \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(s)$. W późniejszej chwili $t > 0$ kształt tej samej linii materialnej wynika z działania transformacji opisującej przepływ $\mathfrak{F}_t : \boldsymbol{R}^3 \ni \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$, tj.

$$l_t : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, s) = \mathfrak{F}_t[\boldsymbol{\xi}(s)]$$

Odpowiadającą tej deformacji kształtu transformację wektorów stycznych opisuje wzór

$$\boldsymbol{\tau}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{x}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}\mathfrak{F}_t[\boldsymbol{\xi}(s)] = \underbrace{\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right][t, \boldsymbol{\xi}(s)]}_{\text{macierz Jacobiego}} \frac{d}{ds}\boldsymbol{\xi}(s) = \boldsymbol{J}[t, \boldsymbol{\xi}(s)]\,\boldsymbol{\tau}_0(s)$$

Zapiszmy teraz przyspieszenie płynu w formie Lamba-Gromeki:

$$\boldsymbol{a} = \frac{D}{Dt}\boldsymbol{v} = \partial_t \boldsymbol{v} + \nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

Następnie, obliczmy rotację pola przyspieszenia $\boldsymbol{a}$ …

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \partial_t(\nabla\times\boldsymbol{v}) + \nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})$$

Wykorzystamy teraz następującą tożsamość

$$\nabla\times(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{q}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{q} + (\nabla\cdot\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{p} - (\nabla\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}$$

kładąc w niej $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{v}$. Otrzymujemy wówczas

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\omega}$$

Dalej, obliczamy pochodną substancjalną wielkości $\boldsymbol{\omega}/\rho$…

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\omega}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{\omega}\underbrace{\frac{D}{Dt}\rho}_{=-\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\rho}\left[\nabla\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\omega}\right] + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\omega}\nabla\cdot\boldsymbol{v} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\nabla\times\boldsymbol{a} + \left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}$$

Z równania ruchu i przyjętych założeń wynika, że pole przyspieszeń jest polem potencjalnym, wobec czego

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

Zatem, równanie dla wielkości $\boldsymbol{\omega}/\rho$ upraszcza się do postaci

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\omega}\right) = \left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}$$

Wprowadźmy pole wektorowe $\boldsymbol{c}$ taki, że $\omega_i = \rho \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} c_j$, $i = 1, 2, 3$. Równoważnie

$$\boldsymbol{\omega} = \rho \underbrace{\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}\right]}_{\text{macierz Jacobiego}} \boldsymbol{c} \equiv \rho \boldsymbol{J}\boldsymbol{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\omega = \boldsymbol{J}\boldsymbol{c}$$

Podstawmy ostatnią równość do lewej strony wyprowadzonego wyżej równia dla pola $\boldsymbol{\omega}/\rho$

$$L = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\omega}\right) = \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{J}\boldsymbol{c}](t,\xi) = \boldsymbol{J}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial t}c(t,\xi) + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(t,\xi)\right]}_{=\nabla_\xi \boldsymbol{V}(t,\xi)} c(t,\xi) =$$

$$= \boldsymbol{J}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial t}c(t,\xi) + \nabla_\xi \boldsymbol{V}(t,\xi)\boldsymbol{c}(t,\xi) = \boldsymbol{J}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial t}c(t,\xi) + \nabla \boldsymbol{v}[t,\boldsymbol{x}(t,\xi)]\boldsymbol{J}(t,\xi)\boldsymbol{c}(t,\xi)$$

Prawa strona tego równania może być zapisana następująco

$$R = (\tfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = (\nabla\boldsymbol{v})\tfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\omega} = (\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{J}\boldsymbol{c}$$

Ponieważ dla każdej pary argumentów (t,ξ) mamy $L = R$, zatem

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{c}(t,\xi) = 0$$

czyli $\boldsymbol{c}(t,\xi) = \boldsymbol{c}(0,\xi) = \boldsymbol{c}_0$. Innymi słowy, **pole wektorowe $\boldsymbol{c}$ jest stałe wzdłuż trajektorii elementów płynu**.

Zauważmy, że dla $t = 0$ transformacja $\mathfrak{F}_t$ jest identycznościowa, zatem macierz Jacobiego

$$\boldsymbol{J}\big|_{t=0} = \boldsymbol{I}$$

Dlatego $\boldsymbol{c}_0 = \tfrac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\omega}_0$ i, ponieważ $\boldsymbol{c}(t) \equiv \boldsymbol{c}_0$, prawdziwa jest równość

$$\frac{\omega}{\rho}(t,\xi) = \boldsymbol{J}(t,\xi)\frac{\omega_0}{\rho_0}.$$

Otrzymana równość dowodzi tezy twierdzenia, bowiem ma ona formę transformacji wektorów stycznych do linii materialnych. Dokładniej: skoro wektor $\boldsymbol{\omega}_0 / \rho_0$ jest styczny do linii wirowej przechodzącej przez punkt $\boldsymbol{\xi}$ w chwili $t = 0$, to z powyższej równości wynika, że wektor $\boldsymbol{\omega} / \rho$ jest styczny do obrazu tej linii w chwili $t > 0$, w punkcie $\boldsymbol{x} = \mathfrak{F}_t(\boldsymbol{\xi})$. Ale wektor $\boldsymbol{\omega} / \rho$ jest również styczny do linii wirowej przechodzącej przez tenże punkt $\boldsymbol{x}$, skąd wynika, że **linie wirowe w chwili początkowej są „mapowane" na linie wirowe w chwilach późniejszych, czyli są to linie materialne (poruszają się razem z płynem)**.

Skoro linie wirowe są materialne, takimi są również rurki wirowe. Jeśli zdefiniujemy zamknięty kontur na powierzchni ograniczającej rurkę wirową to będzie on pozostawał na powierzchni tej rurki dla dowolnego czasu. Z twierdzenia Kelvina wynika, że cyrkulacja pola prędkości dla tego konturu jest stała. W konsekwencji, intensywność rurki wirowej pozostaje stała w trakcie jej ruchu i deformacji. Wynika stąd, że ruch wirowy w płynie nielepkim i barotropowym, poddanym działaniu potencjalnego pola sił jest ruchem trwałym (wirowość nie może powstać ani zniknąć).

RÓWNANIE TRANSPORTU WIROWOŚCI

W mechanice płynów **pole wirowości** odgrywa bardzo istotną rolę, w szczególności w objaśnieniu zjawiska **niestateczności hydrodynamicznej i turbulencji**. Wyprowadzimy równanie opisujące ewolucję tego pola.

Punktem wyjścia jest równanie ruchu płynu nielepkiego zapisane w formie Lamba-Gromeki

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \nabla(\tfrac{1}{2}v^2) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\tfrac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$$

Stosując do tego równania operator rotacji otrzymujemy

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = -\nabla \times (\tfrac{1}{\rho}\nabla p) + \nabla \times \boldsymbol{f}$$

Składnik ciśnieniowy może być przekształcony następująco

$$\nabla \times (\tfrac{1}{\rho}\nabla p) = \nabla(\tfrac{1}{\rho}) \times \nabla p + \tfrac{1}{\rho}\underbrace{\nabla \times \nabla p}_{\uparrow \atop 0} = -\tfrac{1}{\rho^2}\nabla \rho \times \nabla p$$

UWAGA: składnik ciśnieniowy znika tożsamościowo, gdy płyn jest barotropowy jako, że wówczas gradienty ciśnienia i gęstości są do siebie równoległe.

Równanie transportu wirowości (RTW) może być zapisane następująco

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p + \nabla\times\boldsymbol{f}$$

lub, wprowadzając pochodną substancjalną wirowości

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega} = \underbrace{(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}}_{\substack{\text{rozciąganie}\\ \text{rurek wirowych}}} \underbrace{-\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p}_{\substack{\text{efekt}\\ \text{baroklinowy}}} + \underbrace{\nabla\times\boldsymbol{f}}_{\substack{\text{niepotencjalne}\\ \text{pole sil}}}$$

Zmiana wielkości wirowości elementu płynu może zachodzić na skutek:

- lokalnej deformacji (rozciągania rurek wirowych oraz zmianie ich orientacji w przestrzeni). układu linii wirowych zwanej efektem **"vortex stretching/tilting".** Uważa się, że jest to podstawowy mechanizm odpowiedzialny za generację chaotycznej czasowo-przestrzennej struktury przepływów turbulentnych. Składnik „vortex stretching" znika tożsamościowo w przepływach dwuwymiarowych.
- obecności efektów baroklinowych. W przepływie płynu baroklinowego, gradienty ciśnienia i gęstości są nierównoległe. Można pokazać, że w takiej sytuacji powstaje pole momentu siły które generuje ruch wirowy w płynie. Efekt ten ma znaczenie w dynamice atmosfery.
- Obecności niepotencjalnego pola sił. Taka możliwość ma znaczenie np. w przypadku płynów przewodzących oddziałujących z polem elektromagnetycznym.

Dla nielepkiego płynu barotropowego (w szczególności – nieściśliwego) równanie wirowości redukuje się do postaci

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

W przypadku dwuwymiarowym składnik „vortex stretching” znika i RTW przyjmuje szczególnie prostą postać.

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega} = 0$$

Wniosek: w dwuwymiarowym ruchu nielepkiego płynu barotropowego wirowość jest zachowana wzdłuż trajektorii elementów płynu.

Jeżeli płyn jest lepki, to RTW wyprowadza się poprzez zastosowania operatora rotacji do równania Naviera-Stokesa zapisanego w formie Lamba-Gromeki

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \nabla(\tfrac{1}{2}\upsilon^2) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = -\tfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

Równanie Transportu Wirowości przyjmuje postać

$$\partial_t\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nu\,\Delta\boldsymbol{\omega} + \nabla\times\boldsymbol{f}$$

Wykorzystaliśmy następującą tożsamość operatorową

$$\nabla\times\Delta\boldsymbol{v}=\nabla\times[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]=-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\omega})=\nabla\underbrace{(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})}_{=0}-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\omega})=\Delta\boldsymbol{\omega}$$

Jeżeli pole sił objętościowych jest potencjalne, to RTW redukuje się do postaci

$$\partial_t\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\nu\,\Delta\boldsymbol{\omega}$$

lub, równoważnie

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nu\,\Delta\boldsymbol{\omega}$$

Człon z lepkością opisuje **dyfuzję wirowości** związaną z lepkością płynu. Efekt ten powoduje „rozmazanie” wirowości po całym obszarze ruchu płynu. Zatem, **w płynie lepkim linie wirowe nie są już liniami materialnymi**.

Na koniec, warto wspomnieć o związku pomiędzy lepkością a skalarną funkcją prądu. Przypomnijmy, że skalarna funkcja prądu istnieje dla przepływów nieściśliwych dwuwymiarowych oraz osiowo symetrycznych. Ograniczymy się do omówienia przypadku 2D.

Wirowość w ruchu 2D jest zdefiniowana wzorem

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{\upsilon} = (\partial_1 \upsilon_2 - \partial_2 \upsilon_1)\, \boldsymbol{e}_3 \equiv \omega \boldsymbol{e}_3$$

Funkcja prądu spełnia wówczas równanie Poissona

$$\Delta\psi \equiv \partial_{11}\psi + \partial_{22}\psi = -(\partial_1 \upsilon_2 - \partial_2 \upsilon_1) = -\omega$$

Nieściśliwy przepływ dwuwymiarowy może być opisany za pomocą wyłącznie wielkości kinematycznych: prędkości, wirowości i funkcji prądu. Ciśnienie jest wyeliminowane z opisu, a równanie ciągłości $\nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon}$ jest spełnione automatycznie.

Kompletny opis takiego ruchu to następujący układ równań i zależności:

- Równanie Transportu Wirowości $\quad \partial_t \omega + \upsilon_1 \partial_1 \omega + \upsilon_2 \partial_2 \omega = \nu \Delta\omega$
- Równanie Poissona dla funkcji prądu $\quad \Delta\psi = -\omega$
- Związek pomiędzy $\boldsymbol{\upsilon}$ i ψ $\quad \upsilon_1 = \partial_2 \psi \;,\; \upsilon_2 = -\partial_1 \psi$
- Definicja wirowości $\quad \omega = \partial_1 \upsilon_2 - \partial_2 \upsilon_1$

uzupełniony odpowiedniki warunkami brzegowymi i warunkiem początkowym.