WYKŁAD 13

IZENTROPOWY RUCH GAZU DOSKONAŁEGO

DYNAMIKA MAŁYCH (AKUSTYCZNYCH) ZABURZEŃ W GAZIE

Rozważmy nieustalony, adiabatyczny, jednowymiarowy ruch gazu nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła. Mamy następujące równania rządzące tym ruchem:

- Równanie zachowania masy $\partial_t \rho + \rho \partial_x u + u \partial_x \rho = 0$
- Równanie ruchu (Eulera) $\rho\left(\partial_t u + u \partial_x u\right) = -\partial_x p$

Załóżmy, że pole przepływu jest ciągłe. Wówczas równanie energii może być zastąpione **warunkiem** $s = const$.

Rozważmy **Pierwszą Zasadę Termodynamiki** zapisaną w następującej formie

$$Tds = \underbrace{c_v dT}_{du - energ.wew.} + p \underbrace{d(1/\rho)}_{d\vartheta - obj.wlasc.}$$

Różniczka zupełna entropii właściwej może być zatem przedstawiona wzorem

$$ds = \frac{c_v}{T} dT - \frac{p}{T\rho^2} d\rho \underset{\substack{\text{równanie} \\ \text{Clapeyrona}}}{=} \frac{c_v}{T} dT - \frac{R}{\rho} d\rho = \frac{c_v}{T} dT - \frac{(\kappa - 1)c_v}{\rho} d\rho$$

Stosując **równanie Clapeyrona** możemy napisać

$$\frac{1}{T}dT = \frac{1}{T}d\left(\frac{p}{R\rho}\right) = \frac{1}{TR}\left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2}d\rho\right) = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}$$

Zatem
$$ds = \frac{c_v}{p}dp - \frac{\kappa c_v}{\rho}d\rho = \frac{c_v}{p}dp - \frac{c_p}{\rho}d\rho$$

Przepływ jest izentropowy, czyli $ds = 0$. Wobec tego

$$\frac{dp}{p} = \kappa\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{s=const} = \kappa\frac{p}{\rho} = \kappa RT \geq 0$$

Widzimy, że **przepływ jest barotropowy** i **pochodna ciśnienia względem gęstości jest zawsze nieujemna**. Możemy wprowadzić wielkość a wzorem

$$a = \sqrt{\kappa RT}$$

Wówczas
$$\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{s=const} = a^2.$$

Zauważmy, że **jednostką fizyczną** wielkości a jest **[m/s]**, zatem wielkość a jest prędkością …. czegoś! Pokażemy dalej, że jest to prędkość rozchodzenia się małych (akustycznych) zaburzeń w gazie, czyli – po prostu – **prędkość dźwięku**.

Wyprowadzimy równania ewolucji małych zaburzeń w gazie. Pola gęstości, ciśnienia, prędkości i – ewentualnie – innych parametrów gazodynamicznych możemy przedstawić jako sumy wielkości niezaburzonych (tła) i niewielkich zaburzeń (oznaczonych symbolami primowanymi). Założymy również, że **stan niezaburzony to jednorodny gaz w spoczynku**. Mamy zatem:

$$\rho = \rho_0 + \rho' \ , \ p = p_0 + p' \ , \ u = u_0 + u' = u'$$

Powyższe wyrażenia wstawiamy do równania zachowania masy i równania ruchu. Ponieważ z założenia $\rho_0 \gg \rho' \ , \ p_0 \gg p' \ , \ u' \ll 1$ to składniki nieliniowe (iloczyny) są zaniedbywalnie małe i mogą być pominięte (taką procedurę nazywamy **linearyzacją równań**).

W efekcie, otrzymujemy liniowe równania dla pola zaburzeń

$$\begin{cases} \partial_t \rho' + \rho_0 \partial_x u' = 0 \\ \rho_0 \partial_t u' + \partial_x p' = 0 \end{cases}$$

Proces termodynamiczny związany z propagacją zaburzeń o bardzo małej amplitudzie jest termodynamicznie odwracalny, czyli izentropowy. Wobec tego, możemy napisać:

$$p = p_0 + p' = p(\rho_0 + \rho') \cong \underbrace{p(\rho_0)}_{p_0} + \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} \rho'$$

Wynika stąd, że

$$p' = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} \rho' = \kappa R T_0 \rho' = a_0^2 \rho'$$

Następny krok polega za zróżniczkowaniu zlinearyzowanego równania zachowania masy względem czasu, a równania ruchu – względem zmiennej x. Tak otrzymane równania odejmujemy stronami, co eliminuje z nich zaburzenia prędkości. W efekcie, otrzymujemy następujące równanie różniczkowe cząstkowe 2-ego rzędu:

$$\partial_{tt}\rho' - a_0^2 \partial_{xx}\rho' = 0$$

Podobnie można otrzymać równanie dla zaburzeń pola prędkości

$$\partial_{tt}u' - a_0^2 \partial_{xx}u' = 0$$

Widzimy, że ewolucja małych zaburzeń w (nieruchomym) gazie opisana jest przez **liniowe równanie falowe.**

Z elementarnej teorii tego równania wynika, że jego rozwiązanie ogólne w całej przestrzeni (1D) dane jest wzorem

$$\rho'(t,x) = F_1(x - a_0 t) + F_2(x + a_0 t)$$

Funkcje F_1 i F_2 są dowolne. Interpretacja fizyczna jest oczywista: **rozwiązanie równania falowego w 1D to suma dwóch zaburzeń o dowolnym kształcie poruszających się bez jego zmiany w przeciwnych kierunkach z tą samą prędkością a_0.**

W ogólnym przypadku 3D, liniowe równanie falowe przyjmuje postać (dla gęstości)

$$\partial_{tt}\rho' - a_0^2\,\Delta\rho' = 0 \quad , \quad \Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$$

Reasumując, małe (akustyczne) zaburzenia w gazie jednorodnym i nieruchomym ewoluują zgodnie z liniowym równaniem falowym. Prędkość ich propagacji (względem ośrodka), czyli prędkość dźwięku, zależy wyłącznie od temperatury tego gazu i dana jest wzorem

$$a_0 = \sqrt{\kappa R T_0}$$

<u>UWAGI</u>:

- W przypadku ogólnego ruchu gazu przyjmuje się, że powyższy obraz propagacji zaburzeń obowiązuje „lokalnie". Oznacza to, że prędkość propagacji zaburzeń akustycznych (dźwięku) zależy od miejsca i czasu, niemniej nadal obowiązuje związek $a = \sqrt{\kappa RT}$ (gdzie T to temperatura lokalna gazu)
- Prędkość dźwięku może być (lokalnie) mniejsza lub większa niż prędkość przepływu. W pierwszym przypadku mówimy o ruchu poddźwiękowym, w drugim – o ruchu naddźwiękowym. Wprowadza się liczbę Macha zdefiniowaną (lokalnie) jako stosunek prędkości przepływu do prędkości dźwięku, tj. $M = V/a$. Wówczas w ruchu poddźwiękowym $M < 1$, a w ruchu naddźwiękowym $M > 1$
- W ogólności, ruch gazu idealnego nie musi być ciągły w przestrzeni. W pewnych warunkach mogą (muszą!) powstawać powierzchnie silnej nieciągłości, na których parametry gazodynamiczne doznają zmian nieciągłych (skokowych). Powierzchnie takie zwane są **falami uderzeniowymi**. **Proces termodynamiczny towarzyszący przepływowi gazy przez falę uderzeniową jest termodynamicznie nieodwracalny, tj. na fali uderzeniowej entropia gazu (skokowo) rośnie.**

RÓWNANIE ENERGII I ZWIĄZKI IZENTROPOWE W GAZIE CLAPEYRONA

Równanie (całka) energii dla ustalonego ruchu gazu idealnego może być zapisane jako

$$i + \tfrac{1}{2}V^2 = const$$

Entalpia właściwa może być wyrażona na kilka sposobów

$$i = c_p T = \tfrac{\kappa}{\kappa - 1} RT = \tfrac{\kappa}{\kappa - 1} p/\rho = \tfrac{1}{\kappa - 1} a^2$$

Liczba Macha: $$M = \frac{V}{a}$$

Parametry całkowite: parametry w punkcie stagnacji (spiętrzenia) tj. tak, gdzie $V = 0$; np. $T_0,\ p_0,\ \rho_0$

Parametry krytyczne: parametry w punkcie krytycznym przepływu, tj. tam, gdzie $V = a \ \ (M = 1)$; e.g. $T_*,\ p_*,\ \rho_*$.

Równoważne formy równania energii

$$c_p T + \tfrac{1}{2}V^2 = c_p T_0$$

$$\frac{\kappa p}{(\kappa-1)\rho} + \tfrac{1}{2}V^2 = \frac{\kappa p_0}{(\kappa-1)\rho_0}$$

$$\frac{a^2}{\kappa-1} + \tfrac{1}{2}V^2 = \frac{a_0^2}{\kappa-1} = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}a_*^2$$

Maksymalna prędkość gazu w ustalonym, adiabatycznym przepływie gazu Clapeyrona (tj. gdy $T \to 0$)

$$c_p T + \tfrac{1}{2}V^2 = c_p T_0 = \tfrac{1}{2}V_{\max}^2 \Rightarrow V_{\max} = \sqrt{2 c_p T_0}$$

Ważny związek …

$$1 + \frac{\upsilon^2}{2 c_p T} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow 1 + \frac{\upsilon^2}{\frac{2}{\kappa-1}a^2} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow 1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2 = \frac{T_0}{T}$$

Zatem $$\frac{T}{T_0}(M) = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2\right)^{-1}$$ **(dla przepływów adiabatycznych !)**

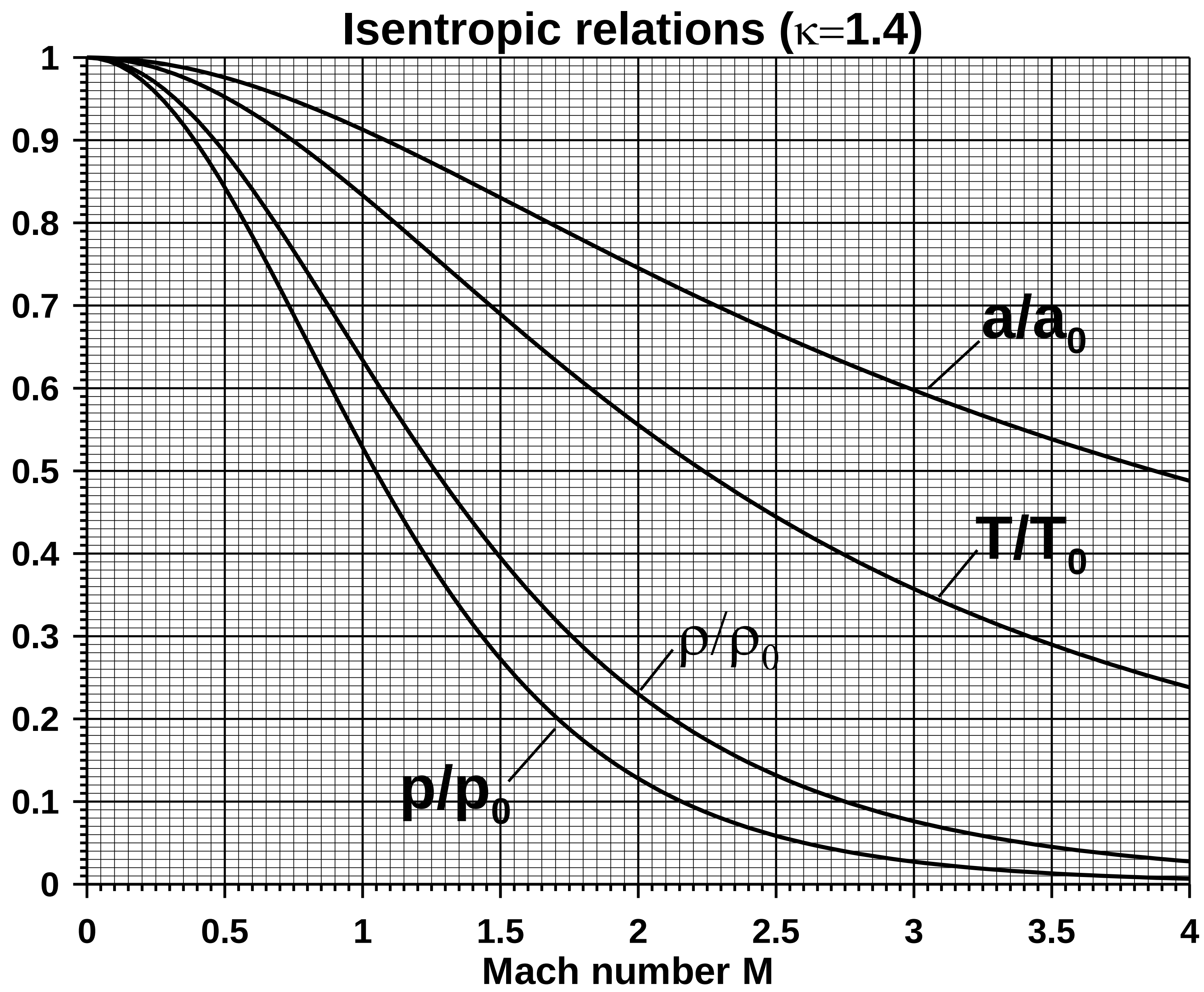
Jeżeli (dodatkowo) **przepływ jest izentropowy** to $p/\rho^{\kappa} = const$. Wówczas posługując się równaniem stanu $p = \rho RT$ można otrzymać **związki izentropowe**, a mianowicie

$$\frac{\rho}{\rho_0}(M) = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{1-\kappa}}$$

$$\frac{p}{p_0}(M) = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}M^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$$

$$\frac{a}{a_0}(M) = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Zwykle posługujemy się tablicami lub wykresami gazodynamicznymi. Oto przykład takiego wykresu ….



Isentropic relations (κ=1.4)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Mach number M
a/a_0
T/T_0
ρ/ρ_0
p/p_0