Strategie instrumentacji w oparciu o model zredukowany POD

Wojciech Gryglas
Opiekun: dr hab. inż. Jacek Szumbarski

7 kwietnia 2017

Politechnika Warszawska, Wydział MEiL, Zakład Aerodynamiki

Dlaczego planowanie eksperymentu?

- Liczba punktów pomiarowych jest zawsze ograniczona.
- Intuicja zawodzi w przypadku złożonych problemów.
- Ograniczenie błędu pomiarowego.
- Uzyskanie jak największej ilości informacji.

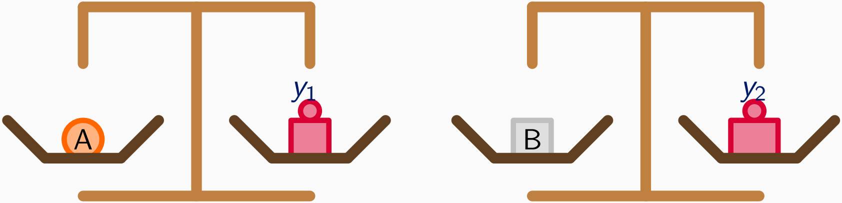
Rozważmy problem pomiaru wagi obiektów $A, B, C, \ldots$, których dokładna waga jest określona jako $m_A, m_B, m_C, \ldots$

Przyjmijmy następujące założenie:

1. Każdy pomiar jest obarczony losowym błędem.
2. Średnia błędów jest równa zero.
3. Odchylenie standardowe rozkładu prawdopodobieństwa błędu jest takie samo dla każdego pomiaru i jest równe σ
4. Błędy pomiędzy pomiarami są niezależne

Kryterium dla optymalnej instrumentacji II

Dokonujemy pomiaru oddzielnie dla obiektu A oraz B



Oznaczmy wyniki pomiarów jako y_1 i y_2 oraz przyjmijmy, że $\sigma = 0.1$:

$$\begin{aligned} y_1 &= m_A \pm \sigma \\ y_2 &= m_B \pm \sigma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_A &= y_1 \pm \sigma \\ m_B &= y_2 \pm \sigma \end{aligned}$$

Wariancja błędu oszacowania m_A i m_B jest równa σ^2.

Kryterium dla optymalnej instrumentacji III

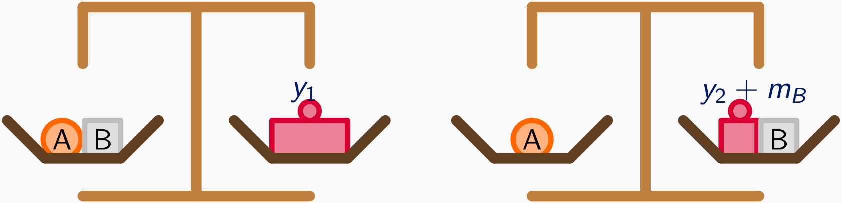
Pomiar możemy zapisać w formie macierzowej:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

gdzie:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} m_A \\ m_B \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma \end{bmatrix}$$

Rozważmy przypadek pomiaru dokonanego w nieznacznie inny sposób:



$$\begin{aligned} m_A + m_B \pm \sigma &= y_1 \\ m_A - m_B \pm \sigma &= y_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_A &= \tfrac{1}{2}(y_1 \pm \sigma) - \tfrac{1}{2}(y_2 \pm \sigma) \\ m_B &= \tfrac{1}{2}(y_1 \pm \sigma) + \tfrac{1}{2}(y_2 \pm \sigma) \end{aligned}$$

$$var(m_A) = var(m_B) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$m_A = y_1 - y_2 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = y_1 - y_2 \pm 0.7\sigma \qquad m_B = y_1 + y_2 \pm 0.07\sigma$$

Ponownie, zapisując pomiar w formie macierzowej $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$ otrzymujemy

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Okazuje się, że obniżenie wariancji estymowanych parametrów jest ściśle związane z macierzą $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$:

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \quad vs \quad det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 4$$

Macierz $\mathbf{M} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ nazywa się Macierzą informacji Fishera.

Dlaczego macierz M jest taka ważna

Jeśli obserwacje pochodzące z eksperymentu są modelowane jako:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{a} + \varepsilon$$

$$E[\varepsilon] = 0 \qquad cov(\varepsilon) = E[\varepsilon\varepsilon^T] = \sigma^2\mathbf{I}$$

to estymator parametrów modelu (w sensie najmniejszych kwadratów) będzie miał postać:

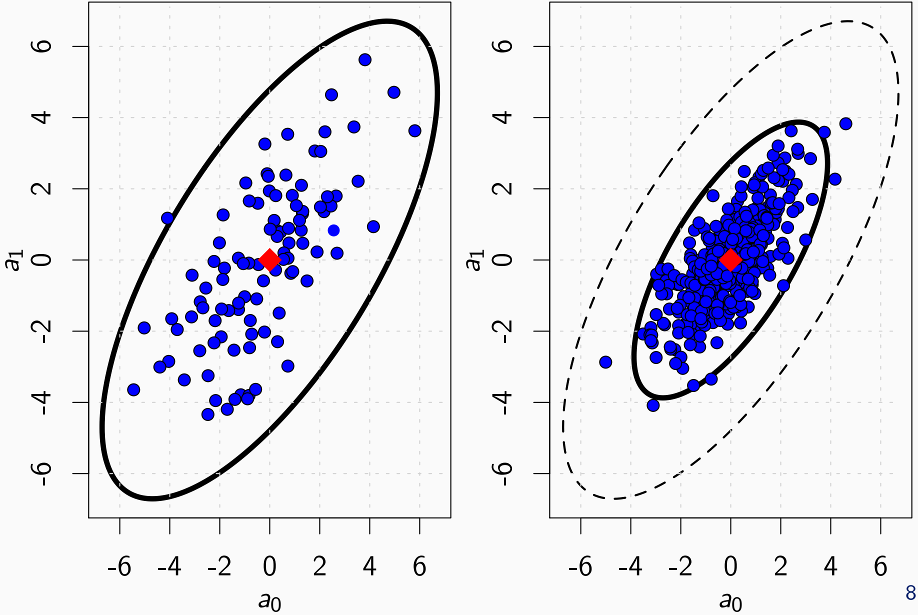
$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$$

Estymator $\hat{\mathbf{a}}$ jest także zmienną losową, dla którego:

$$cov(\hat{\mathbf{a}}) = \sigma^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$$

która określa rozproszenie $\hat{\mathbf{a}}$ wokół poszukiwanej wielkości $\mathbf{a}$

Elipsoida niepewności



$$\mathbf{M} = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$$

- *A-optimum*: najmniejsza średnia długość elipsoidy niepewności.

$$\Psi(M) = tr(M^{-1})$$

- *D-optimum*: najmniejsza objętość elipsoidy niepewności.

$$\Psi(M) = log(det(M^{-1}))$$

- *E-optimum*: minimalizacja większej osi elipsoidy niepewności.

$$\Psi(M) = \lambda_{max}(M^{-1})$$

Kryterium statystyczne a punkty pomiarowe I

- Model liniowy opisujący przykładowe zjawisko można zapisać:

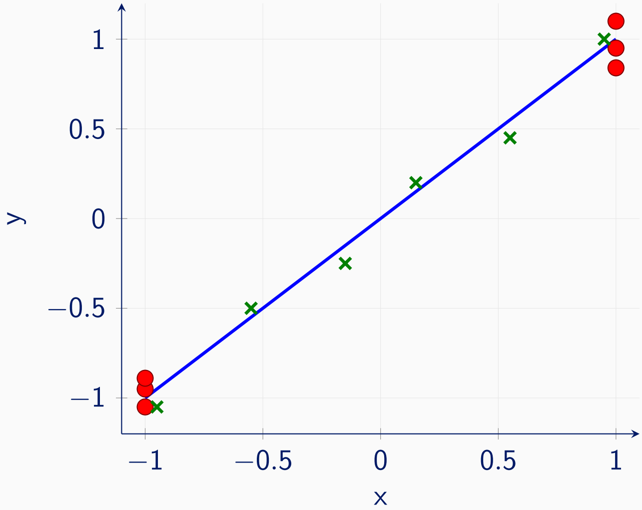
$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{a} + \varepsilon$$

  Y - dane pomiarowe, **a** - współczynniki modelu, **X** - stałe związane z modelem, ε - błąd losowy.
- Najprostszy model $y = a_0 + a_1 \cdot x$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

  gdzie $x_0, \ldots, x_N$ odpowiadają lokalizacji punktów pomiarowych.
- Co najmniej 2 równania są potrzebne aby wyznaczyć **a**. Wybór odpowiednich wierszy z macierzy **X** pozwala kontrolować dokładność oszacowania **a**.

Kryterium statystyczne a punkty pomiarowe II



A - optimum:

$$\Psi = tr(M^{-1}) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2}{(x_1 - x_2)^2}$$

Najmniejszej wartości Ψ odpowiada para $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$

Sprawdzenie

Wariancja estymatora parametru a_1 dla dwóch pomiarów $(N = 2)$ można obliczyć jako:

$$Var(\hat{a}_1) = \frac{1}{\Delta x^2}[Var(y_2) + Var(y_1)] = \frac{2}{\Delta x^2}\sigma^2$$

Najmniejszej wartości wariancji estymatora a_1 odpowiadają pozycje $x_1 = -1$ and $x_2 = 1$.

Zarys metody

1. Wykonaj N obliczeń numerycznych pokrywających dopuszczalną przestrzeń parametrów (np.: różne kąty natarcia, prędkości wlotowe).
2. Utwórz model zredukowany bazując na wykonanych obliczeniach.
3. Skorzystaj z modelu w celu obliczenia kryterium statystycznego.
4. Wybierz punkty pomiarowe, tak aby wartość kryterium statystycznego była najmniejsza.
5. Wykonaj eksperyment i zbierze dane ze wskazanych punktów pomiarowych.
6. Zrekonstruuj pole przepływu wykorzystując model zredukowany i dane eksperymentalne.

Symulacja CFD $\rightarrow$model liniowy $\rightarrow$optymalizacja $\rightarrow$eksperyment + model liniowy $\rightarrow$rekonstrukcja.

Wymagania modelu liniowego:

- Jak najbardziej ogólny.
- Stabilny numerycznie.

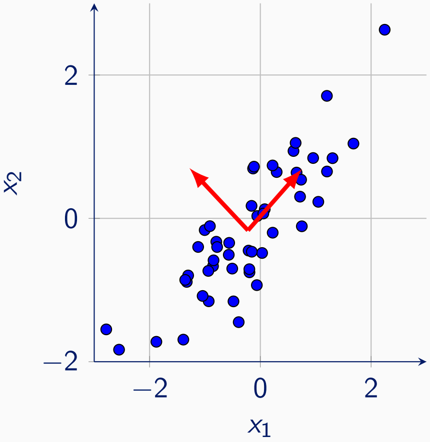
Model zredukowany w oparciu o metodę Proper Orthogonal Decomposition:

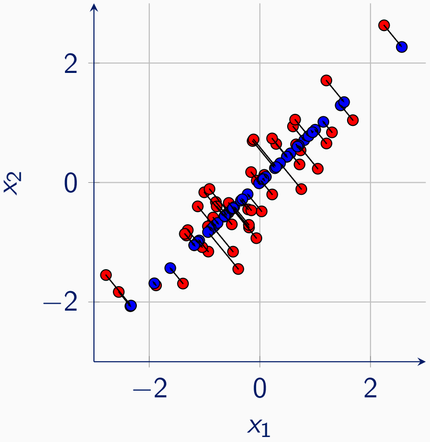
$$\mathbf{V} = [\mathbf{V_1}, \ldots, \mathbf{V_n}] \approx \left[\sum_{i=0}^{m} \mathbf{M_i} \cdot \beta_{1i}, \ldots, \sum_{i=0}^{m} \mathbf{M_i} \cdot \beta_{ni}\right]$$

$\mathbf{M_i}$ - wektory bazowe uzyskane za pomocą POD.

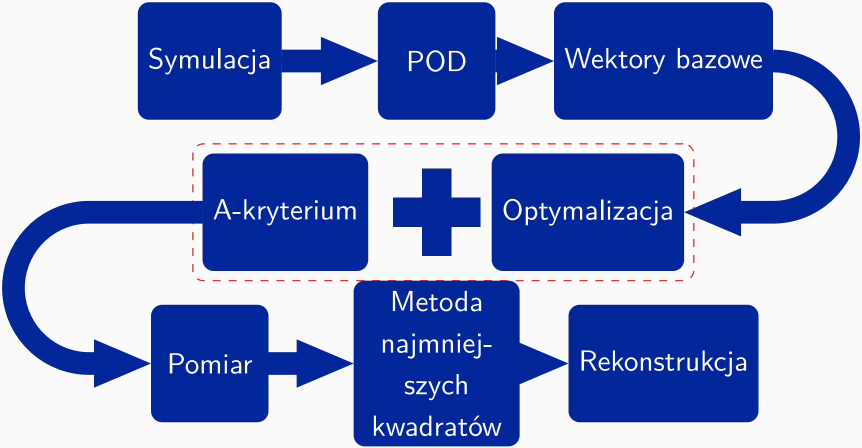
Analiza Głównych Składowych (POD, PCA) II

$Y_i = [x_{1i}, x_{2i}]$ *vs* $Y_i \approx \vec{M} \cdot a_i$





Algorytm


Symulacja
POD
Wektory bazowe
A-kryterium
Optymalizacja
Pomiar
Metoda najmniej-szych kwadratów
Rekonstrukcja

Krok optymalizacji

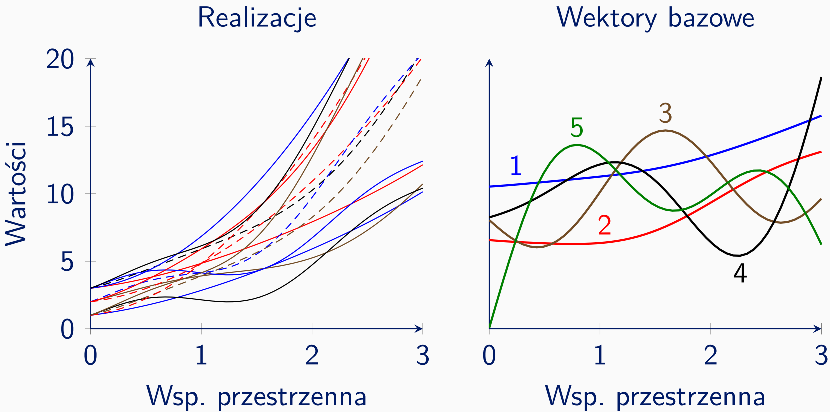
1. Wybierz p punktów z P dostępnych, rozłożonych możliwie najbardziej równomiernie.
2. Wybierz jeden punkt z p i oblicz A-kryterium dla wszystkich dostępnych położeń zdefiniowanych przez P.
3. Wskaż nową pozycję dla rozważanego punktu tak aby odpowiadająca mu wartość A-kryterium była najmniejsza.
4. Przejdź do następnego punktu ze zbioru p i powtórz obliczenia z punktów 2 i 3 do momentu aż minimalna wartość A-kryterium zostanie osiągnięta.

Zastosowanie metody dla przykładowego, jednowymiarowego problemu

Zastosowanie do problemu jednowymiarowego I

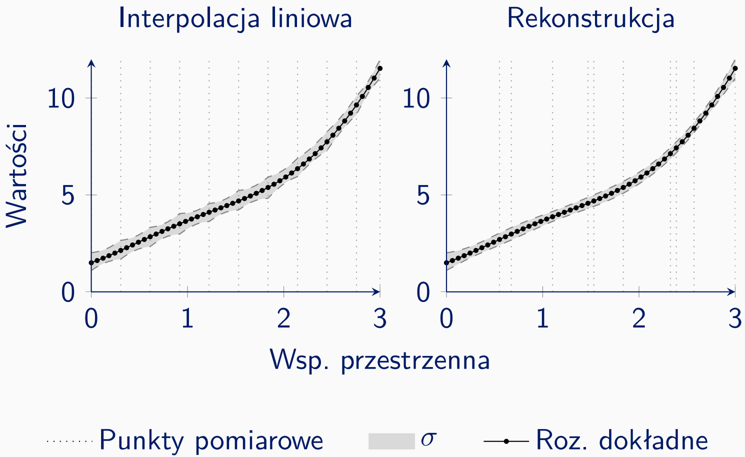
$$y = a \cdot x^2 + sin(b \cdot x) + c$$

$$a, b, c = \{1, 2, 3\}$$



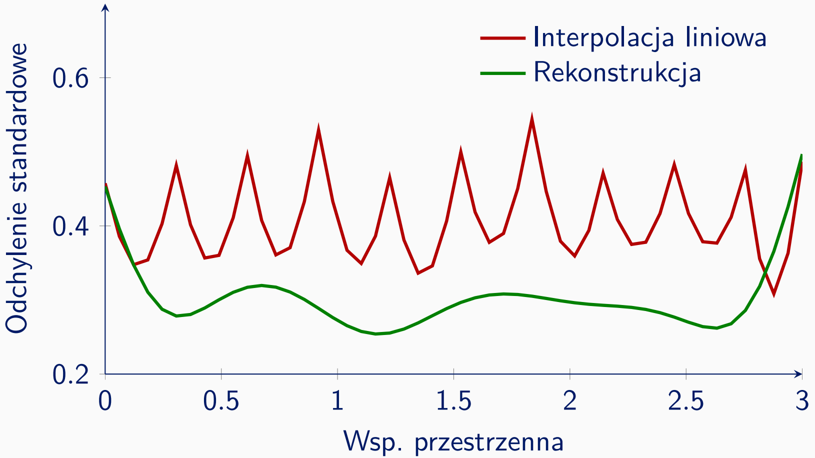
Zastosowanie do problemu jednowymiarowego II

$a = 1.2$ $b = 1.8$ $c = 1.5$



Odchylenie standardowe - przykładowy problem

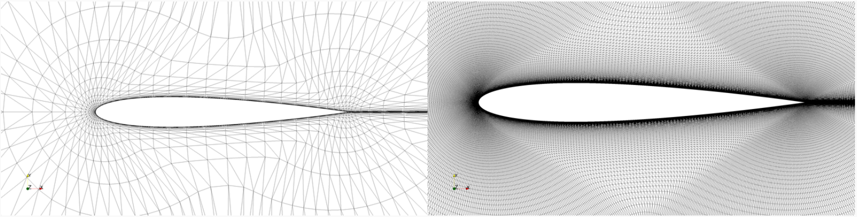
$a = 1.2$ $b = 1.8$ $c = 1.5$



Walidacja metody w oparciu o dane pochodzące ze sztucznego eksperymentu

Sztuczny eksperyment

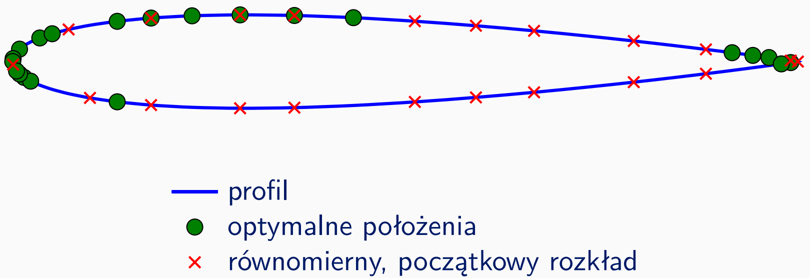
- Obliczenia numeryczne na siatce gęstej - imitacja danych eksperymentalnych poprzez dodanie losowego błędu.
- Obliczenia na siatce rzadkiej - dane do optymalizacji instrumentacji.
- Rekonstrukcja pola przepływu w oparciu o dane zebrane z obliczeń na siatce gęstej w wyznaczonych punktach.



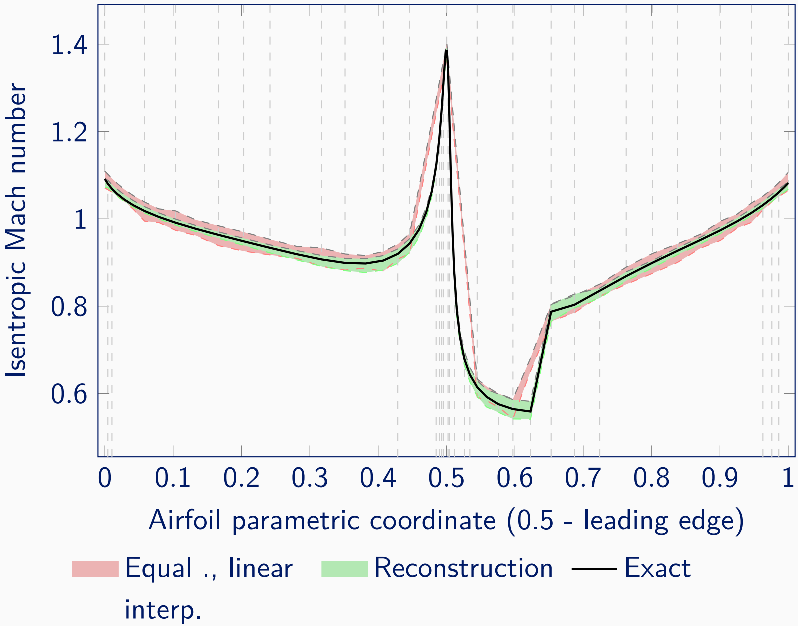
Optymalizacja vs Wirtualny eksperyment

- Kąty natarcia: $1.2^o - 3.2^o$
- Zakres liczb Macha: 0.2 - 0.7

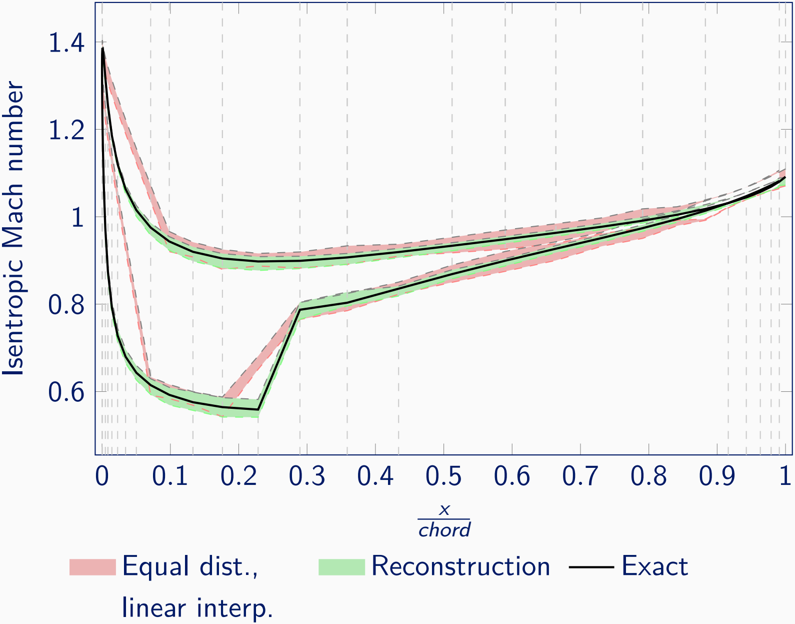
Rozkład punktów pomiarowych dla profilu naca0012



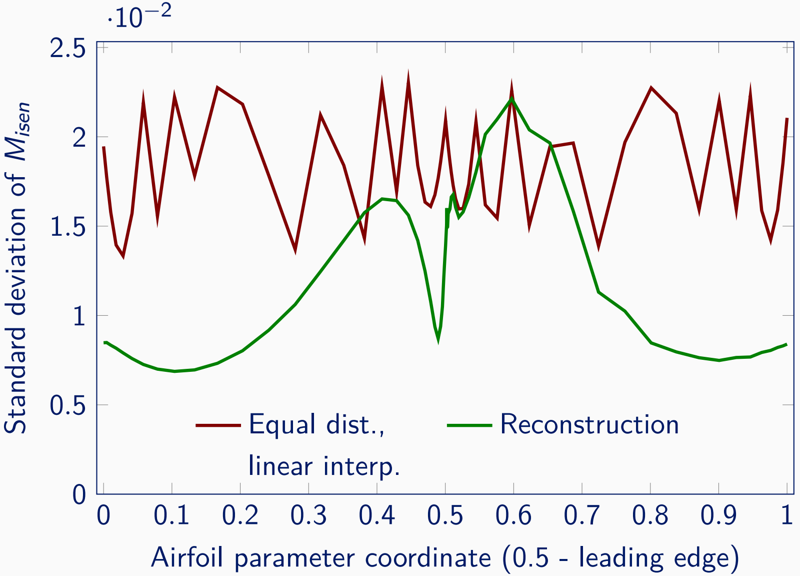
Rekonstrukcja profilu $\alpha = 2.2,\ M_{out} = 0.7$



Rekonstrukcja profilu $\alpha = 2.2,\ M_{out} = 0.7$



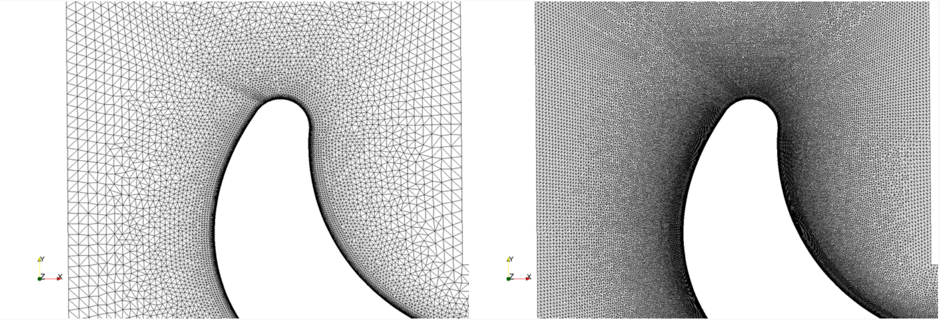
Odchylenie standardowe $\alpha = 2.2$, $M_{out} = 0.7$



Wpływ liczby wektorów bazowych

Wpływ liczby punktów pomiarowych

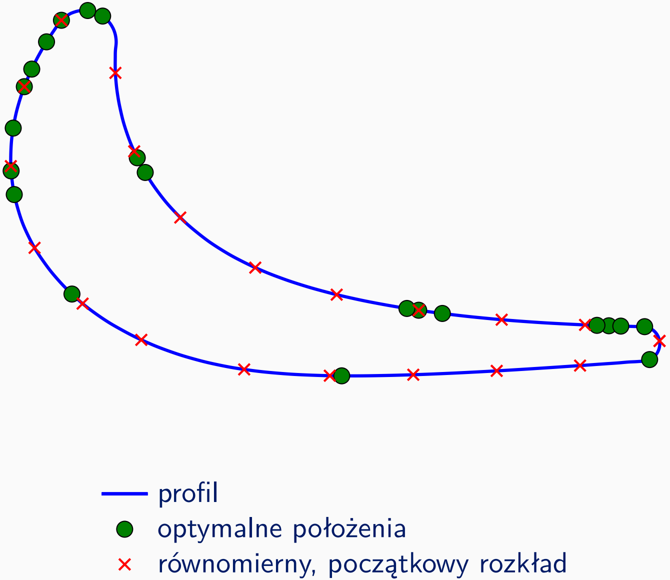
Kaskada łopatek turbiny



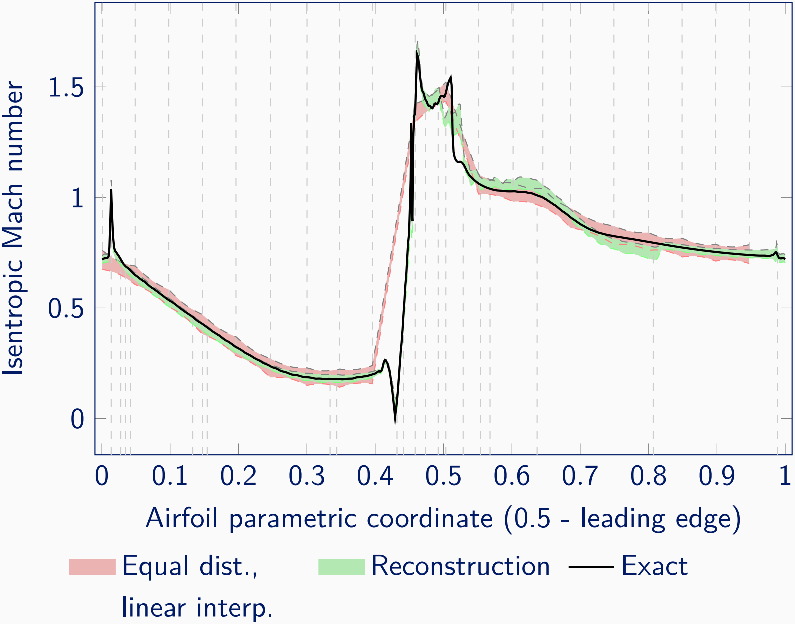
Optymalizacja vs Wirtualny eksperyment

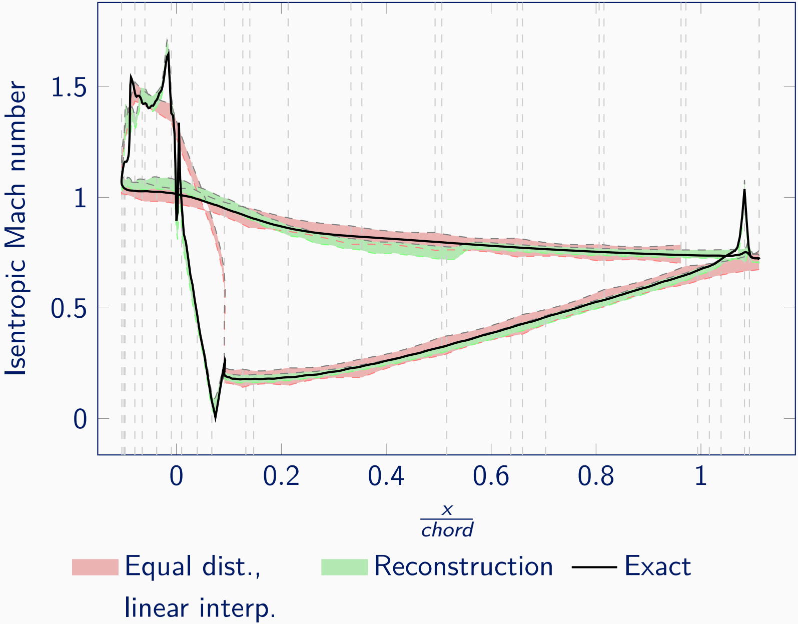
- Zakres kątów natarcia: $0^o - 25^o$
- Zakres liczb Macha: 0.38 - 0.9

Rozkład wybranych punktów pomiarowych na łopatce

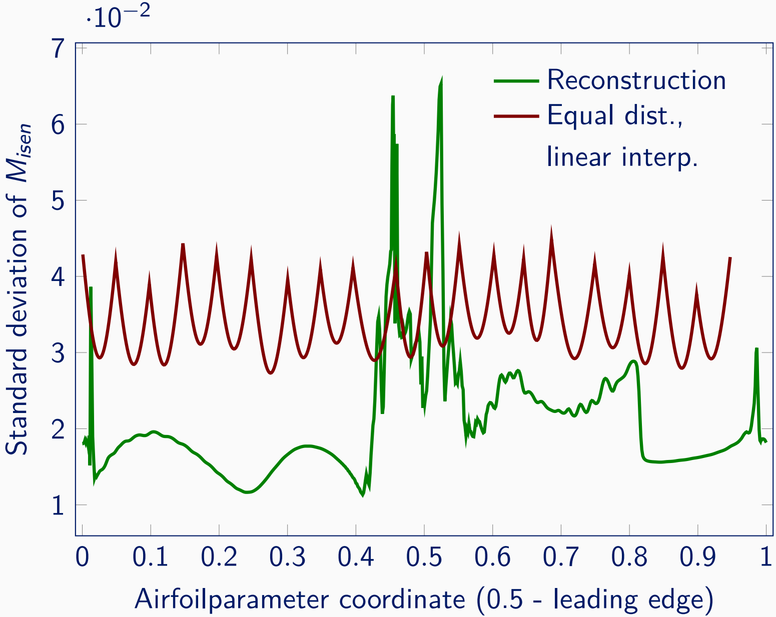


Rekonstrukcja profilu $\alpha = 26^o$, $M_{out} = 0.7$

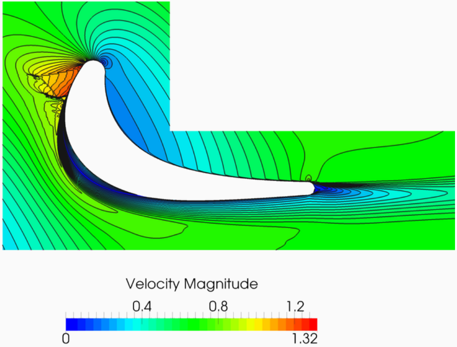



Isentropic Mach number
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$\frac{x}{chord}$
Equal dist., linear interp.
Reconstruction
Exact

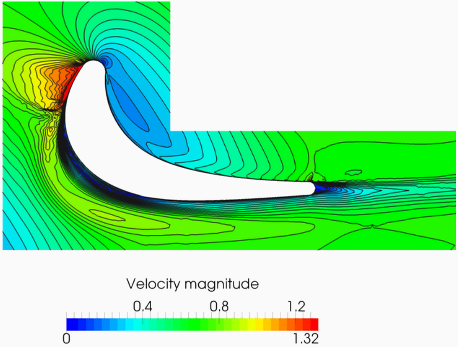
Odchylenie standardowe $\alpha = 26^o$, $M_{out} = 0.7$



Rekonstrukcja pola przepływu



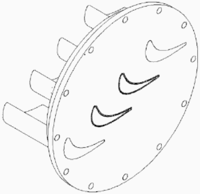
Założone pole przepływu

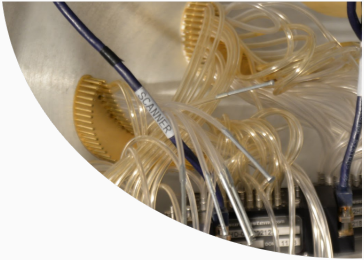


Pole pochodzące z rekonstrukcji

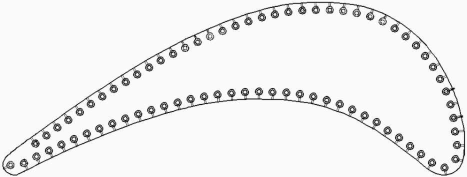
Walidacja metody w oparciu o dane eksperymentalne

Eksperyment





Eksperyment - 69 punktów pomiaru ciśnienia

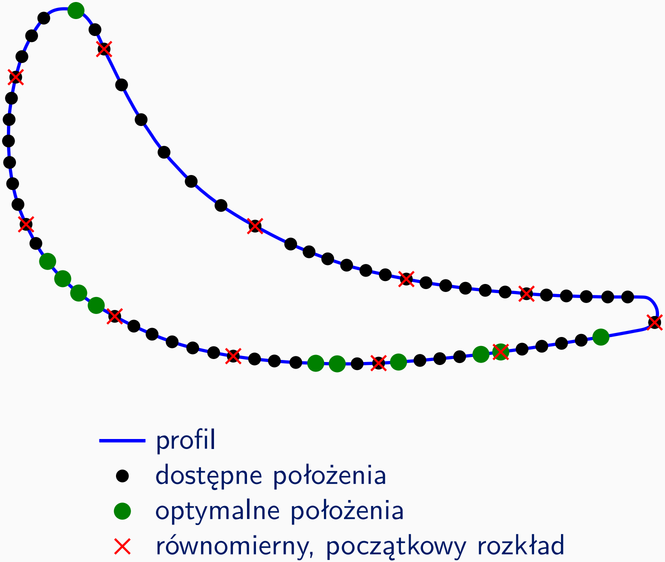


Optymalizacja

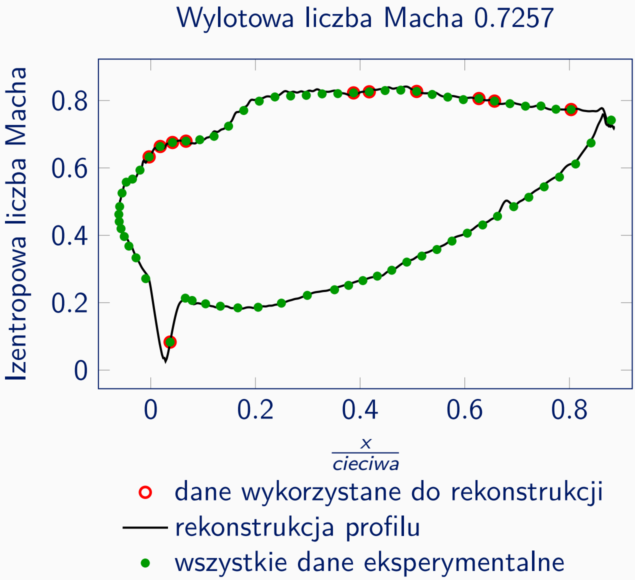
- Wybór 11 optymalnych punktów pomiarowych z dostępnych 69
- Model zredukowany POD (5 wektorów bazowych - 5 parametrów) w oparciu o dane obliczeniowe pochodzące z 200 konfiguracji
- Dane przygotowane dla zmiennego kąta natarcia i liczby macha na wlocie

Przypadek poddźwiękowy

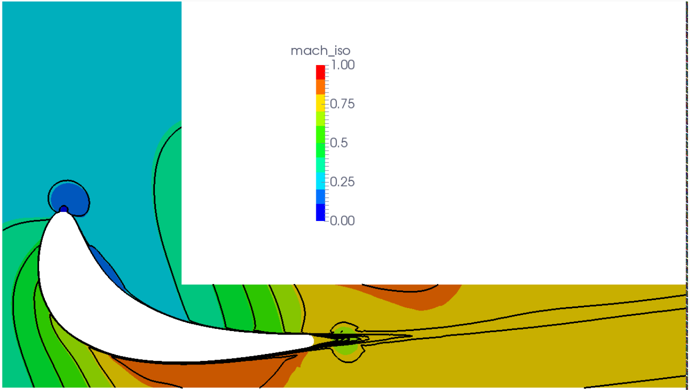
Rozkład punktów pomiarowych



Rekonstrukcja rozkładu liczby Macha na łopatce



Rekonstrukcja pola przepływu

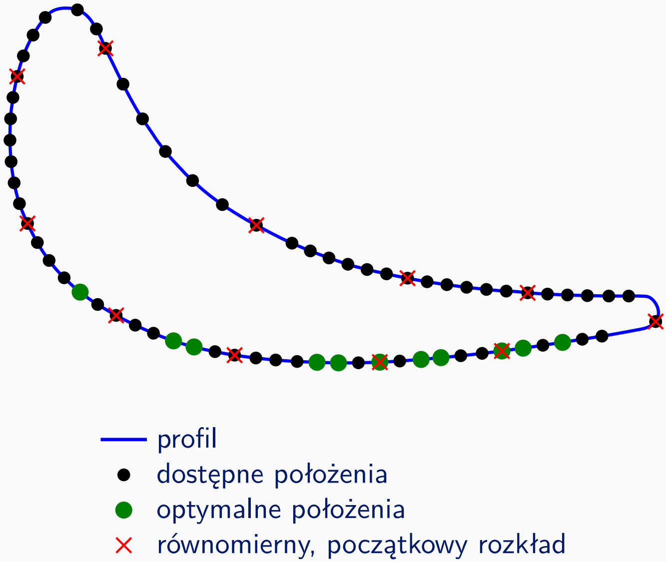


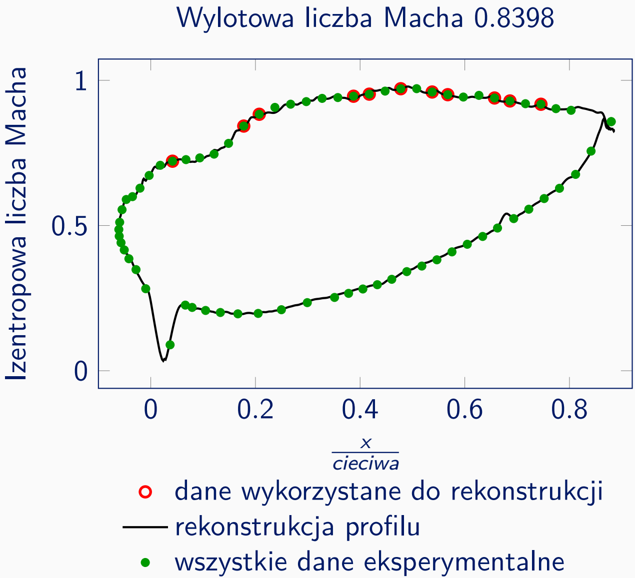
Liczba Macha na wylocie 0.737

- Wypełnienie - rekonstrukcja
- Kontury - najbliższe rozwiązanie numeryczne z punktu widzenia warunków eksperymentu

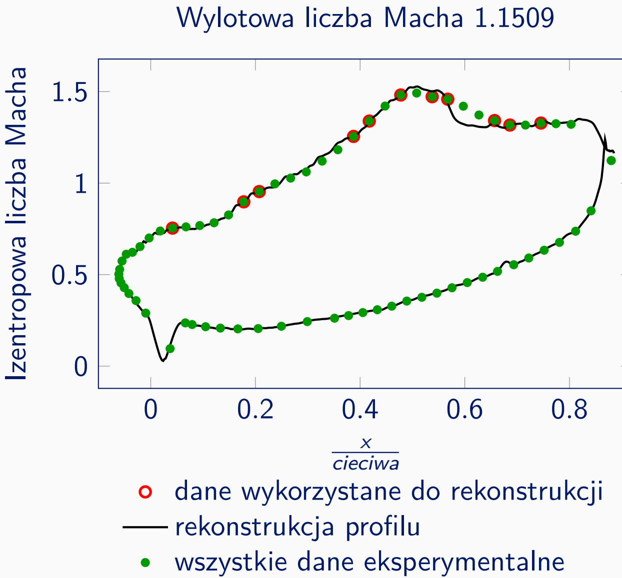
Przypadek pod- i naddźwiękowy na raz

Rozkład punktów pomiarowych




Wylotowa liczba Macha 0.8398
Izentropowa liczba Macha
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
$\frac{x}{cieciwa}$
dane wykorzystane do rekonstrukcji
rekonstrukcja profilu
wszystkie dane eksperymentalne

Rekonstrukcja rozkładu liczby Macha na łopatce



Podsumowanie

- Zaproponowana metoda pozawala na wybór punktów pomiarowych, tak aby wariancja błędu była zminimalizowana.
- Dzięki zastosowaniu modelu opartego na POD metoda jest ogólna i może być szeroko stosowana do wielu innych problemów.
- Przeprowadzone testy potwierdzają poprawne działanie metody.
- Model zredukowany POD pozawala dodatkowo odtworzyć całe pole przepływu.

Podziękowania

Poniższa praca została wykonana w ramach programu COOPERNIK finansowanego przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju.

Badania otrzymały wsparcie Wydziału MEiL za pośrednictwem "Grantu dziekańskiego".

Dziękuję za uwagę