Politechnika Warszawska | Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa | Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Wykład 3

Ramy

Zasada prac przygotowanych

Wyznaczanie przemieszczeń metodą siły jednostkowej

Wprowadzenie

Na WK1 wyznaczaliśmy przemieszczenia szukając korzystając z funkcji:

$$u(x)=\int_0^x \varepsilon(x)dx \qquad \varphi(x)=\int_0^x \theta(x)dx \qquad w''(x)=\frac{Mg(x)}{EJ}$$

Teraz zrobimy to inaczej: metoda siły jednostkowej, pozwala określić **d**owolną składową **d**owolnego przemieszczenia w **d**owolnym miejscu konstrukcji (**DDD**)! *(prosta i elegancka)*

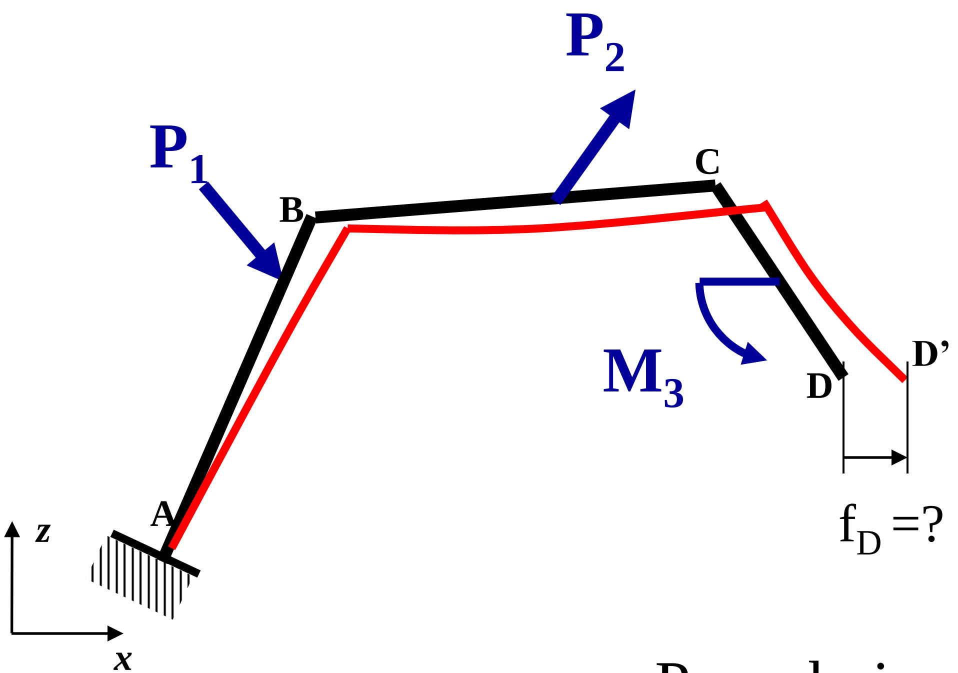
➔ **Zasada prac przygotowanych** (wirtualnych)

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi układu materialnego jest, by praca wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych na dowolnym przesunięciu przygotowanym była równa zero.

Przesunięcie przygotowane ➔ małe przemieszczenie zgodne z narzuconymi więzami

Metoda siły jednostkowej (Maxwella- Mohra)

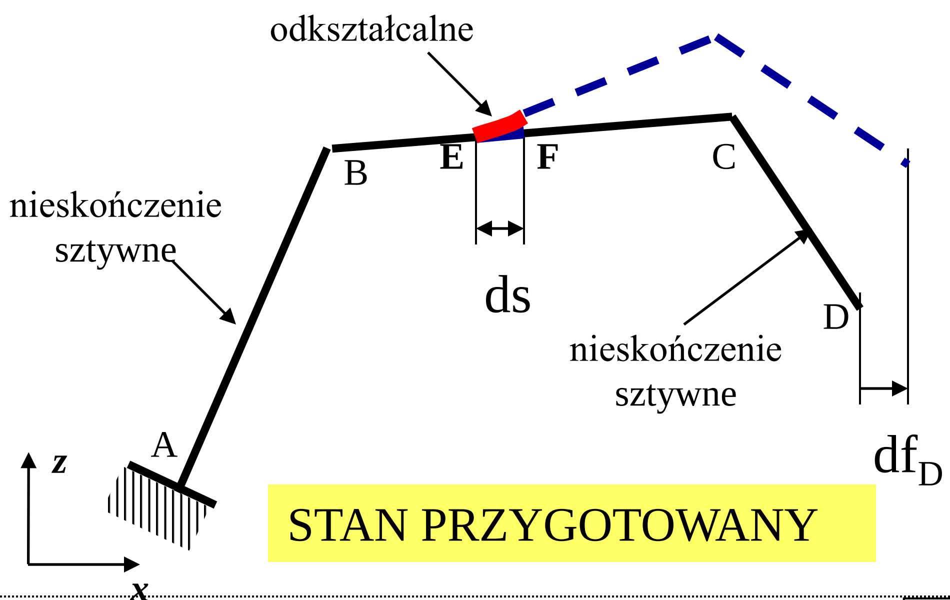
Rama dowolnie obciążona



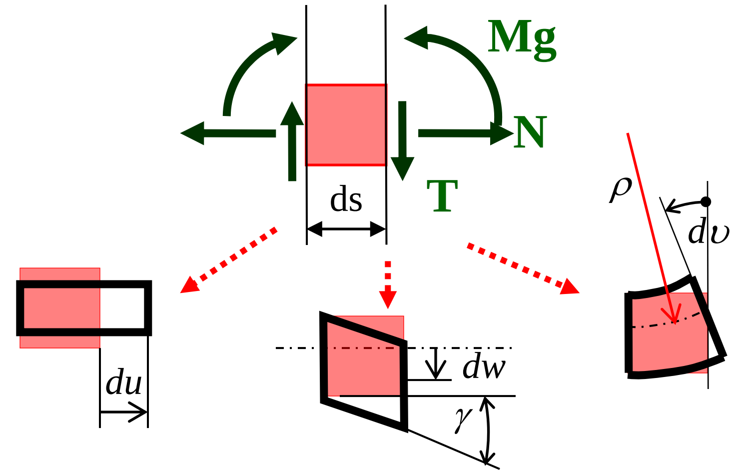
f_D =?

Poszukujemy przemieszczenia f_D

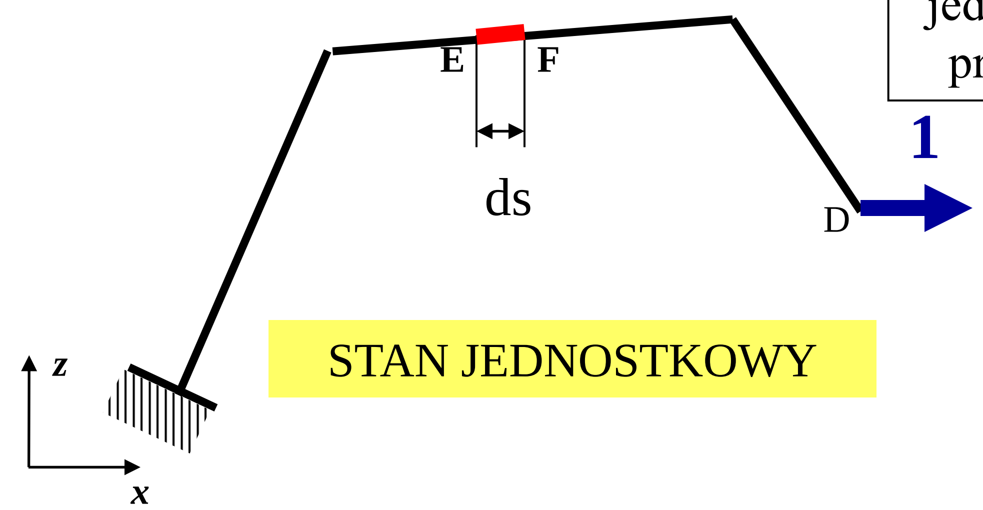
Metoda siły jednostkowej (Maxwella- Mohra)

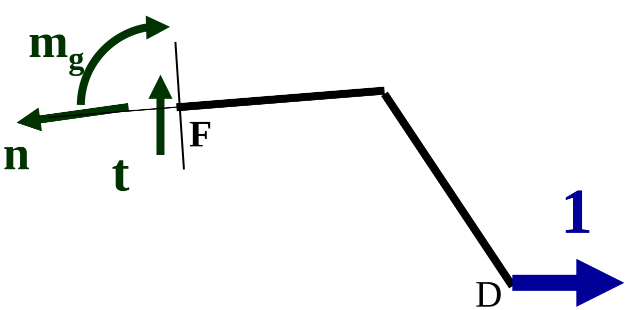


Znajdziemy przemieszczenie df_D wywołane odkształceniem elementu ds (EF)

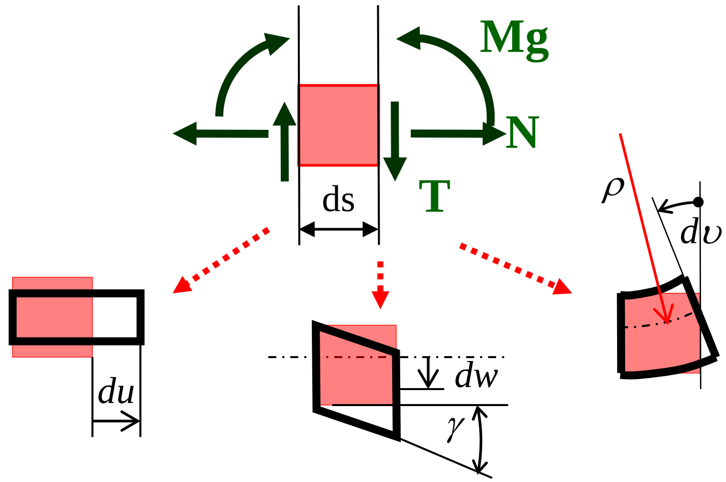


Obciążymy teraz tę samą ramę obciążeniem jednostkowym, takim które działa w kierunku przemieszczenia, które chcemy wyznaczyć.

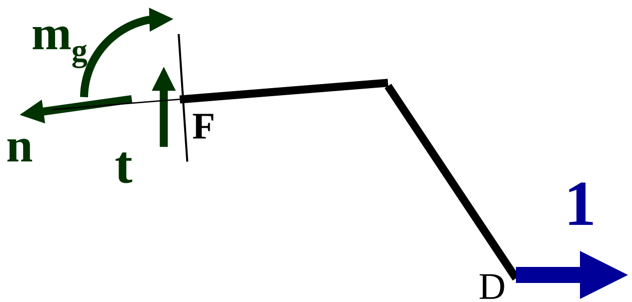




Metoda siły jednostkowej (Maxwella- Mohra)



STAN PRZYGOTOWANY



STAN JEDNOSTKOWY

Warunek równowagi przy użyciu zasady **PP**:

$$\boxed{1\cdot df_D - n\cdot du - t\cdot dw - m_g\cdot d\upsilon = 0}$$

Siła zewnętrzna ***1**N* działa na przemieszczeniu przygotowanym ***df*_D** a siły wewnętrzne ***n,t,m***, działają na przem. przygotowanych ***du, dw, dυ***

Cała rama się odkształca!

$$\boxed{f_D = \int_l n\cdot du + \int_l t\cdot dw + \int_l m_g\cdot d\upsilon}$$

Wzór ogólny (dowolna konstrukcja, dowolne przyczyny, dowolne zachowanie materiału)

Metoda siły jednostkowej (Maxwella- Mohra)

$$f_D = \int_l n \cdot du + \int_l t \cdot dw + \int_l m_g \cdot d\upsilon$$

Wzór ogólny (dowolna konstrukcja, dowolne przyczyny, dowolne zachowanie materiału)

Dla konstrukcji prętowej liniowo sprężystej:

$$du = \varepsilon_x \cdot ds = \frac{N}{AE} ds$$

$$dw = \gamma \cdot ds = \psi \frac{T}{AG} ds$$

$$d\upsilon = w'' \cdot ds = \frac{1}{\rho} ds = \frac{M_g}{EJ} ds$$

<u>Ostatecznie dla ramy ściśle płaskiej:</u>

$$f = \int_l \frac{N \cdot n}{EA} \cdot ds + \cancel{\psi \int_l \frac{T \cdot t}{GA} \cdot ds} + \int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ} \cdot ds$$

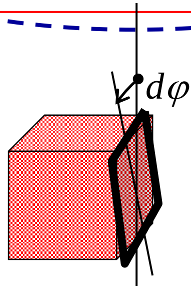
$$f \cong \int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ} \cdot ds + \int_l \frac{N \cdot n}{EA} \cdot ds$$

<u>Dla ramy przestrzennej:</u>

Można pominąć (mały udział <1%)

$$f = \int_l \frac{N \cdot n}{EA} \cdot ds + \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds + \int_l \frac{M_z \cdot m_z}{EJ_z} \cdot ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} \cdot ds + \cancel{\psi_z \int_l \frac{T_z \cdot t_z}{GA} \cdot ds + \psi_y \int_l \frac{T_y \cdot t_y}{GA} \cdot ds}$$

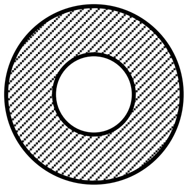
$$f \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds + \int_l \frac{M_z \cdot m_z}{EJ_z} \cdot ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} \cdot ds + \int_l \frac{N \cdot n}{EA} \cdot ds$$



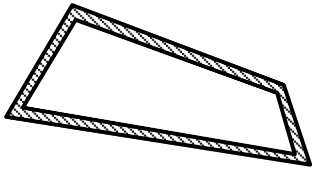
$$d\varphi = \frac{M_s}{GJ_s} ds$$

Metoda siły jednostkowej (Maxwella- Mohra)

$$f \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds + \int_l \frac{M_z \cdot m_z}{EJ_z} \cdot ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} \cdot ds + \int_l \frac{N \cdot n}{EA} \cdot ds$$



$$J_S = J_o = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$$



$$J_S = \frac{4F^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$$

$$J_S = \tfrac{1}{3}\sum s_i \delta_i^3$$

Dla ram przestrzennych:

$$f \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds + \int_l \frac{M_z \cdot m_z}{EJ_z} \cdot ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} \cdot ds$$

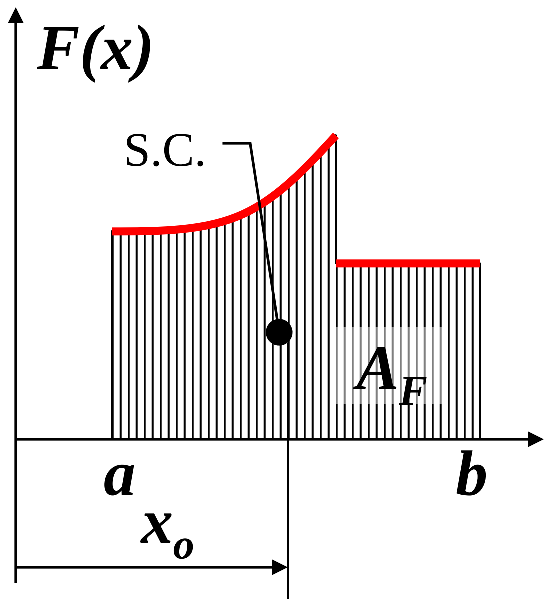
Dla ram ściśle płaskich:

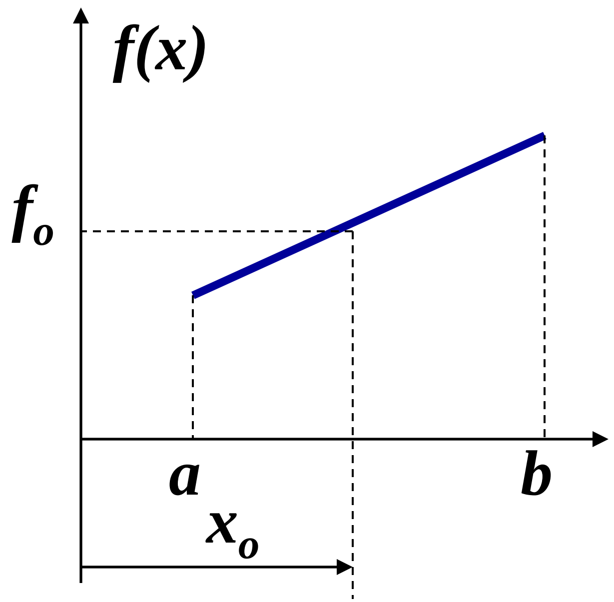
$$f \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds$$

Dla kratownic:

$$f = \int_l \frac{N \cdot n}{EA} \cdot ds = \sum_1^n \frac{N_i \cdot n_i \cdot l_i}{EA_i}$$

Twierdzenie Wereszczagina





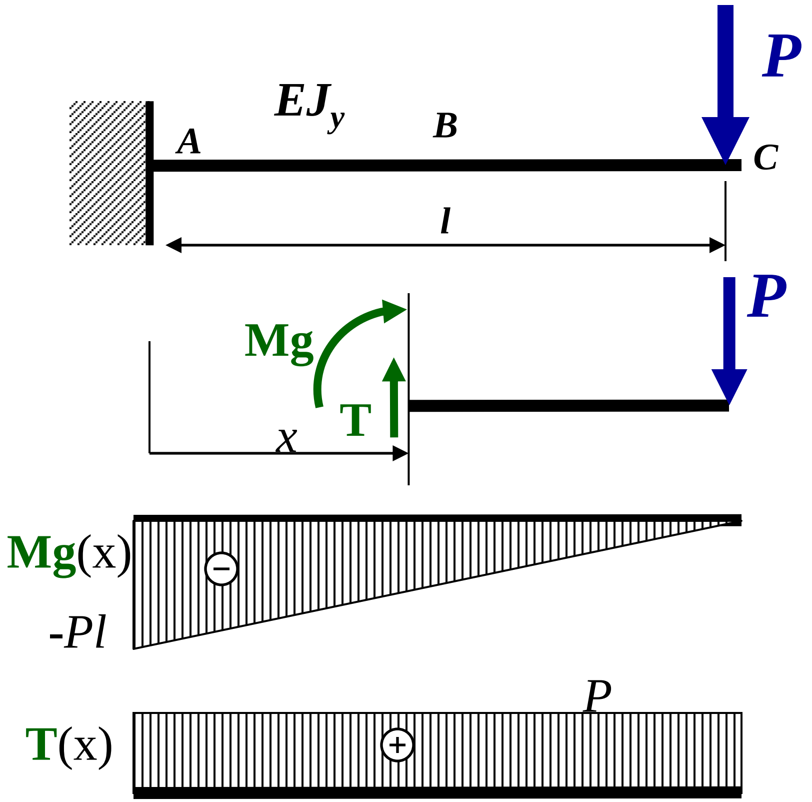
(Liniowa i ciągła)

$$\int_a^b F(x)\cdot f(x)\cdot dx \overset{\boxed{\text{t.W.}}}{=} A_F \cdot f_o$$

Zad.1a. Belka wspornikowa obciążona siłą *P*

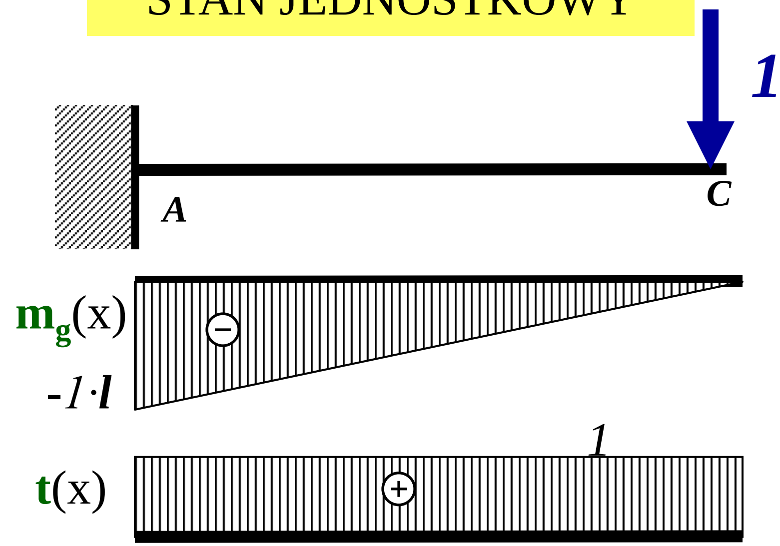
Dane: P=1,5kN, l=2m, EJ_y=100kNm^2

Znaleźć ugięcie końca belki (w punkcie C)



STAN PRZYGOTOWANY

STAN JEDNOSTKOWY

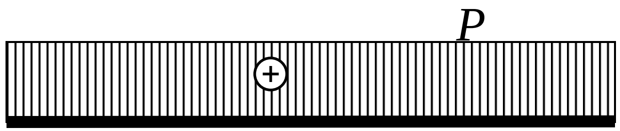


t.W.

$$f_C \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{-Pl \cdot l}{2}\right) \cdot \tfrac{2}{3}(-l) = \boxed{\frac{Pl^3}{3EJ_y}} = \frac{1500 \cdot 2^3}{3 \cdot 100 \cdot 10^3} = 0{,}04m$$

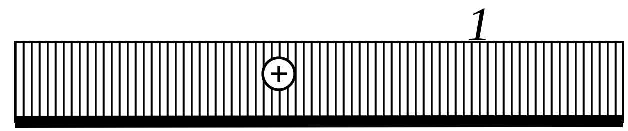
Sprawa pominiętego członu od siły tnącej

T(x)



STAN PRZYGOTOWANY

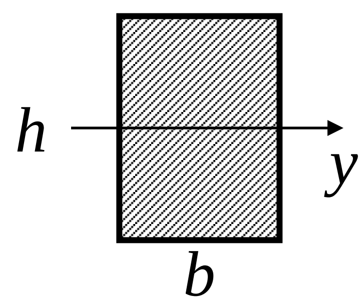
t(x)



STAN JEDNOSTKOWY

$$f_C = \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds + \psi \cdot \int_l \frac{T \cdot t}{GA} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{-Pl \cdot l}{2}\right) \cdot \tfrac{2}{3}(-l) + \psi \frac{1}{GA} \cdot P \cdot l \cdot 1 =$$

$$= \frac{Pl^3}{3EJ_y} + \psi \frac{P \cdot l}{GA} \quad = \frac{Pl^3}{3EJ_y}\left(1 + \psi \frac{l}{GA} \cdot \frac{3EJ_y}{l^3}\right)$$



$$= \frac{Pl^3}{3EJ_y}\left(1 + \psi \frac{l}{\frac{E}{2(1+\upsilon)} b \cdot h} \cdot \frac{3E\,\frac{bh^3}{12}}{l^3}\right) =$$

$$\frac{Pl^3}{3EJ_y}\left(1 + \psi \frac{(1+\upsilon)}{2} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2\right) \quad = \frac{Pl^3}{3EJ_y}\left(1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{(1+0{,}3)}{2} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2\right) \quad \boxed{= \frac{Pl^3}{3EJ_y}(1+\alpha)}$$

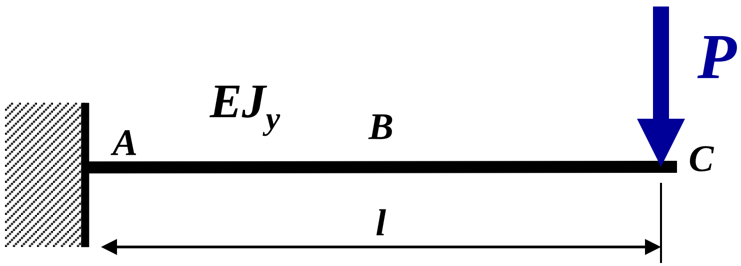
Dla stali i ***l* > *10h*** ➔ α=*0.0078 (0,78%)*

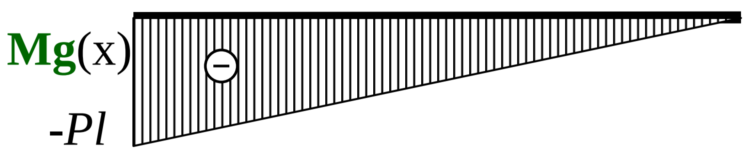
Dla stali i ***l* > *20h*** ➔ α=*0.00195 (0,2%)*

$$\boxed{f_C \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds}$$

Zad.1b. Belka wspornikowa obciążona siłą ***P***

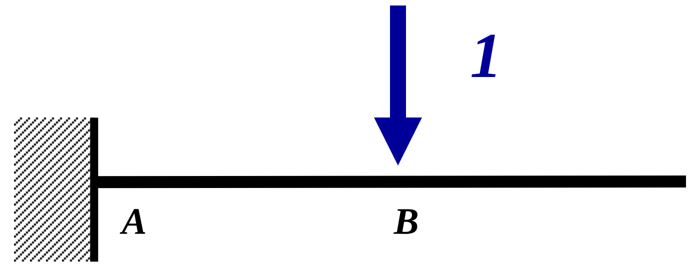
Znaleźć ugięcie w połowie długości belki (w punkcie B)

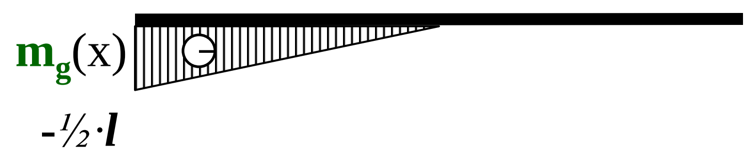




STAN PRZYGOTOWANY

STAN JEDNOSTKOWY

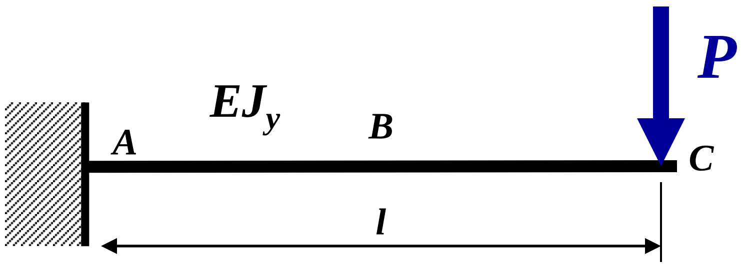




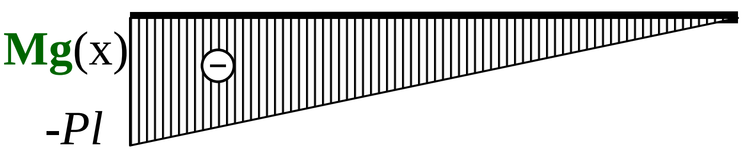
$$f_B \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds \quad \overset{\boxed{\textbf{t.W.}}}{=} \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{-\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}}{2}\right)\cdot\tfrac{5}{6}\left(-Pl\right) = \boxed{\frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EJ_y}} = \frac{5}{48}\cdot\frac{1500\cdot 2^3}{100\cdot 10^3} \boxed{= 0{,}0125m}$$

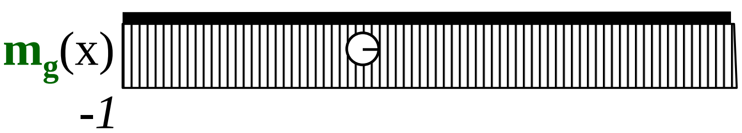
Zad.1c. Belka wspornikowa obciążona siłą ***P***

Znaleźć kąt ugięcia na końcu belki (w punkcie C)



STAN JEDNOSTKOWY

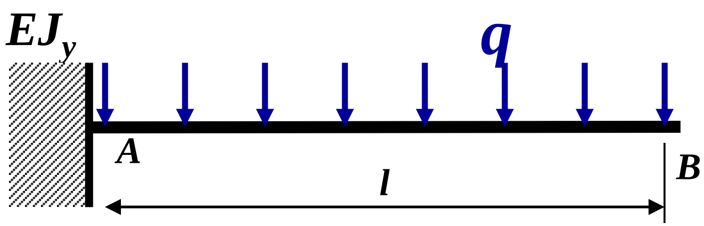


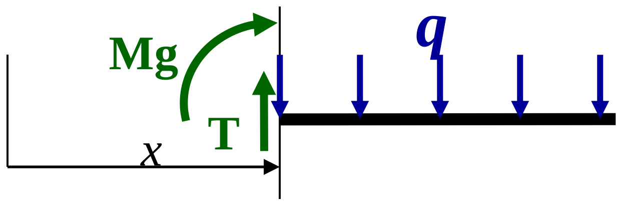


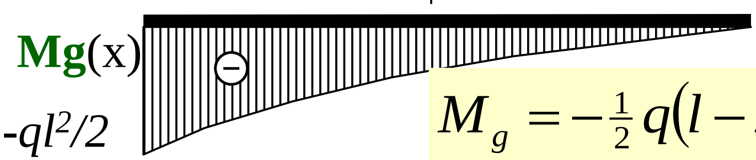
STAN PRZYGOTOWANY

$$\vartheta_C \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds \overset{\boxed{\text{t.W.}}}{=} \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{-Pl \cdot l}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{Pl^2}{2EJ_y} = \frac{1500 \cdot 2^2}{2 \cdot 100 \cdot 10^3} = 0{,}03 rad$$

Zad.2a. Belka wspornikowa obciążona stałym wydatkiem *q*







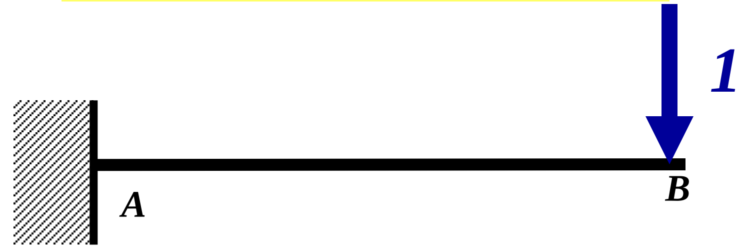
$$M_g = -\tfrac{1}{2} q (l-x)^2$$

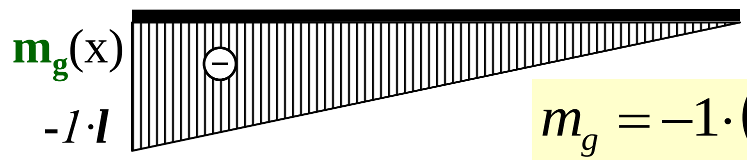
STAN PRZYGOTOWANY

Dane: ***q*, *l*, *EJ*$_y$**

Znaleźć ugięcie końca belki (w punkcie B)

STAN JEDNOSTKOWY



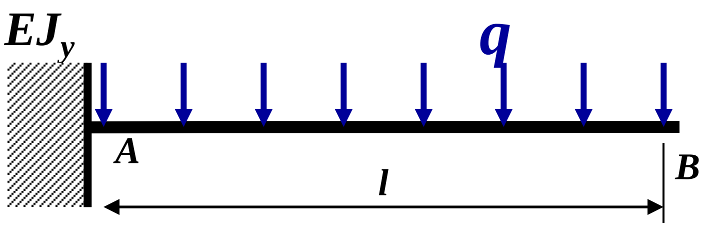


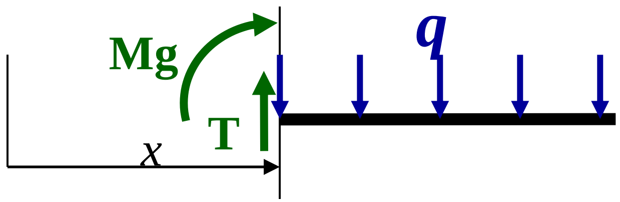
$$m_g = -1 \cdot (l-x)$$

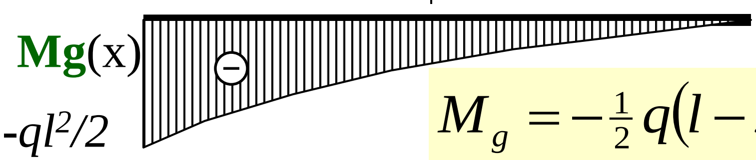
$$f_B \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \int_0^l -\tfrac{1}{2} q (l-x)^2 \cdot \left(-1 \cdot (l-x)\right) dx = \frac{q}{2EJ_y} \int_0^l (l-x)^3 \, dx =$$

$$= -\frac{q}{8EJ_y} (l-x)^4 \Big|_0^l = \boxed{\frac{ql^4}{8EJ_y}}$$

Zad.2b. Belka wspornikowa obciążona stałym wydatkiem q







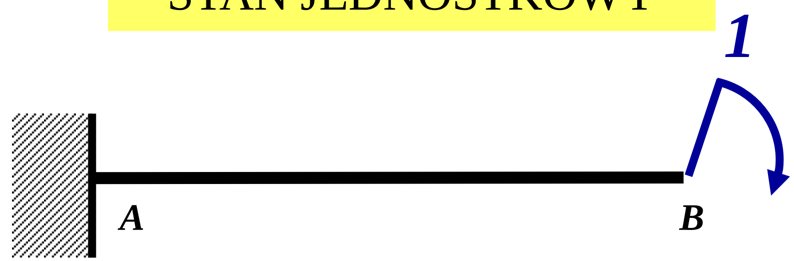
$$M_g = -\tfrac{1}{2} q (l-x)^2$$

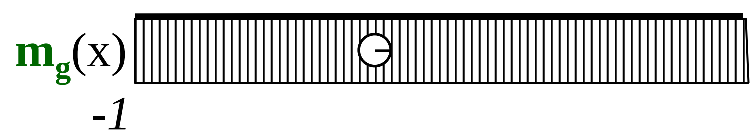
STAN PRZYGOTOWANY

Dane: q, l, EJ_y

Znaleźć kąt ugięcia na końcu belki (w punkcie B)

STAN JEDNOSTKOWY





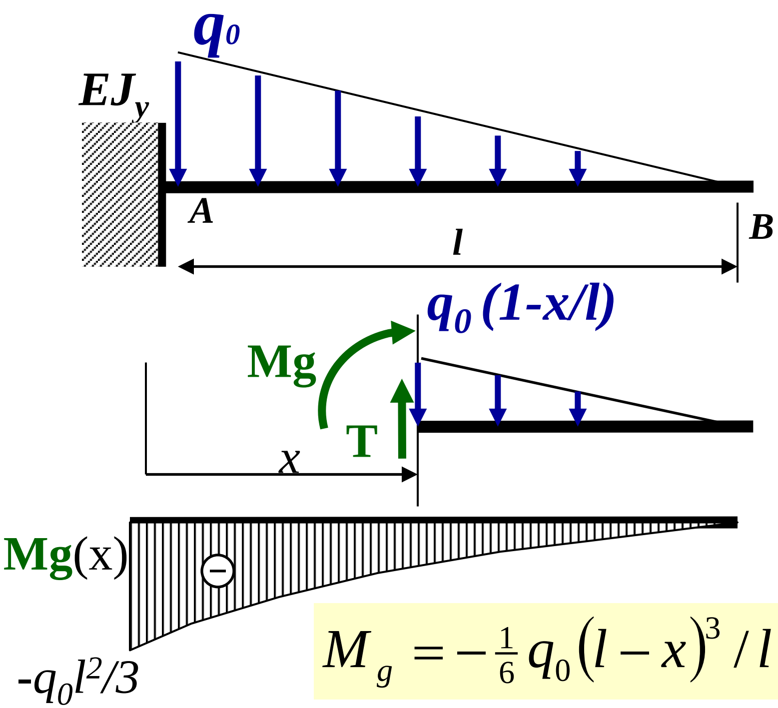
$$\upsilon_B \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \int_0^l -\tfrac{1}{2} q (l-x)^2 \cdot (-1)\, dx = \frac{q}{2EJ_y} \int_0^l (l-x)^2\, dx =$$

$$= -\frac{q}{6EJ_y} (l-x)^3 \Big|_0^l = \boxed{\frac{ql^3}{6EJ_y}}$$

Zad.3. Belka wspornikowa obciążona stałym wydatkiem *q*

Dane: ***q*, *l*, EJ_y**

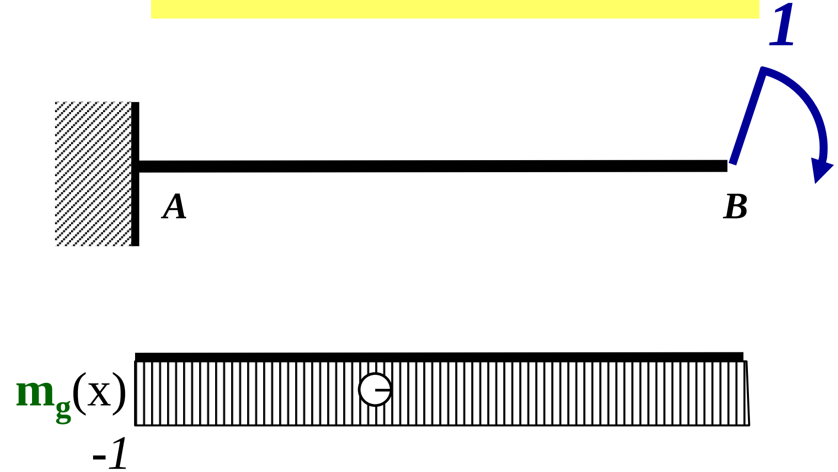
Znaleźć kąt ugięcia na końcu belki (w punkcie B)



$$M_g = -\tfrac{1}{6}\,q_0\left(l-x\right)^3/\,l$$

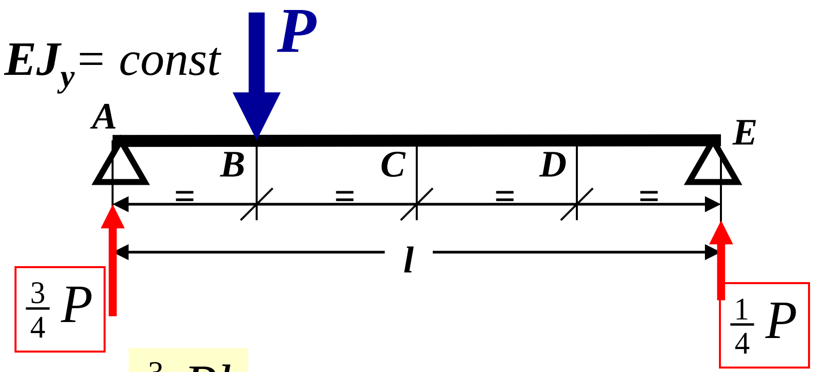
STAN PRZYGOTOWANY

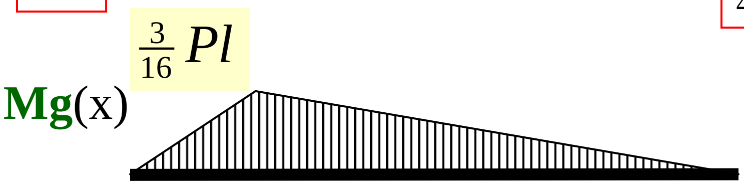
STAN JEDNOSTKOWY



$$\upsilon_B \cong \int_l \frac{M_y \cdot m_y}{EJ_y}\cdot ds \quad = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l -\tfrac{1}{6}\,q_0\left(l-x\right)^3/\,l\cdot\left(-1\right)dx \quad = ???$$

Zad.4. Belka oparta na dwóch podporach i obciążona siłą ***P w*** ¼ swej długości

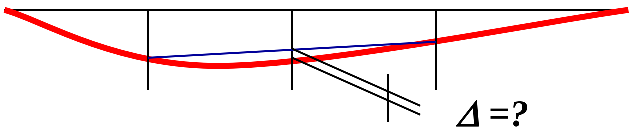




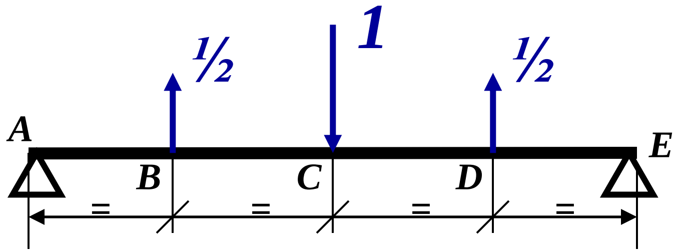
STAN PRZYGOTOWANY

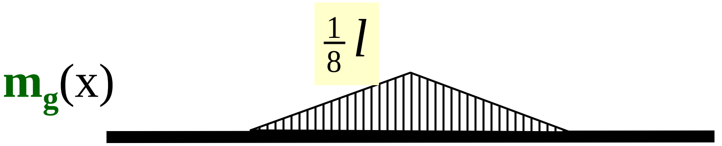
Dane: ***P***, ***l***, ***EJ$_y$***

Znaleźć pionowe przesunięcie p.C względem prostej przechodzącej przez p. B i D.



STAN JEDNOSTKOWY





$$\Delta = u_C - \tfrac{1}{2}\left(u_B + u_D\right) = 1 \cdot u_C - \tfrac{1}{2} \cdot u_B - \tfrac{1}{2} \cdot u_D \overset{\text{t.W.}}{\cong} \frac{1}{EJ_y}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}l \cdot \tfrac{1}{8}l\right) \cdot \tfrac{2}{3}\tfrac{3}{16}Pl = \boxed{\frac{Pl^3}{256EJ_y}}$$