



METODY NUMERYCZNE: INSTRUKCJA 5

CAŁKOWANIE RÓWNIANIA RUCHU

Na tych laboratoriach skupimy się na scałkowaniu równania ruchu:

$$M\ddot{x} = F - Sx$$

Gdzie x to odkształcenie, M to macierz masowa, zaś S to macierz sztywności. Na początek przez y oznaczymy prędkość odkształcenia, czyli $y = \dot{x}$. Teraz mamy układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} My\dot{y} = F - Sx \\ \dot{x} = y \end{cases}$$

Zastępując pochodną po lewej stronie przez różnicę skończoną mamy:

$$\begin{cases} M \frac{y_{n+1} - y_n}{dt} = F - Sx \\ \frac{x_{n+1} - x_n}{dt} = y \end{cases}$$

Po prawej stronie równania możemy użyć x i y z nowej ($n+1$), bądź starej (n) iteracji. W zależności co użyjemy otrzymamy mniej lub bardziej uwikłane równanie, a schemat będzie jawny (explicit) bądź niejawny (implicit). Uwaga: by porównać różne schematy, każdy schemat napisz w nowej funkcji, która powinna brać następujące argumenty: `void Dynamics(int n, double * x, double * y, double T, double dt);`, gdzie x i y to początkowe wartości x i y , T to całkowity czas całkowania, a dt to krok czasowy.

1 Schemat prawie jawny (almost explicit)

Na początek wstawmy po prawej stronie wartości ze starej iteracji. Otrzymamy:

$$\begin{cases} My_{n+1} = My_n + dt(F - Sx_n) \\ x_{n+1} = x_n + dty_n \end{cases}$$

Zadanie 1 *Napisz funkcję mnożącą przez macierz masową. W pliku MesLib.h jest ona zdefiniowana w analogiczny sposób jak macierz sztywności: przez macierz M i stałą Mm . UWAGA: W mnożeniu przez macierz masową, należy także zamrozić wybrane stopnie swobody.*

Zadanie 2 *Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu wg. następującego schematu:*

- Oblicz $b = My + dt(F - Sx)$
- Oblicz $x = x + dty$
- Rozwiąż układ: $My = b$
- Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

Zadanie 3 *Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny, a dla jakich nie.*

Zadanie 4 *Jak wygląda wzór na całkowitą energię układu (energia potencjalna sprężystości + praca sił + energia kinetyczna)? Zróżniczkuj ją po t i pokaż, że jest stała*

Zadanie 5 *Wydrukuj w konsoli jak zmienia się całkowita energia układu w czasie.*

2 Schemat pół niejawny (semi-implicit)

Prostą modyfikacją jest użycie po prawej stronie x ze starej iteracji i y z nowej, otrzymując:

$$\begin{cases} My_{n+1} = My_n + dt(F - Sx_n) \\ x_{n+1} = x_n + dty_{n+1} \end{cases}$$

Zadanie 6 *Zmodyfikuj kod rozwiązując układ na y przed modyfikacją x -a.*

Zadanie 7 *Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.*

3 Schemat niejawny (fully-implicit)

Możemy także po prawej stronie wziąć obie wartości z nowej iteracji, otrzymując:

$$\begin{cases} My_{n+1} = My_n + dt(F - Sx_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n + dty_{n+1} \end{cases}$$

Wstawiając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dty_{n+1}))$$



Przekształcając:

$$(M + dt^2 S)y_{n+1} = My_n + dt(F - Sx_n)$$

Zadanie 8 Napisz funkcję mnożącą przez $M + dt^2 S$

Zadanie 9 Zmodyfikuj kod, by realizował schemat w pełni niejawny, zamieniając macierz M na $M + dt^2 S$ w obliczeniu y -ka

Zadanie 10 Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

4 W pół kroku (midpoint)

Ostatnia z omówionych metod bierze po prawej stronie średnią z wartości w nowej i starej iteracji:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - S\frac{x_{n+1}+x_n}{2}) \\ x_{n+1} &= x_n + dt\frac{y_{n+1}+y_n}{2} \end{cases}$$

Po wstawieniu drugiego równania do pierwszego mamy:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S\frac{x_n + dt\frac{y_{n+1}+y_n}{2} + x_n}{2})$$

Przekształcając:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dt\frac{y_{n+1} + y_n}{4}))$$

Ostatecznie:

$$(M + \frac{dt^2}{4}S)y_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dt\frac{y_n}{4}))$$

Zadanie 11 Napisz funkcję mnożącą przez $M + \frac{dt^2}{4}S$

Zadanie 12 Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu wg. następującego schematu:

- Oblicz $x = x + \frac{dt}{4}y$
- Oblicz $b = My + dt(F - Sx)$

- Oblicz $x = x + \frac{dt}{4}y$
- Rozwiąż układ: $(M + \frac{dt^2}{4}S)y = b$
- Oblicz $x = x + \frac{dt}{2}y$
- Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

Zadanie 13 Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

Zadanie 14 Udowodnij, że metoda pół kroku zachowuje energię układu.¹

¹Podpowiedź: tak jak $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ to $x_{n+1}^T M x_{n+1} - x_n^T M x_n = (x_{n+1} - x_n)^T M (x_{n+1} + x_n)$