

Znane sformułowanie równań ruchu, ciępowości i energii mogą być zastosowane do opisu szeregowych przypadków przepływu ciekły, gazów, zwiastin, aerostatu, ielów itp. wiodnych w zastosowaniach technicznych i fizycznych.

Tak się składa, że ogólne sformułowanie, polegające na rozważeniu opisanego wyżej układu równań z odpowiednimi warunkami brzoowymi i początkowymi, jest rozwiązaniem nadzwyczaj skomplikowanym.

Równanie to nieliniowe, układ ma wysoki rząd, pojęcie się niestętności prowadzące do powstania turbulencji i - w rezultacie nie wiadomo - w jaki sposób określić zbiór zaburzeń zewnętrznych stymulujących zmiany turbulentne. Wprowadzenie wielkości uśrednionych dla całego ruchu wymaga określenia warunków pomijanych wielkościami średnimi a uśrednionymi iloczynami fluktuacji. Wielkości uśrednione są oddzielone (odfiltrowane) od fluktuacji. Średnie iloczyny tych wielkości można określić na podstawie doświadczalnych hipotez, zależnych od ruchu. Tym samym hipotezy te (mówimy: hipotezy domniemania) nie są uniwersalne.

Z tych - i jeszcze wielu nie wymienionych - powodów formułuje się uproszczone teorie ruchów płynów.

Uproszczenie dotyczy właściwości fizycznych i cech kinematycznych badanego płynu i jego ruchu.

Ważnym klasycznym problemem tworzy zadanie wyznaczenia **opływu bryły**.

Należy wyznaczyć siłę i moment siły działające na bryłę umieszczoną w strumieniu ciekły lub gazu. Nie można tego obliczyć bez wyznaczenia pola prędkości i ciśnienia.

Trudniej to pole określić jednostkową siłę powierzchniową i, w efekcie, po wykonaniu całkowania na całej opływanej powierzchni bryły, wyznaczyć całkowitą siłę i jej moment.

Zadanie komplikuje się istotnie, gdy bryła zmienia kształt wykonuje obroty i gdy - ogólnie mówiąc - ruch zależy bezpośrednio od czasu.

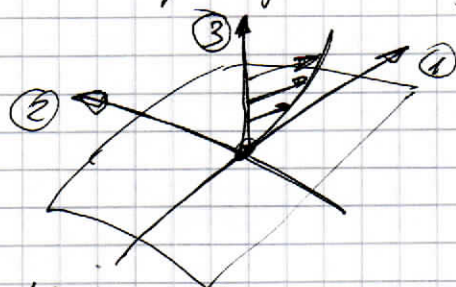
Opisanym problemem to zagadnienie aerodynamiki. Ważne w teorii lotu, teorii maszyn wirnikowych, teorii okrętu i wielu innych problemach techniki.

Interesuje się nim również biologowie, geolodzy, geofizycy i astrofizycy.

To fundamentalne zadanie w którym można znaleźć niemal wszystkie problemy Mechaniki Płynów.

Będziemy uważali, że liczba Reynoldsa $Re = \frac{UL}{\nu}$ zbudowana ze średniej prędkości i odległości jest wielką. Średnia odległość L to wymiar charakterystyczny bryły, a U jest średnią prędkością w jej ruchu lub w ruchu strumienia płynu opływającego bryłę.

Wielkie wartości liczby Reynoldsa oznaczają to, że siły bezwładności zignorane z przybliżeniem konwekcyjnym wielce przewyższyć mogą siły lepkości.



Rozważmy elementarny płatek powierzchni bryły. Na szkicu pokazany jest ruch w jego otoczeniu. Szkic jest pochyłony w znacznym stopniu.

Na powierzchni bryły prędkość ruchu (uśredniona, nie obserwowana ruch w układzie odmiennie zignorowanym z bryłą).

W kierunku normalnym, przy małej lepkości - co odpowiadają zanikającej wartości siły zignoranej z lepkością w porównaniu z innymi siłami - prędkość szybko rośnie.

Konsekwencją tego faktu jest dominacja pochodnej prędkości względem normalnej x_3 i porównaniu z pochodnymi względem powstałych zmiennych:

$$\left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_3} \right| \gg \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_2} \right|$$

To stwierdzenie pozwala sformułować uproszczony opis ruchu w bliskim sąsiedztwie opływanej powierzchni.

Obrót taki nazywamy **warstwą przyścienną**.*

Na zewnętrznej warstwie przyściennej zmienność prędkości powodowana lepkością jest zanikająca.

Uwaga: nie, że płyn porusza się tam tak, jak płyn nielepki.

A więc - dla odległości od opływanej powierzchni przekraczających wymiar poprzeczny warstwy przyściennej prędkość w warstwie i prędkość zewnętrznego upływu nie różni się istotnie: porównanie lepkości są upośledzone:

$$\lim_{x_3 \rightarrow \infty, \delta} \vec{V}_{warstwa} = \vec{V}_{nielepki}$$

Symbol δ oznacza "grubość" warstwy przyściennej, to znaczy taką odległość od opływanej powierzchni, która odchodzi od hipotetycznego płynu nielepkiego od ruchu z uwzględnieniem lepkości, co musi być uwzględnione wewnątrz warstwy, czyli blisko powierzchni opływanej bryły. Oczywiście, dla $x_3 > \delta$ obowiązuje prędkość $\vec{V}$ (teoretycznie...) nie.

Przy ruchu w zewnętrznej bryły $\vec{V}_{nielepki}$ zależy od x_1, x_2 oraz x_3 .

Pokazano współrzędne (na szkicu) są utworzone przez wektory: $\vec{e}_1$, tożsamy z prędkością $\vec{V}_{nielepki}$, $\vec{e}_2$ - normalny do $\vec{e}_1$, oraz $\vec{e}_3$ normalny do powierzchni.

Jasne, że $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ są bazą lokalną. Różna w różnych miejscach.

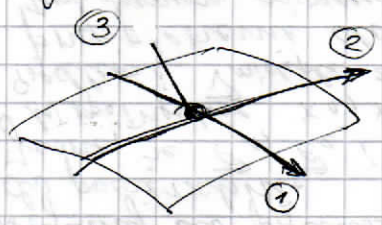
Współrzędne x_1, x_2, x_3 tworzą układ krzywoliniowy.

Prędkość $\vec{V}_{nielepki}$ zmienia, w opisano, kierunku. Pojęcie to więc przypisujemy dośrodkowe i przyspieszenie Coriolisa.

W tym samym równaniu ruchu są dość skomplikowane.

* Boundary layer, пограничный слой, Grenzschicht.

Wielka wartość liczby Reynoldsa oznacza to, że siły zwigrane z przyspieszeniem konwekcyjnym w wielim stopniu przekraczaja siły zwigrane z lepkości.



$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \Delta \vec{u}$$

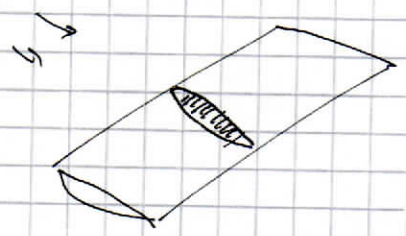
Wzrost wartości liczby Reynoldsa prowadzi do zmiany charakteru przepływu z laminarnego na turbulentny. Wzrost wartości liczby Reynoldsa prowadzi do zmiany charakteru przepływu z laminarnego na turbulentny. Wzrost wartości liczby Reynoldsa prowadzi do zmiany charakteru przepływu z laminarnego na turbulentny.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \Delta \vec{u}$$



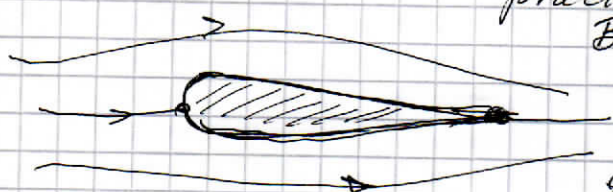
Wzrost wartości liczby Reynoldsa prowadzi do zmiany charakteru przepływu z laminarnego na turbulentny. Wzrost wartości liczby Reynoldsa prowadzi do zmiany charakteru przepływu z laminarnego na turbulentny. Wzrost wartości liczby Reynoldsa prowadzi do zmiany charakteru przepływu z laminarnego na turbulentny.

Sytuacja uproszcza się w wyidealizowanym stopniu dla ruchu płaskiego. Ruch tej ścianki stanowi dobre przybliżenie w przypadku płatek nośnego i (niewielko) łopaty. Mamy wtedy o opisywaniu konturu.



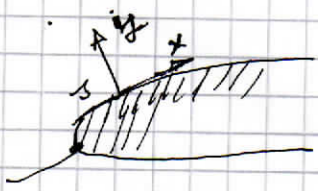
Na całym zlewnie są narysowane linie prądu dla ruchu płynu wokół konturu.

Warstwa przyścienne na grubości (i na spójności) konturu odpowiadają w punkcie spływu, to znaczy tam, gdzie dochodzącej linie prądu przecięnie się z konturem.



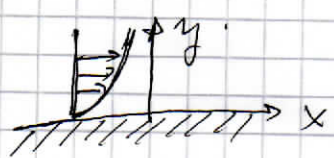
Blisko tego punktu, to znaczy blisko swego początku, warstwa przyścienne jest cienka (w punkcie spływu warstwa ma $\delta = 0$).

Przy δ/L o małej wartości można uznać, że krzywizna konturu nie ma istotnego znaczenia i związane z nią przyspieszenie dośrodkowe nie wpłynie istotnie na ruch.



Oznaczmy lokalną normalną symbolem y a kierunek wektora stycznego i zwiernego z nim współrzędną - x .

Powstanie: dla $\delta/L \ll 1$ układ współrzędnych x, y można traktować jak prostopadły.



Profil prędkości w warstwie przyściennej w "rozciągniętym" układzie współrzędnych jest pokazany na rysunku.

Napiętny równanie ciępowości (oznaczenie $V_1 = V_x = u$, $V_2 = V_y = v$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Uwielimy, że płyn jest nieściśliwy ($\rho = \text{const}$).

Ponieważ dla $y=0$ $u=v=0$, to

$$v = - \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy.$$

Otrzymujemy oszacowanie: $|v| < \max \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cdot \delta$ obowiązujące we wszystkich warstwach przyściennej.

Pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$ jest, oczywiście, ograniczona. Można ją oszacować tak:

$$\max \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = O\left(\frac{U}{L}\right) *$$

i, wobec tego

$$|v| = O\left(\delta \frac{U}{L}\right)$$

Równanie ruchu dla ruchu ustalonego to następujące:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

W pierwszym równaniu można opuścić pochodną $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, bo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ jest rzędu U/L^2 podczas gdy $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ma rząd U/L^2 .

*) Symbol $O(\xi)$ oznacza, że jest to wielkość rzędu ξ .

W drugim równaniu występuje ν . To wielkość młoda*)
w porównaniu z jedynką. Dla $\delta \rightarrow 0$ zanika...
Opuszczamy wyrazy ze względu na pochodną ciśnień.
Porostaje

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow p = p(x).$$

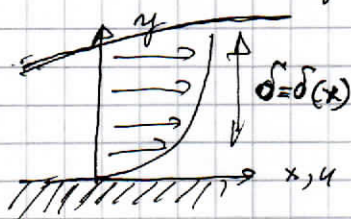
Otrzymaliśmy równanie:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp(x)}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

To równanie Prandtla (Ludwig Prandtl, 1875-1953,
profesor Politechniki w Hanowerze i Uniwersytetu w Göttingen).

Do równań tych trzeba dołączyć warunki brzegowe i warunki początkowe. Są następujące:



$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\delta, \infty} = U(x)$$

$$u|_{x=0} = 0$$

Warunki te wynikają znikanie prędkości na przylegającym konturze, zgodności prędkości w warstwie z ruchem w jej zewnętrznej i znikanie prędkości (i wraz z warstwą) w przepływie, czyli w punkcie opływu.

Na zewnętrznej warstwie, tzn. dla $y \gg \delta$, płyn porusza się tak, jak gdyby nie występowała lepkość. Obojętnie czy tam równanie Bernoulliego:

$$\frac{U^2(x)}{2} + p = \text{const.}$$

Napisaliśmy je dla linii przepływu. (Jest tak, że w wielu krótkich przypadkach ruch ten jest ruchem bezwrotnym i stałe const. ma charakter uniwersalny).

Kreśląc się: gdy przed przyleganiem było pole prędkości jest jednorodne i ciśnienie jest wszędzie takie samo, to stałe Bernoulliego jest uniwersalne i jednocześnie $\text{rot } \vec{V} = 0$.)

Różniczkujemy równanie Bernoulliego i podstawiamy do równania Prandtla $-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}$:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Oszacujmy grubość warstwy δ . W tym celu uprościmy sobie prędkości i zmienne niezależne:

$$u = U_0 u', \quad v = U_0 \frac{\delta}{L} v', \quad x = L x', \quad y = \delta_0 y', \quad U = U_0 U'$$

i otrzymamy

$$\frac{U_0^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{U_0^2 \delta_0}{L} \frac{1}{\delta_0} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{U_0^2}{L} U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{\nu U_0}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

*) W pierwszym równaniu $v \frac{\partial u}{\partial y}$ jest równa $U \frac{\delta}{L} \frac{U}{\delta} = U^2/L$

Z kolei w drugim równaniu występuje stałowa proporcji V . Jest to wielkość mase.

Opuśćmy ją otrzymamy

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$$0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

W tym przypadku mamy dwa równania różniczkowe drugiego rzędu. Pierwsze równanie ma postać $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$, które ma rozwiązanie $x(t) = C_1 t + C_2$. Drugie równanie ma postać $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$, które ma rozwiązanie $\theta(t) = D_1 t + D_2$.

$$x(t) = C_1 t + C_2$$

$$\theta(t) = D_1 t + D_2$$

W tym momencie musimy skorzystać z warunków brzegowych. W chwili $t=0$ mamy $x(0) = 0$ i $\theta(0) = 0$. W chwili $t=T$ mamy $x(T) = 0$ i $\theta(T) = 0$.



$$x(0) = 0$$

$$x(T) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

W tym momencie musimy skorzystać z warunków brzegowych. W chwili $t=0$ mamy $x(0) = 0$ i $\theta(0) = 0$. W chwili $t=T$ mamy $x(T) = 0$ i $\theta(T) = 0$.

W tym momencie musimy skorzystać z warunków brzegowych. W chwili $t=0$ mamy $x(0) = 0$ i $\theta(0) = 0$. W chwili $t=T$ mamy $x(T) = 0$ i $\theta(T) = 0$.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$$0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

Opuśćmy ją otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

W tym momencie musimy skorzystać z warunków brzegowych. W chwili $t=0$ mamy $\theta(0) = 0$ i $\frac{\partial \theta}{\partial t}(0) = 0$. W chwili $t=T$ mamy $\theta(T) = 0$ i $\frac{\partial \theta}{\partial t}(T) = 0$.

Drugimy pma $\frac{U_0^2}{L}$. Przy drugiej potęgowej występuje współczynnik $\frac{\gamma L}{U_0 \delta_0^2}$. To oczywiście stałe. Można więc napisać $\frac{\gamma L}{U_0 \delta_0^2} = C$ i dalej:

$$\delta_0 = C \frac{L}{\sqrt{\frac{U_0 L}{\gamma}}} = C \frac{L}{\sqrt{Re}} =$$

Stąd otrzymać L jest oczywiście dozwolone. Można zamiast L napisać x . Wtedy otrzymujemy

$$\delta_0 = C \frac{x}{\sqrt{\frac{U_0 x}{\gamma}}} \text{ lub } \frac{\delta_0}{x} = \frac{C}{\sqrt{Re_x}}$$

Stąd C zależy od tego, jaka jest funkcja $U(x)$, czyli - jak mierzmy - jakiej jest rozkład prędkości u rezytmu przepływu.

Przy odpowiednim dobrane stałe C może być jedynego.

Wtedy równanie w bezwymiarowej formie jest uniwersalne...

Rozwiązanie równań Prandtla może być dokonane analitycznie *) tylko dla krzywej rozkładu prędkości $U(x)$.

W pozostałych przypadkach stosuje się metody numeryczne.

Jeli wykaz, który rozwiązuje się układ równań, uproszczenie uzyskać można przez eliminację niewiadomych (niezależnej).

W przypadku równań Prandtla uproszczenie są funkcje takie, że:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = \psi(x, y).$$

Funkcja ψ nazywa się funkcją prądu. Reakuluje ona równanie ciągłości do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0.$$

Funkcja ψ jest stała na linii prądu. Reakuluje o stałość ψ to $d\psi = 0$. Piżemy:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u}{v} \text{ lub } \frac{dy}{dx} = v/u$$

co jest równaniem linii prądu.

Podstawiamy stałe prędkości do równania Prandtla:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Warunki brzegowe i warunki początkowe są takie:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \infty} = U(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0.$$

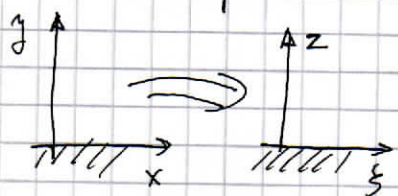
Są dwa warunki brzegowe (dla $y=0$ i $y \rightarrow \infty$). Tłeci wynika z faktu, że odgrany kontur jest linią prądu. A więc $\psi|_{y=0} = \text{const}$. Ponieważ L równanie występuje tylko pochodne funkcji ψ , to można przyjąć $\psi|_{y=0} = 0$.

*) Można uzyskać równanie różniczkowe zwyczajne albo układ takich równań. Równanie różniczkowe zwyczajne rozwiązuje się (numerycznie) nieporównywalnie łatwiej, niż równanie różniczkowe cząstkowe. Termin "analitycznie" należy rozumieć, jako rozwiązanie problemu o znaczeniu prostym.

Równanie jest nieliniowe. Trzeci sposób, dla dowolnego $U(x)$ 83/6
można rozwiązać je numerycznie...

Równanie pola nieperystro nie są wygodne do takich rozwiązań i lepiej poszukać innej metody.

Otoż wyeliminujmy one z zamiary zmiennych niezależnych. Użyjemy w tym celu następującego przekształcenia:



$$\xi = \int^x U(s) ds = \xi(x)$$

$$z = i(x, y).$$

Funkcje pola ψ eliminuje równanie ciągłości. Trzeba więc przekształcić tylko równanie ruchu. Zachodzą wtedy:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} = U \frac{\partial}{\partial \xi} - v \frac{\partial}{\partial z} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} = 0 \frac{\partial}{\partial \xi} + u \frac{\partial}{\partial z} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \right)$$

Wstawiamy te zależności do równania ruchu:

$$u \left[U \frac{\partial}{\partial \xi} - v \frac{\partial}{\partial z} \right] u + v u \frac{\partial}{\partial z} u = U U \frac{dU}{d\xi} + v u \frac{\partial}{\partial z} u \frac{\partial}{\partial z} u$$

Wyraz zawierający pochodną $\frac{\partial u}{\partial z}$ redukuje się. Pozostaje:

$$U u \frac{\partial}{\partial \xi} u = U^2 \frac{dU}{d\xi} + v u \frac{\partial}{\partial z} u \frac{\partial}{\partial z} u.$$

Cyfrnik zauważył, że napisaliśmy prostą (wzajemną) pochodną $\frac{dU}{d\xi}$. Jest tak, bo skoro $\xi = \xi(x)$, to $x = x(\xi)$ i funkcje $U(x)$ przechodzi (po zmianie) w $U(\xi)$. A pochodna $\frac{\partial}{\partial x}$ nie działa tym operatorem - $v \frac{\partial}{\partial z}$ na wielkości od z nie zależy. Nie działa - to znaczy w wyniku daje zero...

Możemy teraz napisać:

$$u \frac{\partial}{\partial \xi} u = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u^2}{2} \right), \quad v^2 \frac{dU}{d\xi} = U \frac{d}{d\xi} \left(\frac{U^2}{2} \right), \quad u \frac{\partial}{\partial z} u = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

co wyliczamy, kładziemy do siebie i otrzymujemy

$$U \frac{\partial}{\partial \xi} u^2 = U \frac{d}{d\xi} U^2 + v u \frac{\partial}{\partial z} u^2.$$

Można jeszcze dokonać drobnych przekształceń. Wprowadzając nową niezależną funkcję W taką, że

$$W = 1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2$$

otrzymamy $u = U \sqrt{1-W}$ i następnie

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} - 2\sqrt{1-W} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = - \frac{1}{U^2} \frac{dU^2}{d\xi} W$$

(XX)

Warunki brzegowe: na odległej powierzchni $z=0$ jest $W=1$ a daleko od niej, dla $z \rightarrow \infty$ mamy $W=0$.

Warunki początkowe - dla $\xi \rightarrow 0$ jest tożsamość o określonej bo dla $x=0$ $u=0$ i znowem $U=0$. Jest więc okoliczność. Spróbujmy, można je wyeliminować. Otoż, dla stałości punktu spistożenie przeliczając $U(x)$ jest takie: $U = k \cdot x^m$.

Obtained agreement: $\frac{1}{2} \frac{d}{dz} v^2 = 2 \frac{d}{dz} \ln v^2 = 2 \frac{d}{dz} (\ln v + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{v})$

Henry: $\frac{1}{2} = \frac{m+1}{k} x_{m+1}, v(\xi) = k \left(\frac{k}{m+1} \xi \right)^{\frac{1}{m+1}}$

2. power: $\frac{1}{2} \frac{d}{dz} v^2 = \frac{d}{dz} \ln v^2 = 2 \frac{d}{dz} \ln v = 2 \frac{d}{dz} (\ln v + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{v})$ to which we must pay:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} v^2 = \frac{m+1}{2} \frac{1}{\xi}$$

Full note, all $\xi = 0$ means some obstacle; Then postulating reciprocity & taking form:

$$W(\xi, z) = W_0 \left(\frac{v_0 \xi}{2} \right) = W_0(\xi), \xi = \frac{v_0^2}{2}$$

Estimating W : $\frac{\partial W}{\partial \xi} = W' \frac{1}{v_0^2} \frac{1}{\xi}, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = W'' \frac{1}{v_0^2} \frac{1}{\xi^2}$

or $\frac{\partial W}{\partial \xi} = W' \left(-\frac{2}{2 \xi v_0^2} \right) = -\frac{1}{2 \xi} \frac{1}{v_0^2} W'$

Optimizing relative energy:

$$\frac{1}{2} (1 - W_0' W_0'' + \frac{1}{2} \frac{1}{\xi} W_0') = \frac{2m}{m+1} W_0$$

to $\frac{1}{2}$ step distance.

Wanted: break up as follows: $W_0' = 1, W_0'' = 0$

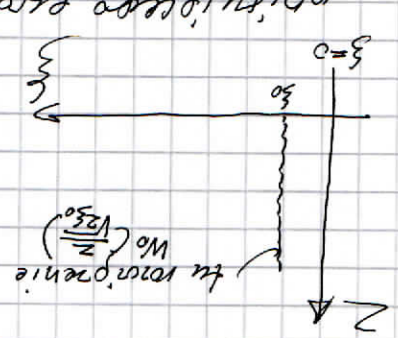
*) to separate optimally $W_0 \left(\frac{v_0 \xi}{2} \right)$. The desired note, v_0 , to move ξ_0 but the point of optimum change.

$$W(\xi, z) = W_0 \left(\frac{v_0 \xi}{2} \right)$$

Anyhow, my optimum is ξ_0 (xx)

to obtain the same ξ_0 as before.

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0$$



Optimizing relative energy & solving for the optimum ξ_0 .

Take problem (relative harmonic type potential & solving using generating) to solve, point method using stationary.

Steadily move under a cylinder inside a rotating hemisphere; it is enough to see that (xx).

*) Relative to: $W(\xi, z) = \frac{d^3}{d\xi^3} \xi^2 = \frac{d^3}{d\xi^3} \xi^2 = \frac{d^3}{d\xi^3} \xi^2 = 0$ non-zero Hartree-Slater-Fock.

Jak wynika z tego, co napisaliśmy o rozprężaniu równań Prandtla jest to zadanie do wykonania (przy dowolnym określeniu funkcji $U(x)$) tylko metodami numerycznymi.

Ala - w porównaniu z trudnością przy rozprężaniu równań Naviera-Stokesa zadanie sformułowane dla wartości prędkości jest niemal trywialne...

Przyjmijmy, że znaleziono rozprężanie. To znaczy znaleziono $u(x, y)$ i $v(x, y)$. Przekształćmy wówczas z tych funkcji.

Odtąd: z równania ciągłości $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ wynika, że dla $y=0$ wobec $u|_{y=0} = 0$ pochodna $\frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0}$ jest zerem: $\frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0} = 0$.

Wobec tego $\frac{\partial v}{\partial y}|_{y=0} = 0$ i dla małych wartości y można napisać: $v = cy^2 + \dots$, a więc że wzmiankowanej funkcji w pobliżu y odpowiada się całą wyraz kwadratowy.

Tenzyr prędkości całkowitego dla $y=0$ jest więc następujący:

$$\{D_{ik}\}_{y=0} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\}_{y=0} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{array} \right\}. \text{ Pamiętajmy, że tensor naprężenia}$$

Wyznamy jednostkowy siłę powierzchniową dla $y=0$.

Normalne do granicy (zwrócone wprost wewnątrz płaszczyzny)
to: $\vec{n} = 0\vec{e}_1 + (-1)\vec{e}_2$. W elementarnym opisie znajdujemy:

$$\vec{f} = \Pi \cdot \vec{n} \text{ lub } \vec{f} = \left(\begin{Bmatrix} p & 0 \\ 0 & -p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Mnożymy. Wynik mówimy: $f_1 = f_x = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}|_0$, $f_2 = f_y = p$.
Brak "odpychania" od dna. Jest natomiast "hamowanie".
To hamowanie jest - po prostu - rezultatem zarcia.

Ciekawie zauważyć możemy to, że na opływaną linię konturu działa "naprężenie styczne" $\tau = -f_x$: $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$.

Lepiej tę wielkość można zinterpretować siłą działającą na opływany kontur.
Jest: $dF_x = \tau \cdot \cos\alpha \cdot ds = \tau \cdot dx$ i wystarczy całkować całkowanie.



To oczywiście opis siły oporu wynikające z zarcia w warstwie przyściennej.

Pójdźmy do równań Prandtla. Okazuje się, że można je przekształcić i formalnie scałkować po y , by otrzymać wyrażenie określające τ przez wielkości charakterystyczne globalnie warstwy przyściennej.

Odtąd:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot u) - \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] u = \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv)$$

oraz na podstawie równania ciągłości wyznaczamy drugi wyraz:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot u) = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

bo $\frac{\partial U(x)}{\partial y} = 0$. Napiszmy równanie Prandtla (równanie ruchu) i to ostatnie:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot u) = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

i odejmujemy pierwsze od drugiego. To, co otrzymamy scałkujemy "w poprzek" warstwy. To znaczy: całkujemy względem y w granicach $y=0$ i $y \geq \delta$. Przypominamy, że dla $y \geq \delta$ $u=U$.

Jest też:

$$\int_0^{\delta, \infty} \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy + \int_0^{\delta, \infty} \frac{\partial}{\partial y} [v(U-u)] dy = \int_0^{\delta, \infty} \frac{dU}{dx} (U-u) dy - \int_0^{\delta, \infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

Trzecia z całek może być przepisana następująco:

$$\dots = -U \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta, \infty} (1 - \frac{u}{U}) dy. \text{ Jest tak, bo } U \text{ i } U' \text{ nie zależą od } y \text{ i mogą być wycofane przed całkę. Druga z całek to oczywiście wyrażenie } [v(U-u)]_0^{\delta, \infty}. \text{ Ale - dla } y=0 \text{ } v=0, \text{ a dla } y \geq \delta \text{ } u=U. \text{ Mamy więc zero.}$$

Ostatnia całka daje różnicę: $\dots = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta, \infty} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)$. Dla drugiej całkowej od brzoju $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, co oznacza, iż przyślawić przeto się tam zmieniać. A dla $y=0$ mamy $-\nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\tau}{\rho}$

Pierwsza całka jest bardziej złożona. Rozwińmy następujące wyrażenie:

$$I(x) = \frac{d}{dx} \int_{y=a(x)}^{y=f(x)} F(x, y) dy$$

Trzeba zauważyć, że x znajduje się w trzech miejscach. W funkcji podcałkowej i w granicach. A więc różniczkujemy "poł całkę" oraz różniczkujemy całkę względem granicy górnej i granicę górną względem x -a oraz - podobnie - postępujemy z granicą dolną. Trzeba tylko pamiętać o minusie...

$$I(x) = \int_{y=a(x)}^{y=f(x)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dy + F(x, y) \Big|_{y=f(x)} \frac{df}{dx} - F(x, y) \Big|_{y=a(x)} \frac{da}{dx}.$$

W naszym przypadku $a=0$, $f=\delta(x)$ (lub $f \geq \delta$), a $F=u(U-u)$.

A więc:

$$\int_0^{\delta, \infty} \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta, \infty} u(U-u) dy - u(U-u) \Big|_{y=\delta, \infty} \frac{d\delta}{dx} + u(U-u) \Big|_{y=0} \frac{d0}{dx}$$

Obydwa wyrażenia zawierające całki są zerem... Po prostu: $u=U$ lub $u=0$. A więc otrzymaliśmy

$$\frac{d}{dx} U^2 \int_0^{\delta, \infty} \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy + U \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta, \infty} (1 - \frac{u}{U}) dy = \frac{\tau}{\rho}$$

To brz. "wzór całkowy KARMANA*")

Dla skrótu wведе się oznaczenia:

$$\int_0^{\delta, \infty} (1 - \frac{u}{U}) dy = \delta_*, \quad \int_0^{\delta, \infty} \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy = \delta_{**}$$

Przy takich oznaczeniach mamy

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta_{**}) + U \frac{dU}{dx} \delta_* = \frac{\tau}{\rho}$$

albo też: $\frac{d}{dx} \delta_{**} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (\delta_* + 2 \delta_{**}) = \frac{\tau}{\rho U^2}$

*) Theodore von Karman, 1881-1963. Z pochodzenia Węgier. Pracował w USA.

i odejmijmy pierwsze z nich od drugiego. To, co otrzymamy
scalujemy "u poprostu" wzrostaj - to mamy wzrostajny wyraz y
w formach 0 - y albo 0 - ∞:

$$\int_0^{\infty} u(v-u)dy + \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = 2x$$

$$\frac{dx}{dy} \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy + \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{2}{v}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{dx}{dy} \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy - \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{2}{v}$$

$$\sigma = 0, t = 2(x) (v, t \geq 2), t = 1/(v-u)$$

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy + \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{2}{v}$$

$$I(x) = \frac{dx}{dy} \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{2}{v}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{2}{v}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{2}{v}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{2}{v}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (1-\frac{u}{v}) dy = \frac{2}{v}$$

Interpretacja tych wielkości jest prosta: $U\delta_x = \int_{-\infty}^{\infty} (U-u)dy$. Jak widać, jest to różnica wydostawu objętościowego. Takie, jeśli by było, byłoby przeliczone na wartość i wyznaczone U , i wydostawu powierzchni. Przewodność - to mierzony przy przeliczeniu $U(x,y)$. Drugie wielkości może być zinterpretowane po pomnożeniu przez U .

Otrzymamy: $U^2\delta_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} (U-u)u dy = \int_{-\infty}^{\infty} (U-u)dQ$. Wydatek $dQ = u dy$ jest "przewodność" - to oznacza po przewidywaniu przeliczenia u . Iloraz U/dQ to - przy jedynostkowej mierzalności - po prostu określony albo "fizyczny" przeliczenia U . Z kolei u/dQ to nierzeczywistość (strumień) po prostu. Z połączonych interpretacji wynika, że mierzalność straty wydostawu i mierzalność straty przeliczenia. To mierzalność historyczna - choć nie porównawcza w rzeczywistości. Często opuszczane są "straty"...

Ćwiczenie udowodnij, że $\delta_x \geq \delta_{xx}$. (Wskazywać: $(1-q)^2 \geq 0$)

Wzór Karmana jest przydatny do pomiaru napięcia τ .

Aby wyznaczyć to wielkości bezpośrednio należy zmierzyć przeliczenia belki białej objętościowej powierzchni, jak to tylko jest możliwe.

Pojawia się trudność: bardzo blisko brzozy, gdzie $u \rightarrow 0$, mierzalność pomiaru może powodować znaczne niedokładności w interpolacji (i elastoplastyczności!) $u(x,y)$ względem y .

Kłopot eliminuje rozwiązanie warunku "u po prostu". Mierzalność przeliczenia - lepiej: składowe u przeliczenia - dla zbioru punktów $y_k, k=1,2,\dots$ i, po interpolacji, obliczeniu wartości δ_x i δ_{xx} . Przeliczenia U to u daleko od brzozy. Tam, gdzie nie zachodzi zmiana u przy pomiarach, będą one wartości normalnej.



Dysponujemy $\delta_x(x)$ i $\delta_{xx}(x)$ dla różnych x . Aby zrobić τ wystarczy użyć wzoru Karmana. Różniczkowanie δ_{xx} i U nie należy traktować...

Dodamy, że można wypisać **wiele** równań typu Karmana.

W tym celu wprowadzamy równanie ruchu (Prandtle) przez U^n i pokażemy.

$$U \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} U^{n+1} + V \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial y} U^{n+1} = U \frac{dU}{dx} U^n + V U^n \frac{\partial U}{\partial y}$$

co jest równoważne równaniu $\frac{1}{n+1} \left[\frac{\partial}{\partial x} (U U^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial y} (V U^{n+1}) \right] = U \frac{dU}{dx} U^n + V U^n \frac{\partial U}{\partial y}$ które poddajemy (analogicznym jak uprzednio) podcałkowaniu wzdłuż z równaniem

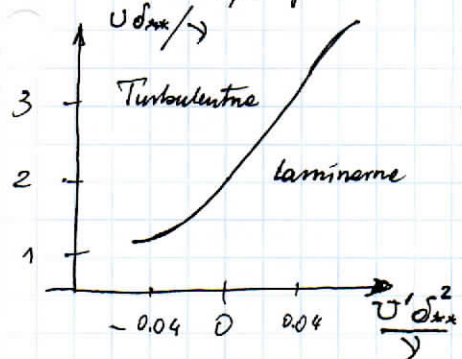
$$\frac{1}{n+1} \left[\frac{\partial}{\partial x} (U U^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial y} (V U^{n+1}) \right] = U U^n \frac{dU}{dx}$$

To, co otrzymamy, to równania (dla $n=1,2,3,\dots$) Karmana - Lejbersona.

Równanie Karmana służy do przybliżonego obliczenia oporu tarcia przy warunku przycięcia. Ściągnij poznaję Panksta o "Zasady konstrukcji Mech. Płynów".

Oszacowanie grubości warstwy przyściennej ($\delta \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$, str. 5) oznacza, że dla dostatecznie znacznych długości x rozwiązanie jest poprawne (które zawsze istnieje) pojawiają się w coraz większej odległości od objętościowej powierzchni. Na tej powierzchni występuje rozwiązanie szumowe. Tłumienie to recepta tylko na otoczenie. W sytuacji dostatecznie grubej warstwy przyściennej tłumienie zaburzeń jest niewystarczające do eliminacji niestabilności.

W rezultacie - przy znacznej grubości i braku tłumienia w dwójstrzypici - warstwa przepiętna staje się turbulentna.



Najlepsze kryterium rozstrzygnięcia o tym, gdzie nastąpi przejście z laminarnej na turbulentną, jest analiza wyników z (opracowanej listy) badań eksperymentalnych.

Ich rezultaty są porównywane na osi x linii (można znaleźć równanie jej opisujące). Dla punktów poniżej tej linii ruch jest laminarny. Powyżej - turbulentny.

W sąsiedztwie punktu przejścia (warstwa jest ciutka!) ruch jest laminarny.

Ponieważ $\frac{x}{\delta^{**}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$, a δ^{**} jest proporcjonalne do $\sqrt{x}$ (w przybliżeniu) do δ^{**} , to w kolejnych punktach warstwa istotnie wzrasta $U\delta^{**}/v$. Ta wielkość to liczba Reynoldsa obliczona do wielkości δ^{**} . Oznacza się ją Re_{**} :

$$Re_{**} = U\delta^{**}/v$$

Do przejścia warstwa laminarna w turbulentną w równaniach Prandtla należy zamienić przelotność na przelotność uśrednioną.

(Przelotność przelotności jest przeciętowa. A uśredniona - nie, jest postępująca!)

Modyfikacji musi ulec również wyraz związany z tarcieniem.

Zamiast stałej lepkości - która jest cechą fizyczną płynu - trzeba wprowadzić lepkość turbulentną. Ta wielkość jest zależna od lokalnego ruchu uśrednionego:

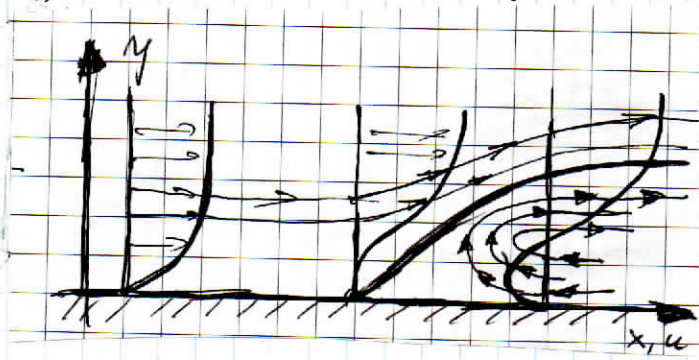
$$\nu_{turb} = \nu + f(y, Re_{**})$$

i znacznie przekracza lepkość "fizyczną" ν . Zmodyfikowany wyraz jest taki:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{turb} \frac{\partial u}{\partial y}$$

tu oznacza przelotność uśrednioną $\overline{u}$.

Innego rodzaju ważnym efektem jest **ODERWANIE** warstwy przepiętny. To oddzielenie warstwy od przylegającej powierzchni i pojawienie się ruchu wirnicowego.



Punkt, w którym zachodzi odłączenie to taki, dla którego jest

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

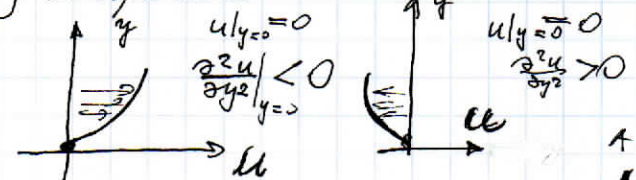
Pora tym punktem pojawia się ruch powrotny. Warstwa przepiętna znacznie grubieje.

Ruch staje się - niepożądany - niestacjonarny. W istotny sposób wzrasta dyfuzja energii mechanicznej. Powodem tego są nowe struktury wirów z występującym w nich znaczącym tarcieniem.

Rozważmy momentu ruchu dla $y=0$. Ponieważ $u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0$, to prowadzi

$$0 = \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{lub } \frac{\partial u}{\partial y})_{turb} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dla $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ - ν jest wartością dodatnią - druga pochodna przelotności jest ujemna.



Dla ujemnej drugiej pochodnej funkcji $u(\cdot, y)$ jest wypukła. Odwrócić, mamy właśnie to.

A więc: gdy $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ODERWANIE NIE ZACHODZI...