Kolejny fragment dynamiki gazu to teoria RUCHU NIEUSTALONEGO JEDNOWYMIAROWEGO.

Rozważamy ciągłe pola prędkości, ciśnienia, temperatury zależne od czasu t i współrzędnej x.
Występuje tylko jedna składowa prędkości.

Opis ruchu stanowią równania: CIĄGŁOŚCI, EULERA (to równanie ruchu) i - WOBEC TEGO, ŻE POLA SĄ CIĄGŁE, brak tarcia i przewodzenia ciepła - równanie IZENTROPY.

(W swoim czasie udowodniliśmy, że w takiej sytuacji przemianą termodynamiczną jest izentropa...)

Izentropowość wyklucza fale uderzeniowe, bo gdy fale takie występują, to entropia nie jest zachowana (rośnie...)

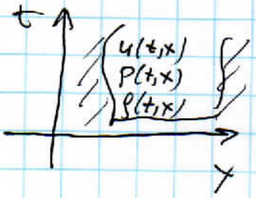
A więc tak:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$p/\rho^{\kappa} = \text{const.}$$

Wyznaczone niewiadome są funkcjami t oraz x. A więc ich określony jest obszar, który można zobrazować na diagramie x-t.



Przekształcimy równania wprowadzając prędkość dźwięku

$$a^2 = \kappa\frac{p}{\rho} = dp/d\rho\,\big|_s$$

Ponieważ jest s = const, to zawsze $dp = a^2 d\rho$

Przemiana termodynamiczna pozwala wyrazić wszystkie parametry stanu przez jeden z nich...*)

Wybierzmy sprytnie zmienną niezależną i wyraźmy przy jej pomocy pozostałe wielkości termodynamiczne.

Tą nową zmienną to $P(p)$ określona tak:

$$dP = \frac{dp}{a\rho} = \frac{a^2 d\rho}{a\rho} = \frac{a\,d\rho}{\rho}$$

Możemy teraz napisać:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{a\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{a}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}, \text{ itd}$$

Wynika z tych wzorów tyle:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a\rho\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{a}\frac{\partial P}{\partial t}$$

Wstawiamy te formuły do równań ciągłości i ruchu

---

*) Tak, bo trzy parametry wiąże równanie stanu. Jeśli znamy przemianę, to - pozostaje JEDEN STOPIEŃ SWOBODY..., bo przemiana - to dodatkowe równanie

Oto rezultaty:

$$\frac{\rho}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho}{a} u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

Pierwsze równanie uprościmy. Następnie dodajemy je do siebie i odejmujemy wzajemnie:

Otrzymujemy tyle:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+\Phi) + (u+a)\frac{\partial}{\partial x}(u+\Phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u-\Phi) + (u-a)\frac{\partial}{\partial x}(u-\Phi) = 0$$

Obydwa równania mają taką formę:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x}\right)F = 0$$

W tym zapisie $F = F(t,x)$ i - być może - b jest zmienne.
Rozważmy linię $x = x(t)$ na płaszczyźnie x-t.
Na tej linii jest:

$$F = F(t, x(t)) = F(t)$$

Pochodna dF/dt to:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial F}{\partial x}$$

Jeśli $dx/dt = b$, to $dF/dt = 0$ i F na tej linii ma stałą wartość.
Stosujemy ten wynik do wypisanych równań:
Otóż:

NA LINII $\frac{dx_+}{dt} = u + a$ jest $u + \Phi = const = C_+$

NA LINII $\frac{dx_-}{dt} = u - a$ jest $u - \Phi = const = C_-$

Linie x_+ i x_- nazywamy CHARAKTERYSTYKAMI, a wielkości $u+\Phi = C_+$ i $u - \Phi = C_-$ to NIEZMIENNIKI Riemanna.

Obliczymy Φ. Jest: $d\Phi = \frac{dp}{a\rho}$. I mamy $s = const$.
Z równania izentropy wynika:

$$\frac{dp}{p} = k\frac{d\rho}{\rho} \text{ i, wobec tego, } d\Phi = k\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{a\rho} = \frac{a\,d\rho}{\rho}$$

a definicja prędkości dźwięku $a^2 = k\frac{p}{\rho}$ da związek $2\frac{da}{a} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}$
Podstawiamy tu $\frac{dp}{p}$, mnożymy przez a i otrzymujemy taki rezultat:

$$2da = (k-1)\frac{a\,d\rho}{\rho} = (k-1)\, d\Phi$$

To już koniec, bo

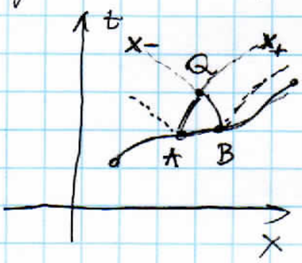
$$\Phi = \frac{2}{k-1} a$$

Stała całkowania włączona jest do C_+ lub C_-.

i niezmienniki Riemanna są następujące:

$$u + \frac{2}{k-1} a = C_+$$
$$u - \frac{2}{k-1} a = C_-$$

Przypuśćmy teraz, że na pewnej linii, która nie jest charakterystyką*) mamy zadane prędkości dźwięku a i ruchu u w każdym punkcie tej linii.



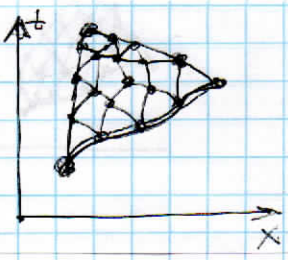
Dla dowolnie wybranych punktów A i B bliskich sobie mamy u_A, a_A, u_B i a_B.
Przez te punkty "przechodzą" charakterystyki.
Mają różne nachylenia. Przetną się.
Punkt przecięcia Q należy do X_+ i X_-.
A więc można wykorzystać niezmienniki i napisać:

$$u_A + \frac{2}{k-1} a_A = u_Q + \frac{2}{k-1} a_Q$$
$$u_B - \frac{2}{k-1} a_B = u_Q - \frac{2}{k-1} a_Q$$

Wyznaczamy u_Q i a_Q:

$$u_Q = \frac{1}{2}(u_A + u_B) + \frac{a_A - a_B}{k-1}$$
$$a_Q = \frac{1}{2}(a_A + a_B) + \frac{k-1}{4}(u_A - u_B)$$

Budując dalej samą konstrukcję dla wielu punktów otrzymamy prędkości i prędkości dźwięku w sąsiedztwie zadanej linii.
Zauważamy, że wyznaczenie miejsc przecięcia charakterystyk to nic innego, niż to, co wynika z ich zastąpienia odcinkami prostych o nachyleniach



$$\frac{dx_+}{dt} = (u_A + a_A)/2 + (u_Q + a_Q)/2$$
$$\frac{dx_-}{dt} = (u_B - a_B)/2 + (u_Q - a_Q)/2$$

Dla bliskich A i B błąd – wynikający z opisanego zastąpienia – jest rzędu trzeciego....
Zauważamy, że nie ma sensu budowanie siatki charakterystyk "wstecz", bo mając linię $X=X(t)$ z zadanymi prędkościami dźwięku i ruchu wyznaczamy te wielkości dla następnych (późniejszych) wartości czasu...
Zadanie, które sformułowaliśmy to **zagadnienie Cauchy'ego**.
Mając dane na linii (nie będącej charakterystyką) możemy rozwiązać odpowiednie równania w trójkącie o bokach będących charakterystykami. Tylko tam.
Podstawą tego – krzywoliniowego – trójkąta jest linia z danymi.

---

*) Na charakterystyce u oraz a są powiązane stałą wartością niezmiennika. Nie są więc dowolne...

Zagadnienie Cauchy'ego - inaczej zagadnienie początkowe - należy do najprostszych problemów tzw. **równań typu hiperbolicznego**. Takie równania opisują - w ogólności - zagadnienia typu falowego. Fale przemieszczają się i - pora najprostszymi opisami niezczystości - ewoluują.

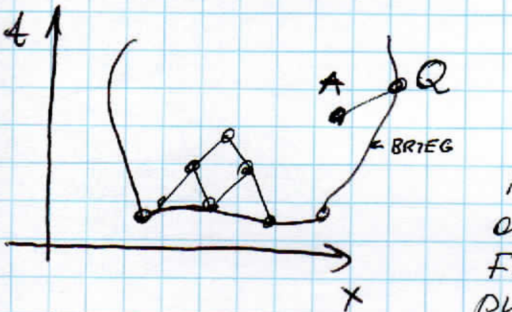
W naszym przypadku fale przemieszczają się z prędkością dźwięku względem ruchomego gazu. A więc ich prędkości w nieruchomym układzie odniesienia to suma (albo różnica gdy kierunki ruchu i przemieszczenia fali są przeciwne) prędkości i prędkości dźwięku.
Fale "niosą" wartości niezmienników Riemanna.
To tyle o interpretacji fizycznej charakterystyk i niezmienników.
Czytelnik pamięta:

$$\frac{dx_+}{dt} = u + a \iff u + \frac{2}{k-1}a = C_+$$

$$\frac{dx_-}{dt} = u - a \iff u - \frac{2}{k-1}a = C_-$$

To ruchy fal w obydwu kierunkach i to, "co niosą"...

Obszar w którym występuje omawiany ruch może być ograniczony. Może to być - na przykład - rura z tłokiem. Symbolicznie brzeg obszaru to krzywe $x = X(t)$ które nie są charakterystykami. Ograniczają obszar w którym szukane jest rozwiązanie. Na liniach tych zadane są **związki pomiędzy u i a**

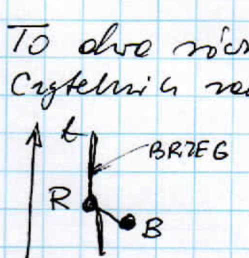


Na szkicu w punkcie Q należącym do brzegu mamy $F(a, u) = 0$. Funkcja F jest zadana w otoczeniu punktu Q.
Na odcinku charakterystyki AQ mamy niezmiennik Riemanna. Określa go prędkość i prędkość dźwięku w punkcie A.
Możemy więc napisać:

$$u_Q + \frac{2}{k-1}a_Q = u_A + \frac{2}{k-1}a_A \quad = \text{znane!}$$

$$F(a_Q, u_Q) = 0$$

To dwa równania z których możemy wyznaczyć u_Q i a_Q
Czytelnik zauważy, że tak samo można postąpić dla "lewego" brzegu
Piszemy:

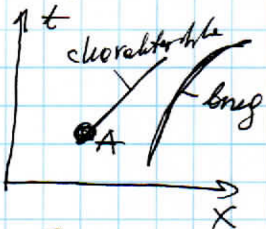


$$u_R - \frac{2}{k-1}a_R = u_B - \frac{2}{k-1}a_B$$

$$FF(a_R, u_R) = 0.$$

Tutaj FF oznacza związek analogiczny do F, czyli warunek na przeciwległym brzegu.
Oczywiście, punkty A i B muszą leżeć blisko brzegu.
Po wyznaczeniu wartości prędkości i prędkości dźwięku w punktach brzegowych (tu: Q oraz R) można skonstruować charakterystyki. Ściślej: odcinki charakterystyk pomiędzy punktami brzegowymi i wewnętrznymi, tj. Q i A oraz R i B.

Może się zdarzyć sytuacja taka, jak na następnym rysunku. Charakterystyka — mająca pochylenie w punkcie A równe $\frac{dx_+}{dt} = u_A + a_A$ — nie przetnie linii brzegowej w otoczeniu punktu A.



Wtedy opisane postępowanie nie ma sensu...
Otóż: jeśli w otoczeniu brzegu (tam jest punkt A) $\frac{dx_+}{dt} = u_A + a_A$ ma mniejszą wartość, niż $\frac{dx_{Brzeg}}{dt}$, to na linii brzegowej trzeba zadać **u** oraz **a**.
Mówimy: taka linia ma **orientację przestrzenną** i na niej zadaje się **warunek początkowy**. Warunek początkowy — to para (u, a) w punktach linii przestrzennie zorientowanej.

Łatwo stwierdzić, czy linia (jakaś linia, nie charakterystyka) ma orientację przestrzenną. Po prostu:

$$\frac{dx_{linii}}{dt} > (u+a)_{\text{na tej linii}}$$

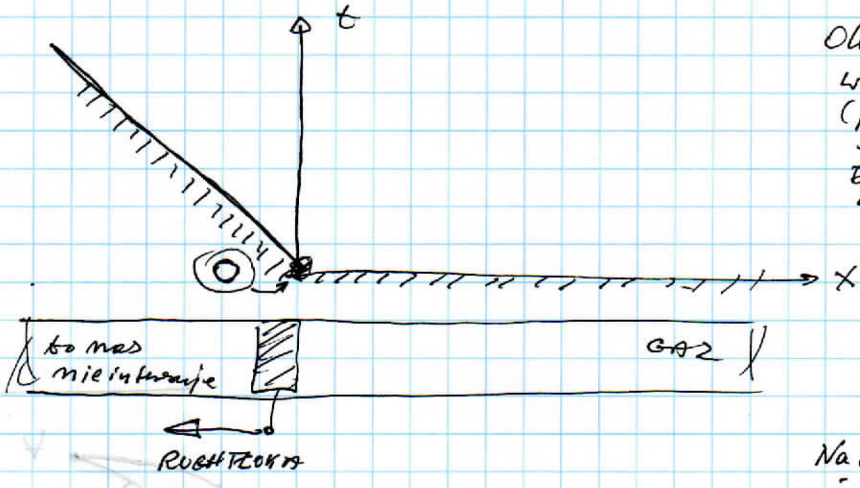
Dla „lewego" brzegu — jak Czytelnik już wie — jest tak

$$\frac{dx_{linii}}{dt} < (u-a)_{\text{na tej linii}}$$

Dodamy, że dla „złośliwej" linii brzegowej może wystąpić wiele odcinków zorientowanych przestrzennie.
Odcinek linii (albo linia) nie zorientowana przestrzennie i nie będąca charakterystyką jest zorientowana **CZASOWO**. Na tak zorientowanej linii wystarczy określić jeden z pomiędzy u i a...

Przykłady

(1) Rura o wielkiej (∞!) długości jest jednostronnie zamknięta tłokiem. W chwili $t = 0$ rozpoczął on ruch w kierunku „od gazu". Prędkość tłoka $= U$.
W gazie nieruchomym, przed chwilą początkową prędkość dźwięku wynosiła a. Zbadać ruch.



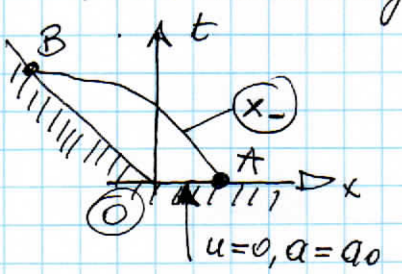
Określony dziedzinę, warunek w chwili $t=0$ (początkowy) i warunek brzegowy...
Dla $x \to \infty$ mamy, oczywiście, w określonym czasie, bezruch...

Dziedzina:
$$-Ut \le x < \infty$$
Dla $t=0$: $u=0$, $a=a_0$
To warunek początkowy.
Na denku tłoka: dla $t>0$ jest $u=-U$. To warunek brzegowy.

Rozpatrzmy sytuację w punkcie (O).
Tuż przed rozpoczęciem ruchu tłoka prędkość gazu jest zerem. A tuż po — ma wartość $-U$.

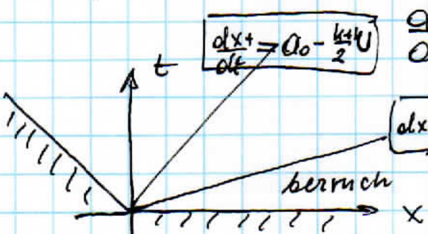
Oznacza to, że w chwili $t=0$, dla $x=0$ mamy dwie charakterystyki ⊕:
pierwsza
$$\frac{dx_+}{dt} = 0 + a_0$$
i druga:
$$\frac{dx_+}{dt} = -U + a \quad , \quad a_0 > a \quad , \quad a = ?$$

Niestety, nie znamy a. Trzeba tę wartość wyznaczyć. W tym celu należy znaleźć prędkość dźwięku na ruchomym tłoku. W tym celu wykorzystujemy charakterystykę X_- łączącą dowolny punkt na linii $t=0$ (to oś x) z tłokiem.



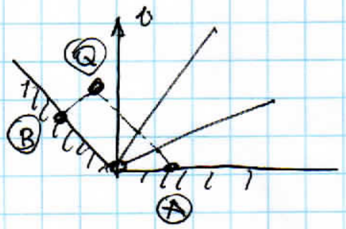
Na tłoku w punkcie Ⓑ jest $u=-U$, a prędkość dźwięku trzeba wyznaczyć. Piszemy niezmiennik. Ponieważ charakterystyka jest rodziny ⊖, to:
$$\left(u - a\frac{2}{k-1}\right)_A = \left(u - \frac{2}{k-1} a\right)_B \, , \quad u_B = -U$$
i, oczywiście, $u_A = 0$ oraz $a_A = a_0$. A więc
$$a = a_B = a_0 - \frac{k-1}{2} U \quad \left(\text{bo } 0 - \frac{2}{k-1} a_0 = -U - \frac{2}{k-1} a_B\right)$$

A jeśli punkt Ⓐ przesunąć bliżej punktu Ⓞ? Dowolnie blisko? Wynik będzie taki sam. A więc wyznaczyliśmy postulowane charakterystyki:
$$\frac{dx_+}{dt} = a_0 \quad , \quad \frac{dx_+}{dt} = -U + a_0 - \frac{k-1}{2} U = a_0 - \frac{k+1}{2} U$$



A co zachodzi dla obszaru "powyżej górnej" charakterystyki (tzn. dla $t > x/(a_0 - \frac{k+1}{2} U)$)?

Naszkicujmy charakterystyki obu, jak na szkicu obok. Punkty Ⓑ i Ⓐ wybraliśmy dowolnie. A więc punkt Ⓠ znajduje się w dowolnym miejscu.

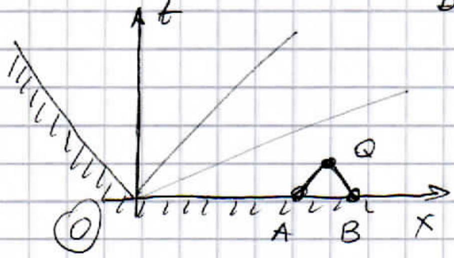


Piszemy równanie dla niezmienników: Charakterystyka Ⓑ–Ⓠ to charakterystyka ⊕. A więc mamy tam niezmiennik "z plusem":
$$\left(u + \frac{2}{k-1} a\right)_B = -U + \frac{2}{k-1}\left(a_0 - \frac{k-1}{2} U\right) = \frac{2}{k-1} a_0 - 2U = u_Q + \frac{2}{k-1} a_Q$$
Drugi niezmiennik ważny na odcinku Ⓐ–Ⓠ to
$$\left(u - \frac{2}{k-1} a\right)_A = -\frac{2}{k-1} a_0 = u_Q - \frac{2}{k-1} a_Q$$

Wynik rozwiązania: $u_Q = -U, \quad a_Q = a_0 - \frac{k-1}{2} U$

To dokładnie tyle, ile wyliczyliśmy dla punktu Ⓑ na "linii tłoka". A więc pochylenie charakterystyki ⊕ przechodzącej przez dowolny punkt Ⓠ – "powyżej" charakterystyki "ostatniej" wychodzącej z punktu Ⓞ jest takie, jak tej ostatniej.

Czytelnik wyznaczy prędkość i prędkość dźwięku "poniżej" pierwszej charakterystyki wychodzącej z (O).



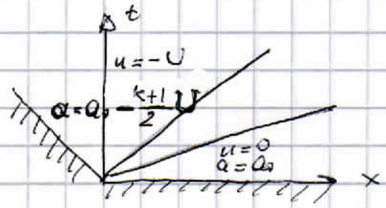
Dla tego punktu — Q — mamy:

$$u_Q = 0, \quad a_Q = a_0.$$

Punkt ten jest dowolny! A więc w całym tym obszarze, "poniżej" mamy bezruch.

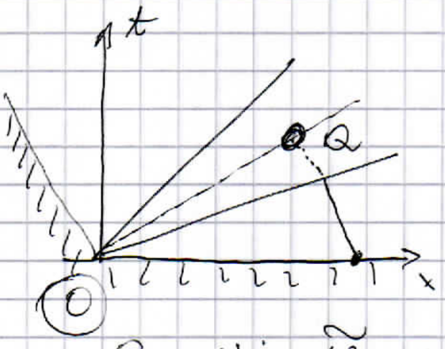
Podobnie: nad "ostatnią" charakterystyką

$$u = -U \quad i \quad a = a_0 - \frac{k+1}{2}U$$



A co jest sposób wyznaczyć ich w obszarze pęku charakterystyk leżących pomiędzy "górną" i "dolną" ograniczającymi ten pęk?

Trzeba wybrać taką charakterystykę która należy do tego pęku. Jest dowolna — a więc zbiór takich charakterystyk mieści się pomiędzy charakterystykami granicznymi.



Odpowiada ona niepełnemu rozpędzeniu tłoka. A więc w (O), wtedy, gdy wyznacza się tę charakterystykę prędkość wynosi $-\tilde{U}$. Jest tak:

$$-U \leq -\tilde{U} \leq 0$$

Oczywiście, $-\tilde{U}$ jest ujemne...
Można napisać niezmiennik:

$$0 - \frac{2}{k-1}a_0 = -\tilde{U} - \frac{2}{k-1}\tilde{a}$$

Niezmiennik ten obowiązuje na charakterystyce (−) łączącej punkt leżący (dowolnie blisko (O)) na osi $t=0$ (to oś x) z nie w pełni poruszającym się tłokiem...
Wyznaczony $\tilde{a}$:
$$\tilde{a} = a_0 - \frac{k-1}{2}\tilde{U}$$

W punkcie (Q) mamy:

$$\frac{x_Q}{t_Q} = \frac{dx_+}{dt} = -\tilde{U} + \tilde{a} = a_0 - \frac{k+1}{2}\tilde{U}$$

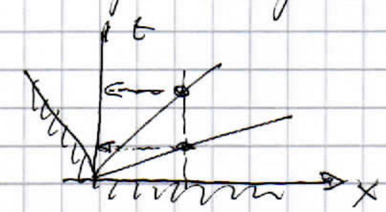
Ponieważ (Q) został wybrany dowolnie, to $\tilde{U} = \frac{2}{k-1}\left(a_0 - \frac{x_Q}{t_Q}\right)$

Aby znaleźć $\tilde{a}$ wykorzystujemy niezmiennik "minusowy":

$$-\frac{2}{k-1}a_0 = \tilde{U} - \frac{2}{k-1}\tilde{a}$$

i, co z tego wynika,
$$\tilde{a} = a_0 - \frac{k-1}{2}\tilde{U} = \frac{2}{k-1}\frac{x_Q}{t_Q}$$

Wiadomo, że dla zadanego x_Q t_Q musi zawierać się w przedziale wyznaczonym charakterystykami granicznymi.



Czytelnik z łatwością wyznaczy ten przedział.
Dodamy na koniec, że wobec izentropowości jest tak:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}}$$

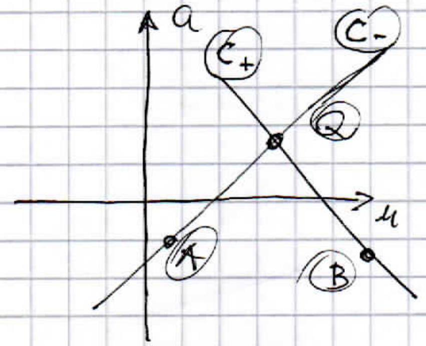
a więc wyznaczenie a pozwala określić ciśnienie.

Skrupulatnie rozwiązany przykład to "zogniskowana fala prosta".

Przypominamy niezmienniki Riemanna:

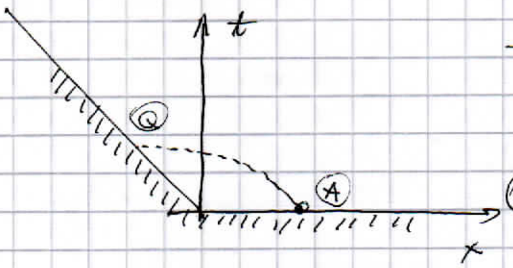
$$C_+ = u + \frac{2}{\kappa-1}a, \quad C_- = u - \frac{2}{\kappa-1}a$$

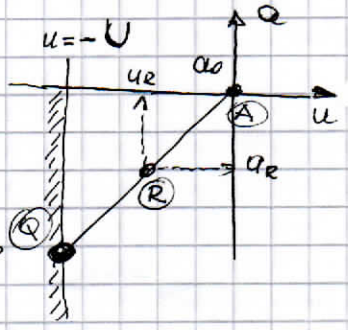
Weźmy diagram $u-a$. Na tym diagramie można narysować dwie proste odpowiadające zmienności u i a zgodnej z niezmiennikami.



Przypuśćmy, że znamy wartości prędkości i prędkości dźwięku w punktach A i B. Kreśląc linie (to proste!) C_+ i C_- znajdujemy w przecięciu interesujące wielkości: a_Q i u_Q ...

Rozwiązywanie uprzednio zadanie sprowadza się do następującego szkicu:

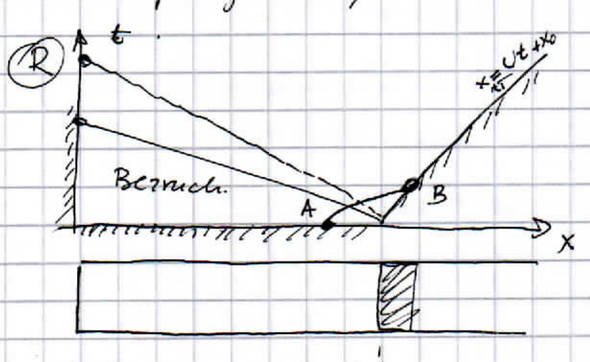


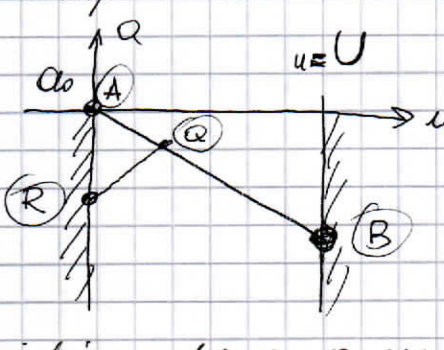


Zaznaczmy a_0. Punkt $u=0$ i $a=a_0$ to warunek początkowy. Z kolei $u=-U$ to warunek brzegowy na tłoku. Niezmiennik C_- odpowiadający wartościom u i a zmieniającym się na charakterystyce (−) zaznaczonej jako A–Q to prosta AQ na diagramie $u-a$.

Na odcinku AQ diagramu $u-a$ można wybrać wiele punktów pośrednich. Każdemu z nich odpowiada pewna prędkość i prędkość dźwięku, a więc i wartość niezmiennika C_+ obowiązującego wzdłuż charakterystyki X_+ należącej do pęku charakterystyk.
Na diagramie $x-t$ punkt R leży w dowolnym miejscu charakterystyki x_+. Jest tam zawsze ta sama prędkość i ta sama prędkość dźwięku, a więc nachylenie nie ulega zmianie.

II W rurze z denkiem znajduje się tłok, który w chwili $t=0$ rozpoczyna ruch z prędkością U "od gazu". W chwili początkowej $a = a_0$. Wyznaczyć ruch.



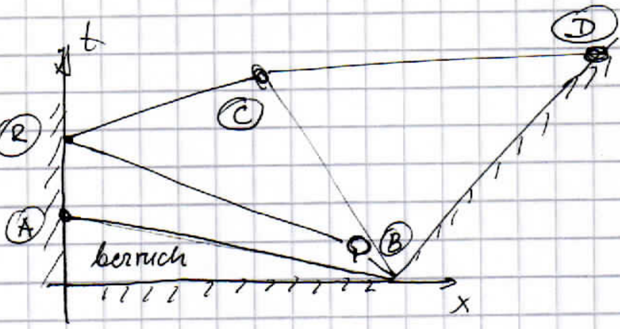


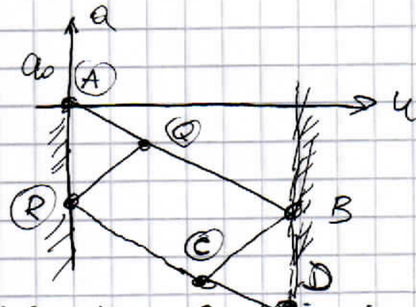
Dziedzina: $t \geq 0$, $0 \leq x \leq x_{tłoka} = x_0 + Ut$

Warunek początkowy: $t=0$, $u=0$, $a=a_0$

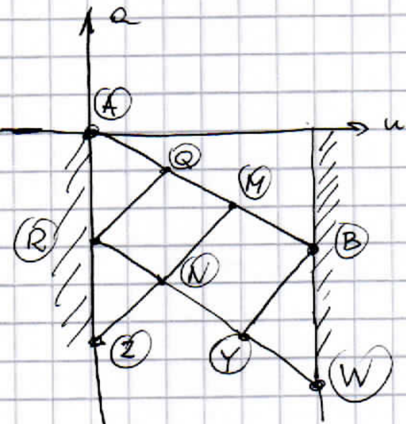
Warunki na brzegach: $x=0$ $u=0$, $x=x_{tłok}$ $u=U$.

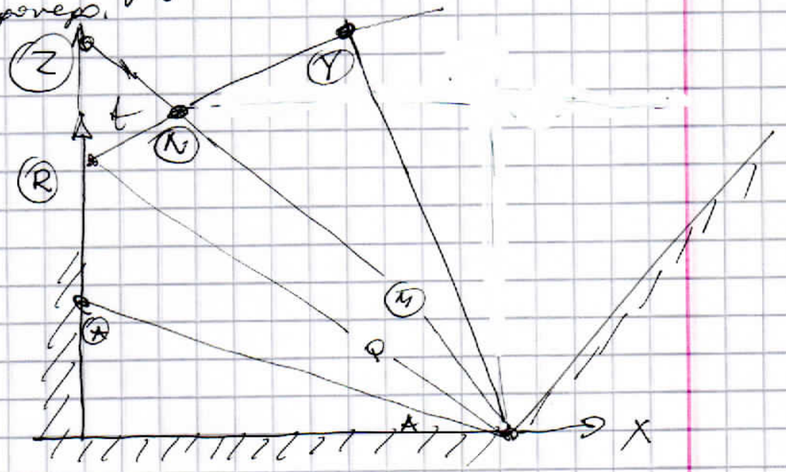
Charakterystyce AB – to charakterystyka x_+ odpowiadająca niezmiennik C_+.
Znajdujemy U_B. Wcześniej – wybieramy na linii "tego" niezmiennika punkt Q. Może on być blisko A. Z niego wychodzi linia obrazująca niezmiennik C_-. W przecięciu z warunkiem $u=0$ otrzymamy punkt R. Gdy Q→A, to mamy "pierwszą" charakterystykę odgradzającą bezruch od gazu ruchomego.





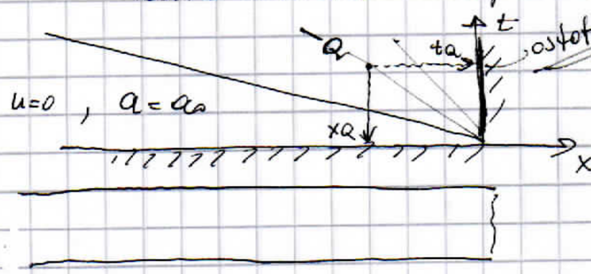
Dalej: z (R) "wychodzi" charakterystyka X_+. Przetnie się z charakterystyką X_- przechodzącą przez (B). (B) odpowiada pełnej prędkości tłoka.
Dalej: z (C) do linii obserwującej położenie tłoka przechodzi charakterystyka X_+.
Na diagramie $u-a$ przesuwamy ją aż do linii $u = U$, czyli do obszaru warunku brzegowego.

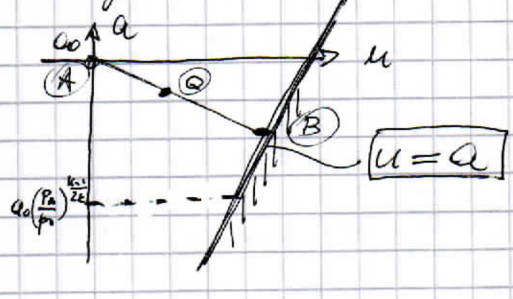




Jak widać, rozproszenie charakterystyk na diagramie $x-t$ jest dość "niewidoczne".

(III) Gaz wypływa do otoczenia przez otwór wytworzony pękniętą membraną. Ciśnienie zewnętrzne p_A, w rurze p_0. Prędkość dźwięku przed otwarciem membrany $= a_0$.
Rura bardzo długa.





Jedyny problem to warunek brzegowy w przekroju wylotowym.
Otóż – dla małych ciśnień w rurze (względem p_A) ruch jest powolny. Ruch w otworze. Jeśli p_0/p_A jest wielkością znaczną, to w przekroju wylotowym $u=a$.
W przeciwnym przypadku można założyć, że $a_{wylot} = a_0\left(\frac{p_A}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}$.

Przyjmijmy pierwszy wariant. Wtedy pojawia się pęk charakterystyk.
Pierwsza odpowiada zerowej prędkości i prędkości dźwięku $= a_0$.
Ostatnia to ta, dla której mamy $u = a$! Wobec tego jej pochylenie jest ZEROWE...

$$\frac{dx_-}{dt}\Big|_{ostatnie} = u - a = 0.$$

Posługując się obrazem niezmiennika Czytelnik z łatwością znajdzie parametry dla t_Q i x_Q. Jest tam $\frac{dx_-}{dt} = u_Q - a_Q = x_Q/t_Q$.
I mamy jeszcze związek: $u_Q - \frac{2}{k-1}a_Q = -\frac{2}{k-1}a_0$. Powtarzamy rachunek z zadania (I).

Jak można się (także) zorientować – „kreślenie" charakterystyk lub pisanie programu wykonującego tę czynność nie stanowi większego zajęcia.

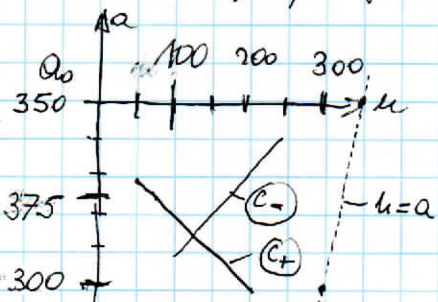
Podkreślamy, że wzdłuż charakterystyk zachowane są wartości niezmienników, ale – ZARÓWNO PRĘDKOŚĆ DŹWIĘKU jak i PRĘDKOŚĆ GAZU – mogą się zmieniać i, na ogół, zmieniają się.
Wobec tego zmienia się pochylenie charakterystyk.
Aby uzyskać dostateczną dokładność trzeba, by siatka tych linii była gęsta. To wymaga użycia wielu punktów węzłowych i utrudnia kreślenie w znacznym stopniu.

Natomiast siatka niezmienników na płaszczyźnie $u-a$ jest względnie prosta. Pochylenia linii obrazujących niezmienniki są stałe. Po prostu jest tak:

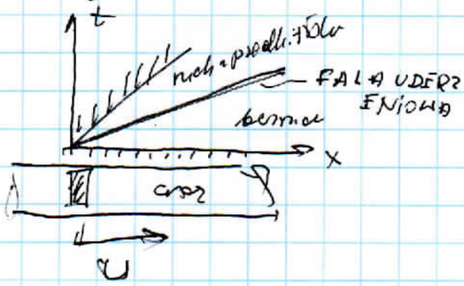
$u + \frac{2}{\kappa-1} a = C_+ \longrightarrow \frac{da}{du} = -\frac{\kappa-1}{2}$ i, odpowiednio, dla C_- jest tak:

$u - \frac{2}{\kappa-1} a = C_- \longrightarrow \frac{da}{du} = +\frac{\kappa-1}{2}$. To stałe. Rysując – dobrze jest zastosować różne odległości jednostki dla osi u oraz a. Jeśli tak zrobić, to biorąc $\frac{2}{\kappa-1}$ ~~razy~~ dłuższy odcinek wzdłuż osi a niż dla osi u za jednostkę – będziemy mieli nachylenie $\pi/4$ i $-\pi/4$ (czyli $\pm 45^\circ$).

Sytuacja jest przedstawiona na szkicu. Trudność – to przedstawienie linii $u=a$. Ma ona niemal pionowy kierunek...

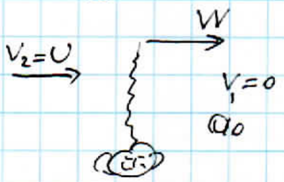


Z tego, co powiedziano wynika prosty wniosek: stosując charakterystyki i niezmienniki możemy zorientować się (w tzw. "grubym przybliżeniu") jak przebiega ruch gazu. I jak się zmieniają parametry termodynamiczne.
Dokładny sposób obliczania wymaga innych metod.
Zanim omówimy te metody, zobaczymy, co dzieje się w zadaniu z tłokiem który porusza się "w stronę gazu".
Oczywiście, zachodzi sprężanie.



Czytelnik pamięta, że w takiej sytuacji, gdy tłok rozpoczął nagle ruch z prędkością U, pojawia się fala uderzeniowa.

Fala ta porusza się szybciej niż tłok. Jej prędkość W obliczamy (to było!) tak:

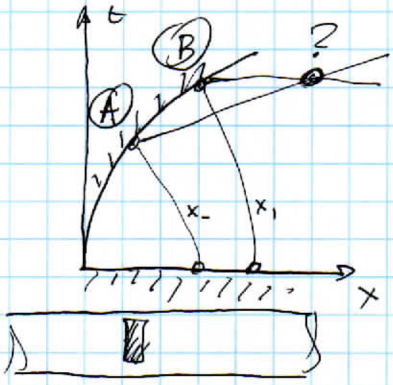


$$W(W-U) = a_*^2$$

$$\frac{W^2}{2} + \frac{a_0^2}{\kappa-1} = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)} a_*^2$$

bo $u_1 = W$, $u_2 = W-U$ i $a_1 = a_0$.

A jak przebiega zjawisko gdy tłok rozpoczyna ruch ze skończonym przyspieszeniem? Sprawa jest bardziej złożona...



W chwili $t=0$ gaz i tłok nie miały ruchu... To znaczy, że $u = 0$, $a = a_0$. Istnieją charakterystyki x_- wzdłuż których wartości niezmiennika C_- są takie same. Dla A i B mamy:

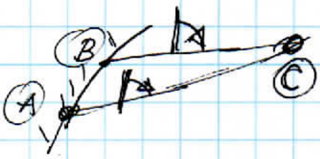
$$u_A - \frac{2}{k-1} a_A = -\frac{2}{k-1} a_0$$

$$u_B - \frac{2}{k-1} a_B = -\frac{2}{k-1} a_0.$$

Wyznaczamy a_A i a_B: $a_A = a_0 - \frac{k-1}{2} u_A$ i odpowiednio $a_B = a_0 - \frac{k-1}{2} u_B$.
Wobec tego charakterystyki x_{+A} i x_{+B} mają pochylenia:

$$\left.\frac{dx_+}{dt}\right|_A = u_A + a_A = a_0 + \frac{3-k}{2} u_A \quad i \quad \left.\frac{dx_+}{dt}\right|_B = a_0 + \frac{3-k}{2} u_B$$

Ponieważ $u_B > u_A$, to pochylenie $x_{+|B}$ jest większe, niż x_{+A}...



Przecięcie charakterystyk tej samej rodziny prowadzi do niejednoznaczności.
Jaka jest wartość niezmiennika C_+ w punkcie C? Czy taka, jak dla charakterystyki x_{+A} czy x_{+B}?

To różne wartości. Czytelnik je z łatwością obliczy. Mamy bowiem wyznaczone a_A i a_B, a prędkości to u_A i u_B.

Jak widać z tego przykładu, przy **sprężaniu** gazu nie zachodzi któreś z poczynionych założeń...
A założeniami: zachowanie masy, II prawo dynamiki i izentropowości. Dwa pierwsze założenia nie mogą być podważone...
A izentropowość? To było założenie równoważne przyjęciu równowagi termodynamicznej — to znaczy ciągłości pól (prędkości, ciśnienia, ...).
A jeśli teorii nie można stosować — to oznacza, że trzeba wyeliminować założenie o równowadze — i, co za tym idzie, o ciągłości...
To znaczy, że w omawianym przykładzie powstanie FALA UDERZENIOWA.
Początkowo słaba, w miarę wzrostu prędkości tłoka — wzmacniana... Wzmacniana przez wzrost sprężania gazu.
Aby wyznaczyć ruch zarówno z falami **zgęszczeniowymi** — a więc **uderzeniowymi** — i falami **rozrzedzeniowymi z przemianą izentropową** zastosujemy trzy zasady mechaniki ośrodków ciągłych. To zasada **zachowania masy**, **II zasada dynamiki** i zasada zachowania energii.
Przypominamy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho V_k) = 0 \qquad \text{masa}$$

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial}{\partial x_k} V_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{II prawo dynamiki}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} e + \rho V_i \frac{\partial}{\partial x_i} e = -\frac{\partial}{\partial x_k} p V_k$$ zachowanie energii

Pominięto tu lepkość, efekty cieplne, dostarczanie i odbiór pracy.

Lewe strony równania ruchu i równanie energii można przepisać tak:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial}{\partial x_k} V_i = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho V_k V_i)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho V_i \frac{\partial}{\partial x_i} e = \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i e)$$

bo z równania ciągłości wynika zerowanie wyrazów typu

$$(\ )\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\ )\frac{\partial}{\partial x_k}\rho V_k = (\ )\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho V_k)\right]$$

występujących po różniczkowaniu iloczynów $\rho V_i e$ czy $\rho V_k V_i$.

Energia e to: $e = \frac{V^2}{2} + c_v T = \frac{V^2}{2} + \frac{1}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}$,
a więc ciśnienie może być obliczone tak:

$$p = (\kappa-1)\rho\left[e - V^2/2\right].$$

Przepiszemy równania tak:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho V_k) = 0$$ sumujemy w/g k!

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho V_k V_i + p\,\delta_{ki}) = 0$$ $i = 1, 2, 3$ (trzy równania!)

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho V_k e + V_k p) = 0$$

Jak widać, mają identyczną formę.
Dla ruchu jednowymiarowego, z jedyną składową prędkości $V_1 = u$, $u = u(t,x)$ i podobnie, $p = p(t,x)$, $\rho = \rho(t,x)$ itd. przy jednej zmiennej przestrzennej $x_1 = x$ piszemy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u + p) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[u(\rho e + p)\right] = 0$$

Idea jest następująca: z pierwszego równania można wyznaczyć ρ. Z drugiego – znając ρ – u. Wreszcie, z trzeciego, znając ρ i u wyznaczamy p. Elegancka (w zapisie) postać wymaga ujednolicenia oznaczeń. Są takie:

$$X_1 = \rho,\quad X_2 = \rho u,\quad X_3 = \rho e,\quad F_1 = \rho u = F_1(X_1)$$

$$F_2 = \rho u u + p = F_2(X_1, X_2, X_3),\quad F_3 = u(\rho e + p) = F_3(X_1, X_2, X_3)$$

Czytelnik domyśla się, że mamy WEKTOR $\mathbf{X}$ i wektor $\mathbf{F}$. A równanie – wektorowe – jest takie

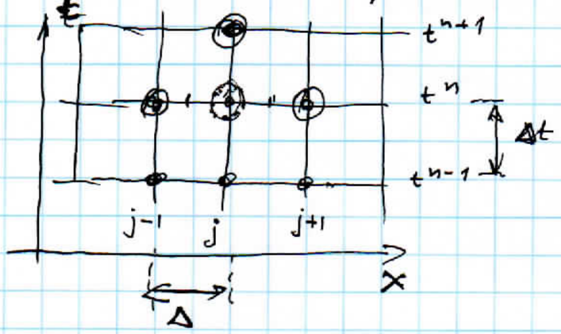
$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$$

Wprowadzamy SIATKĘ: $t = \ldots t^{n-1}, t^{n}, t^{n+1} \ldots$ i $x = \ldots x_{j-1}, x_{j}, x_{j+1} \ldots$

Odpowiednik różnicowy ostatniego równania musi być łatwo sformułowany...

Niestety, zawsze przy zastąpieniu pochodnych ilorazami skończonymi pojawia się problem **STABILNOŚCI**. Z grubsza – niestabilność to nieograniczone narastanie błędu (odchyłki pomiędzy rozwiązaniem i rozwiązaniem aproksymacji różnicowej równań).

Aby zapewnić stabilność – i tym samym możliwość uzyskania przybliżonego rozwiązania, które wraz z maleniem **oczek siatki** dąży do wartości rozwiązania wyjściowych równań trzeba stosować odpowiednie **SCHEMATY NUMERYCZNE JAWNE**.



Najprostsze to:
SCHEMAT LAXA:

$$X_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_{j-1}^{n} + X_{j+1}^{n}\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta}\left(F(X_{j-1}^{n}) - F(X_{j+1}^{n})\right)$$

i **SCHEMAT LAXA–WENDROFFA:**

$$X_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(X_j^n + X_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta}\left(F(X_{j+1}^n) - F(X_j^n)\right)$$

$$X_{j-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(X_{j-1}^n + X_j^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta}\left(F(X_j^n) - F(X_{j-1}^n)\right)$$

$$X_j^{n+1} = X_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta}\left(F(X_{j+1/2}^{n+1/2}) - F(X_{j-1/2}^{n+1/2})\right)$$

Warunkiem **STABILNOŚCI** jest zgodnie dostatecznie małego kroku czasowego Δt:

$$\left(|u| + a\right)\Delta t < \Delta$$

Ten warunek nosi nazwę warunku Couranta-Friedrichsa-Lewy'ego, w skrócie CFL.

To typowe zadanie dla tzw. JAWNYCH schematów różnicowych. Czytelnik zauważył, że jedynym problemem jest tu sformułowanie warunków brzegowych dla krańców przedziału zmiennej przestrzennej. Związki opisujące te warunki mogą być niezbyt proste w sformułowaniu. Ale – o tym w kolejnym etapie kształcenia...