Wykład 5

Dwurównaniowe i jednorównaniowe modele turbulencji – standardowy model k-ω, model SST i model Spalarta-Allmarasa.

Sławomir Kubacki
slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl

Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej,
Politechnika Warszawska

sierpień, 2013

Zakres wykładu

- Standardowy model k-ω
- Własności i ograniczenia modelu k-ω
- Model k-ω SST
- Model Spalarta - Allmarasa

Model k-ω

- W przypadku dwurównaniowych modeli turbulencji, równanie które stosowane jest do określenia skali turbulencji nie musi być koniecznie równaniem dla ε
- Przykładem może być model k-ω w którym drugą wielkością jest $\omega \sim \varepsilon/k$ nazywana charakterystyczną częstotliwością fluktuacji turbulentnych
- Pierwszy model dwurównaniowy (był to model k-ω) został zaproponowany przez Kołmogorowa (1942)
- Jednak istotny rozwój i popularyzację tego modelu zawdzięczmy głównie pracom Wilcoxa (1988, 1993, 2006)
- Powszechnie znaną zaletą tego modelu, w odniesieniu do modelu k-ε, jest jego większa dokładność w opisie przepływów przyściennych

Standardowy model k-ω

Model k-ω (Wilcox, 1988) dany jest następującymi równaniami:

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \beta^* k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j}[\left(\nu + \sigma^* \nu_t\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}] \qquad (1)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}[\left(\nu + \sigma \nu_t\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}] \qquad (2)$$

współczynnik lepkości turbulentnej

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \qquad (3)$$

produkcja P_k:

$$P_k = \nu_t S^2 \qquad S^2 = 2 S_{ij} S_{ij}$$

stałe

$$\alpha = 5/9, \quad \beta = 3/40, \quad \beta^* = 0.09, \quad \sigma = 0.5, \quad \sigma^* = 0.5$$

Najnowsza wersja modelu k-ω

Najnowsza wersja modelu k-ω (2008 r.) przyjmuje postać:

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \sigma^* \frac{k}{\omega}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{4}$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \sigma \frac{k}{\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \frac{\sigma_d}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \tag{5}$$

człon cross-dyfuzji

współczynnik lepkości turbulentnej

$$\nu_t = \frac{k}{\tilde{\omega}} \tag{6}$$

produkcja P_k i dyssypacja

$$P_k = \nu_t S^2 \qquad \tilde{\omega} = \max\left(\omega, C_{lim}\sqrt{\frac{2S_{ij}S_{ij}}{\beta^*}}\right) \tag{7}$$

Najnowsza wersja modelu k-ω

Stałe i pozostałe zależności

$$\beta^* = 0.09 \quad C_{\lim} = 7/8 \quad \alpha = 13/25 \quad \sigma = 0.5 \quad \sigma^* = 0.6 \quad \sigma_{do} = 0.125$$

$$\sigma_d = \begin{cases} 0, & \dfrac{\partial k}{\partial x_j}\dfrac{\partial \omega}{\partial x_j} \leq 0 \\ \sigma_{do} & \dfrac{\partial k}{\partial x_j}\dfrac{\partial \omega}{\partial x_j} > 0 \end{cases} \tag{8}$$

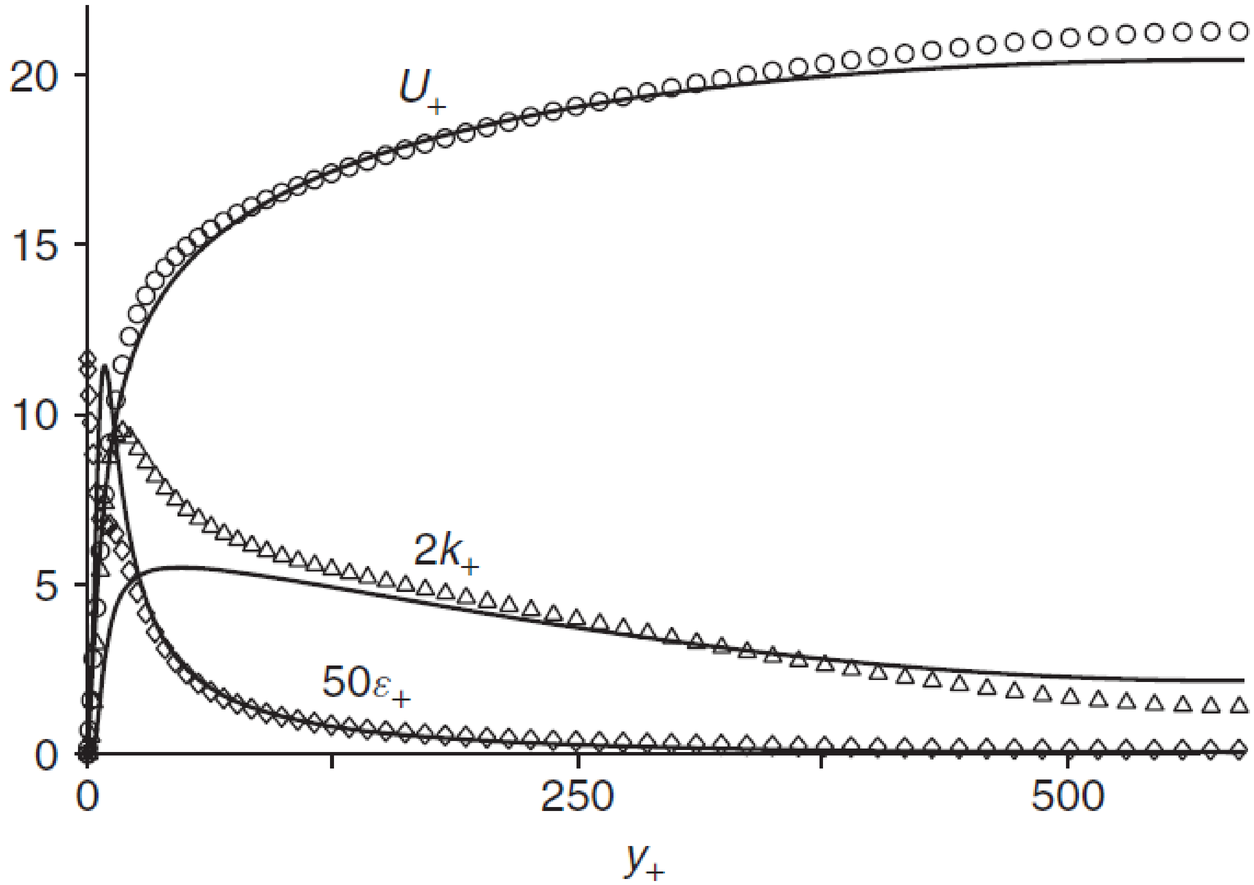
$$\beta = \beta_0 f_\beta \qquad \beta_0 = 0.0708 \quad f_\beta = \frac{1+85\chi_\omega}{1+100\chi_\omega}$$

stała β zależna od χ_ω

- poprawa własności modelu w przepływach swobodnych

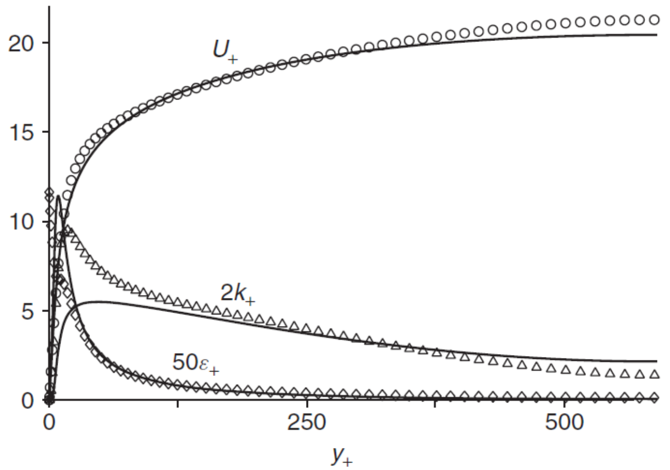
$$\chi_\omega \equiv \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta^*\omega)^3} \right| \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \qquad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

Własności modelu k-ω - przepływ w warstwie przyściennej



Własności modelu k-ω - przepływ przyścienny

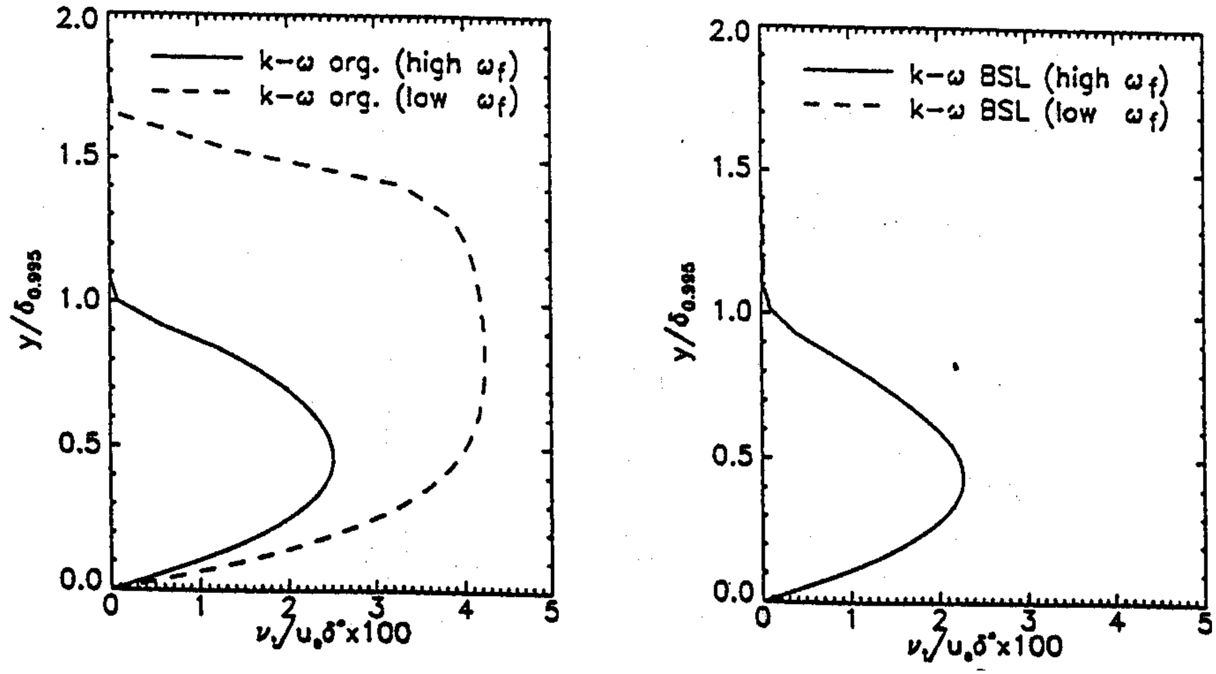
- DNS w sposób poprawny wskazuje niezerowy poziom dyssypacji ε na ścianie.
- Model k-ω: dyssypacja wynosi 0 na ścianie i występuje duży pik na profilu $\varepsilon=C_\mu k\omega$ (przeskalowany 50 razy) dla $y^+=10$. Ten nadmierny poziom dyssypacji dla $y^+=10$ prowadzi do silnego obniżenia poziomu energii kinetycznej turbulencji w pobliżu ściany.
- Zbyt niski poziom energii kinetycznej turbulencji w pobliżu ściany nie skutkuje jednak błędem przy oszacowaniu naprężeń turbulentnych. W przeciwnym razie nie uzyskano by dobrej zgodności profili średnich prędkości .
- Jest to pożądana własność ponieważ współczynnik lepkości turbulentnej jest używany w równaniach RANS.
- Modele klasy k-ω nie wymagają więc stosowania funkcji tłumiących w równaniach (3) lub (6) ani nie wymagają stosowania innych modeli w pobliżu ścian. Pod tym względem stosowanie modelu k-ω jest znacznie prostsze niż stosowanie modelu k-ε.



Własności modelu k-ω

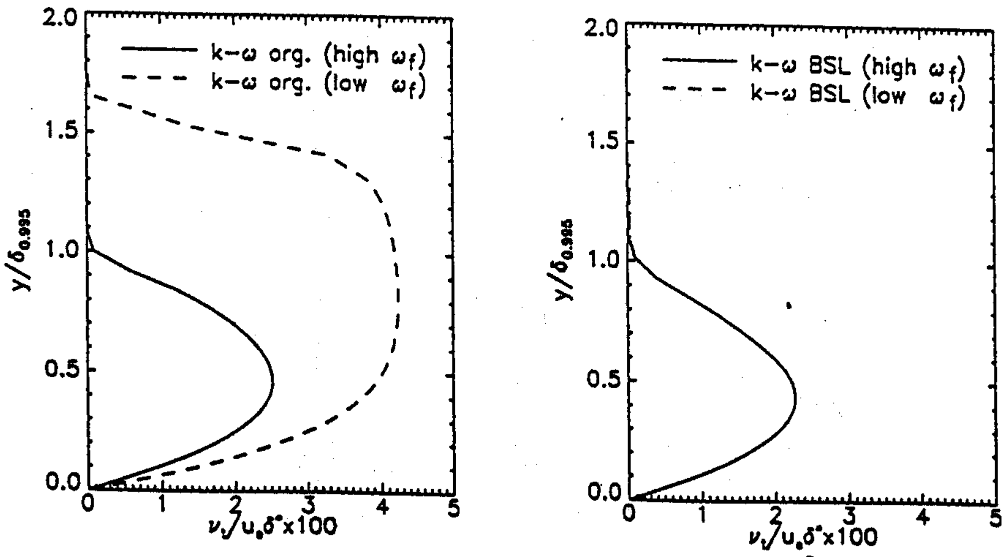
- Standardowy model k-ω wykazuje znaczne lepsze własności w porównaniu z modelem k-ε w symulacji przepływów turbulentnych w warstwie przyściennej.
- Model k-ω (nie dotyczy to jednak najnowszej wersji modelu z 2008 r.) ma jednak dosyć istotną wadę. Otóż rozwiązanie uzyskane z pomocą tego modelu silnie zależy od wartości zmiennych k i ω, zdefiniowanych na brzegach obszaru obliczeniowego znajdujących się daleko od ścian.
- Model k-ε nie wykazuje tak silnej wrażliwości na wartości zmiennych na brzegu obszaru obliczeniowego.

Własności modelu k-ω i k-ε



Profil lepkości turbulentnej uzyskany z zastosowaniem standardowego modelu k-ω (lewy) i z pomocą modelu k-ε (transformowanego do modelu k-ω), (prawy). Menter (1994).

Własności modelu k-ω i k-ε



- W obydwu przypadkach, przyjęcie dużych wartości zmiennej ω nie wpływa na jakość rozwiązania.
- Jednak w przypadku przyjęcia zbyt małych (niefizycznych) wartości zmiennej ω (lewy) w istotny sposób zmieniony zostaje profil ω nie tylko na zewnątrz warstwy przyściennej ale również w środku warstwy.
- Model k-ε jest praktycznie nieczuły na zmiany tej wielkości.

Własności modelu k-ω

- Jak pokazał Menter (1994) i Kok (2000) istotne znaczenie w ograniczeniu nadmiernej wrażliwości modelu k-ω ma człon cross-dyfuzji który pojawia się np. na etapie transformacji równań modelu k-ε do modelu k-ω (w drugą stronę również ze zmienionym znakiem).
- Odpowiedni dobór współczynników dyfuzji jak i współczynnika przy członie cross-dyfuzji (Równ. 5) pozwala ograniczyć wspomnianą wrażliwość modelu k-ω.
- Pragmatycznym rozwiązaniem tego problemu było opracowanie przez Mentera (1994) modelu hybrydowego który w pobliżu ścian używa oryginalny model k-ω, natomiast daleko od ścian model k-ε.
- Zastosowanie tego podejścia wymagało transformacji równań modelu k-ε do modelu k-ω. Stałe modelu zostały odpowiednio zmodyfikowane z użyciem odpowiednich funkcji.

Transformacja modelu k-ε do modelu k-ω

Przyjmujemy standardowy model k-ε

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) \tag{9}$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P_k - c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) \tag{10}$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{11}$$

$$c_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92 \tag{12}$$

Transformacja modelu k-ε do modelu k-ω - człony źródłowe

Wiemy, że $\varepsilon=\beta^* k\omega$. Pochodna substancjalna wynosi:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\frac{D}{Dt}\left(\beta^* k\omega\right)=\beta^*\omega\frac{Dk}{Dt}+\beta^* k\frac{D\omega}{Dt} \tag{13}$$

Otrzymujemy:

$$\frac{D\omega}{Dt}=\frac{1}{\beta^* k}\frac{D\varepsilon}{Dt}-\frac{\omega}{k}\frac{Dk}{Dt} \tag{14}$$

Dε/Dt i Dk/Dt w Równ. (14) można przyjąć na podstawie Równ. (10) i (9).

W pierwszej kolejności modyfikacji podlegają człony źródłowe:

$$\frac{D\omega}{Dt}=\frac{1}{\beta^* k}\left(c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P_k-c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}\right)-\frac{\omega}{k}\left(P_k-\varepsilon\right)+\frac{1}{\beta^* k}\mathrm{Diff}_\varepsilon-\frac{\omega}{k}\mathrm{Diff}_k \tag{15}$$

Otrzymujemy:

$$\frac{D\omega}{Dt}=\underbrace{\left(c_{\varepsilon 1}-1\right)}_{\alpha_2}\frac{\omega}{k}P_k-\underbrace{\beta^*\left(c_{\varepsilon 2}-1\right)}_{\beta_2}\omega^2+\frac{1}{\beta^* k}\mathrm{Diff}_\varepsilon-\frac{\omega}{k}\mathrm{Diff}_k \tag{16}$$

Transformacja modelu k-ε do modelu k-ω - człony dyfuzyjne

Na podstawie Równ. (9) i (10) człon dyfuzyjny w transformowanym równaniu dla ω (16) przyjmuje postać

$$\frac{1}{\beta^* k}\mathrm{Diff}_\varepsilon - \frac{\omega}{k}\mathrm{Diff}_k = \frac{1}{\beta^* k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)\right] - \frac{\omega}{k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\beta^* k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial (\beta^* k\omega)}{\partial x_j}\right)\right] - \frac{\omega}{k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\beta^* k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\beta^* k\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)\right] + \frac{1}{\beta^* k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\beta^* \omega\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)\right] - \frac{\omega}{k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{k}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\omega}{k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) +$$

$$- \frac{\omega}{k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)\right] =$$

Transformacja modelu k-ε do modelu k-ω - człony dyfuzyjne

cd.

$$\frac{1}{\beta^* k}\mathrm{Diff}_\varepsilon - \frac{\omega}{k}\mathrm{Diff}_k = \frac{2}{k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right) +$$

$$+ \underbrace{\frac{\omega}{k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) - \frac{\omega}{k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)}_{\cong 0 \quad \mathrm{dla} \quad \sigma_k \cong \sigma_\varepsilon}.$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie dla ε transformowane do równania dla ω:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \underbrace{\left(c_{\varepsilon 1} - 1\right)}_{\alpha_2}\frac{\omega}{k}P_k - \underbrace{\beta^*\left(c_{\varepsilon 2} - 1\right)}_{\beta_2}\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right) + \frac{2}{k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \qquad (17)$$

↑

Pojawia się dodatkowy składnik tzw. człon cross-dyfuzji.

Brak tego członu w standardowym modelu k-ω odpowiada za jego nadmierną wrażliwość na przyjęte wartości wielkości turbulentnych na brzegu obszaru położonym daleko od ściany.

Składnik cross-dyfuzji w równaniu dla ω

Wprowadzenie członu cross-dyfuzji istotne jest tylko daleko od ścian (wpływ lepkości ν znikomy).

Równ. (17) można więc zapisać w następującej postaci (pomijając lepkość ν w członie cross-dyfuzji i przyjmując że $\nu_t = k/\omega$)

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha_2 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_2 \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right) + \frac{2}{\sigma_\varepsilon \omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \qquad (18)$$

W pobliżu ścian człon $\partial k/\partial x_j \; \partial\omega/\partial x_j < 0$ – oznacza to, że ω uzyskana na podstawie Równ. (18) (model k-ε) będzie mniejsza (większa turbulencja) od tej którą uzyskuje się na podstawie rozwiązania Równ. (2). Tłumaczy to podwyższony poziom dyssypacji ε która występuje w pobliżu ścian stosując standardowy model k-ω (Równ. 1 i 2, patrz rys. na str. 7).

Daleko od ścian $\partial k/\partial x_j \; \partial\omega/\partial x_j > 0$ – oznacza to ω uzyskana na podstawie Równ. (18) (model k-ε) będzie większa od tej uzyskanej z Równ. (2) (silniejsze tłumienie efektów turbulentnych w przypadku modelu k-ε).

Model k-ω SST

Pragmatycznym rozwiązaniem problemu nadmiernej wrażliwości standardowego modelu k-ω od k_0 i ω_0 było opracowanie przez Mentera (1994) modelu hybrydowego który w pobliżu ścian używa oryginalny model k-ω, natomiast daleko od ścian model k-ε.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Dk}{Dt} &= P_k - \beta^* k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa})\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \\
\frac{D\omega}{Dt} &= \alpha\frac{\omega}{k}P_k - \beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega})\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \frac{2}{\sigma_\omega \omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}
\end{aligned}\right| \times (1 - F_1)$$

$$+$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Dk}{Dt} &= P_k - \beta^* k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa})\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \\
\frac{D\omega}{Dt} &= \alpha\frac{\omega}{k}P_k - \beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega})\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right]
\end{aligned}\right| \times F_1$$

$$=$$

Model k-ω SST

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \beta^* k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \frac{\nu_t}{\tilde{\sigma}_\kappa})\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \qquad (19)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \tilde{\alpha}\frac{\omega}{k}P_k - \tilde{\beta}\omega^2 + (1-F_1)\frac{2}{\sigma_\omega \omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \frac{\nu_t}{\tilde{\sigma}_\omega})\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] \qquad (20)$$

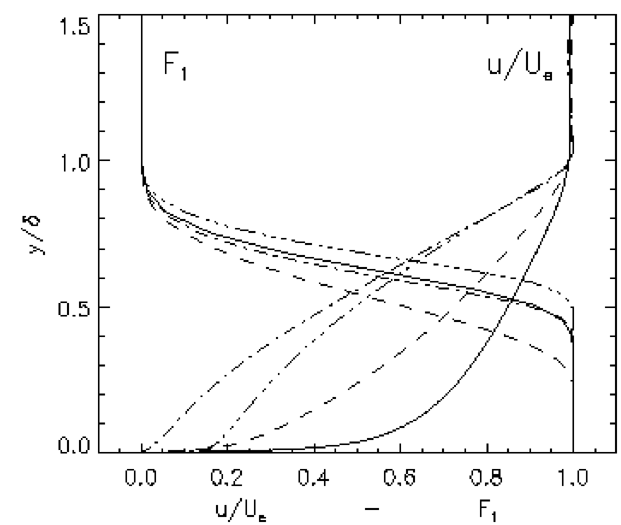
Wszystkie współczynniki są uzależnione od wartości funkcji F_1.

$$\tilde{\alpha} = \alpha_{k-\omega} \times F_1 + \alpha_{k-\varepsilon}(1-F_1) \qquad (21)$$

$$F_1 = \tanh\left(\arg_1{}^4\right) \qquad (22)$$

$$\arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2} k}{CD_{SST} y^2}\right]$$

$$CD_{SST} = \max\left(2\rho\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 1.0e-10\right)$$



Model k-ω SST

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \beta^* k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \qquad (23)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha P_\omega - \beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega}) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{2\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \qquad (24)$$

gdzie

$$P_k = \nu_t S^2 \qquad P_\omega = P_k / \nu_t$$

przy czym $\beta^* = 0.09$, $\sigma_k = 0.85*F_1 + 1.0*(1-F_1)$, $\alpha = 0.553*F_1 + 0.44*(1-F_1)$, $\beta = 0.075*F_1 + 0.0828*(1-F_1)$, $\sigma_\omega = 0.5*F_1 + 0.856*(1-F_1)$, $\sigma_{\omega 2} = 0.856$.

Współczynnik lepkości turbulentnej posiada limiter naprężeń Reynoldsa (dyskutowany na jednym z poprzednich wykładów)

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1\omega, SF_2)} \qquad (25)$$

gdzie a_1=0.31, funkcja F_2 jest zdefiniowana podobnie jak funkcja F_1.

$$F_2 = \tanh\left(\arg_2{}^2\right) \qquad \arg_2 = \max\left(2\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega}\right)$$

Model k-ω SST

Związek Bradshawa:

$$-\overline{uv} = \nu_t \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| = a_1 k \quad (26)$$

Otrzymujemy więc

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|}$$

Zmieniony warunek na współczynnik lepkości turbulentnej

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max\left(SF_2, a_1 \omega\right)}$$

Model k-ω SST

Dla przepływu w warstwie przyściennej

$$P_k = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}^2 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \sqrt{\frac{P_k}{\nu_t}}$$

Naprężenia turbulentne można interpretować jak poniżej

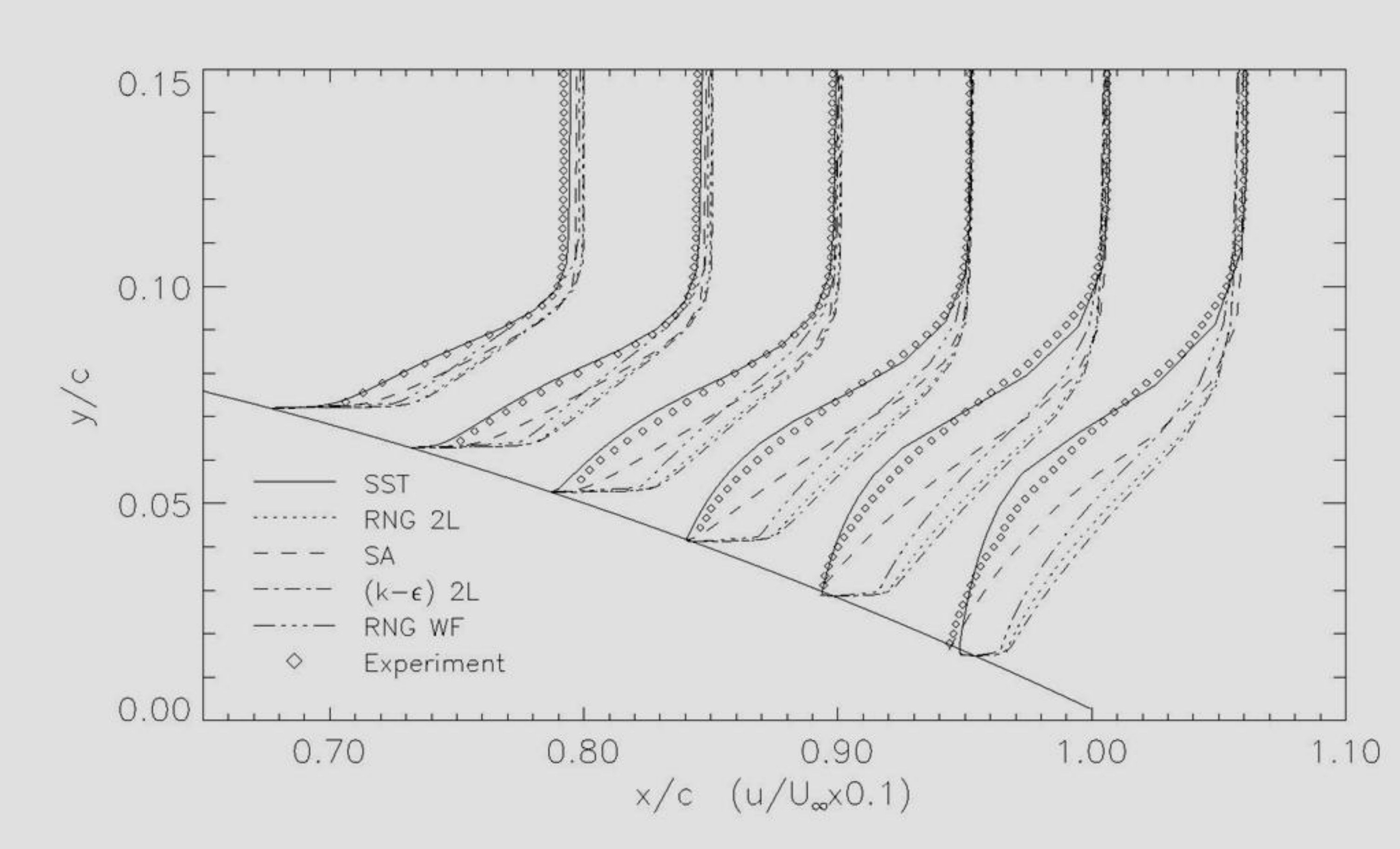
$$\tau_{xy} = \nu_t \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| = \nu_t \sqrt{\frac{P_k}{\nu_t}} = \sqrt{\nu_t P_k} = \sqrt{C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} P_k} = k\sqrt{C_\mu}\sqrt{\frac{P_k}{\varepsilon}}$$

Dla $P_k=\varepsilon$ otrzymujemy relacje Bradshawa (26)

W przepływie z ujemnym gradientem ciśnienia model turbulencji wykazuje $P_k >> \varepsilon$ (w rzeczywistości jest na odwrót)

Związek Bradshawa tłumi więc nadmierną nadprodukcję turbulencji zakładając $P_k = \varepsilon$

Model k-ω SST



0.15
0.10
0.05
0.00
y/c
0.70
0.80
0.90
1.00
1.10
x/c (u/U∞x0.1)
SST
RNG 2L
SA
(k−ε) 2L
RNG WF
Experiment

Model Spalarta-Allmarasa

Przyjmuje się że modele dwurównaniowe pozwalają na wiarygodne modelowanie przepływów zewnętrznych jak i wewnętrznych ponieważ dostarczają informacji o charakterystycznych skalach prędkościowych jak i skalach długościowych w przepływie.

W modelowaniu turbulencji stosowane są również modele jednorównaniowe jak i zerorównaniowe (model Prandtla bazujący na hipotezie drogi mieszania).

Istnieje jednorównaniowy model turbulencji dla współczynnika $\tilde{\nu} = \kappa u_\tau y$ zdefiniowanego w funkcji odległości od ściany y i prędkości tarcia u_τ (Spalart Allmaras, 1992).

Równanie różniczkowe dla $\tilde{\nu}$ („efektywna lepkość turbulentna”) przyjmuje postać równania transportu z członem konwekcyjnym, produkcyjnym, destrukcyjnym i dyfuzyjnym

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = P_{\tilde{\nu}} - D_{\tilde{\nu}} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left((\nu + \tilde{\nu})\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}\right) + c_{b2}\left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}\right)^2\right] \tag{27}$$

Model Spalarta-Allmarasa

Człon produkcyjny $P_{\tilde{\nu}}$ modelowany jest na bazie analizy wymiarowej jak poniżej

$$P_{\tilde{\nu}} = c_{b1}\tilde{\Omega}\tilde{\nu} \tag{28}$$

gdzie stała c_{b1} = 0.1355 (skalibrowana dla przepływów swobodnych). $\tilde{\Omega}$ oznacza moduł tensora wirowości (zdefiniowany poniżej).

Człon destrukcyjny (analogię z ε na ścianie- patrz jeden z poprzednich wykładów) jest funkcją odległości od ściany y^{-2}

$$D_{\tilde{\nu}} = c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{y}\right)^2 \tag{29}$$

współczynnik c_{w1} został oszacowany żądając aby w pobliżu ścian spełnione były warunki (przyjmujemy, że f_w=1):

$$\tilde{\nu} = \kappa u_\tau y \qquad \Omega = \frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \tag{30}$$

Pomijając wpływ członów konwekcyjnych w Równ. (27) otrzymujemy:

$$0 = c_{b1}\Omega\tilde{\nu} - c_{w1}\left(\frac{\tilde{\nu}}{y}\right)^2 + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left((\nu+\tilde{\nu})\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial y}\right) + c_{b2}\left(\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial y}\right)^2\right] \tag{31}$$

Model Spalarta-Allmarasa

Wstawiając Równ. (30) do (31) otrzymujemy

$$0 = c_{b1}\left(\frac{u_\tau}{\kappa y}\right)u_\tau \kappa y - c_{w1}\left(\frac{u_\tau \kappa y}{y}\right)^2 + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left((\nu + u_\tau \kappa y)\frac{\partial(u_\tau \kappa y)}{\partial y}\right) + c_{b2}\left(\frac{\partial(u_\tau \kappa y)}{\partial y}\right)^2\right]$$

Po przekształceniach otrzymujemy związek

$$c_{w1} = c_{b1}\kappa^{-2} - (1 + c_{b2})/\sigma_{\tilde{\nu}} \qquad (32)$$

Spełnienie równ. (32) gwarantuje więc spełnienie warunków (30). Jednym z podstawowych założeń w opracowaniu modelu transportu dla $\tilde{\nu}$ jest uzyskanie quasi-linowej zmienności współczynnika $\tilde{\nu}$ w funkcji odległości od ściany. Człon destrukcyjny w równ. (27) może powodować nadmierną „dyssypację" daleko od ścian (bo $D_{\tilde{\nu}} = c_{w1}(\tilde{\nu}/y)^2$ - lepkość turbulentna rośnie szybciej od y) . Spalart i Allmaras dezaktywują więc człon destrukcyjny daleko od ścian z wykorzystaniem funkcji f_w (f_w=1 na ścianie i $f_w \rightarrow 0$ dla $y \rightarrow \infty$). f_w dane jest jak poniżej:

$$f_w = g\left[\frac{65}{g^6 + 64}\right]^{1/6} \qquad (33)$$

gdzie $g = r + 0.3(r^6 - r)$, $r = \tilde{\nu}/\left(\tilde{\Omega}(\kappa y)^2\right)$.

Model Spalarta-Allmarasa

Zmodyfikowany moduł tensora wirowości przyjmuje postać

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 y^2} - \frac{\tilde{\nu}^2}{\nu \kappa^2 y^2 \left(1 + (\tilde{\nu}/\nu) f_{v1}\right)} \tag{34}$$

f_{v1} jest funkcją tłumiącą która kontroluje stopień wzrostu lepkości turbulentnej w pobliżu ściany. $\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$, $\Omega_{ij} = 1/2\left(\partial U_i/\partial x_j - \partial U_j/\partial x_i\right)$.

$$f_{v1} = \frac{(\tilde{\nu}/\nu)^3}{(\tilde{\nu}/\nu)^3 + c_{v1}^{\ 3}} \tag{35}$$

W pobliżu ścian (dla y→0 i f_{v1}→0) trzeci człon na prawej stronie Równ. (34) eliminuje Ω. Otrzymujemy więc

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 y^2} - \frac{u_\tau^2}{\nu} \tag{36}$$

Wiedząc, że $\frac{u_\tau^2}{\nu} \cong \Omega$ otrzymujemy

$$\tilde{\Omega} \cong \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 y^2} \cong \frac{u_\tau}{\kappa y} \cong \frac{\partial U}{\partial y} \tag{37}$$

Związek (37) oznacza że w pobliżu ściany moduł tensora prędkości deformacji dąży w sposób asymptotyczny do funkcji $u_\tau/(\kappa y)$ tzw. funkcja ściany (patrz kolejny wykład).

Model Spalarta-Allmarasa

Współczynnik lepkości turbulentnej (RANS) jest wyznaczany z zależności

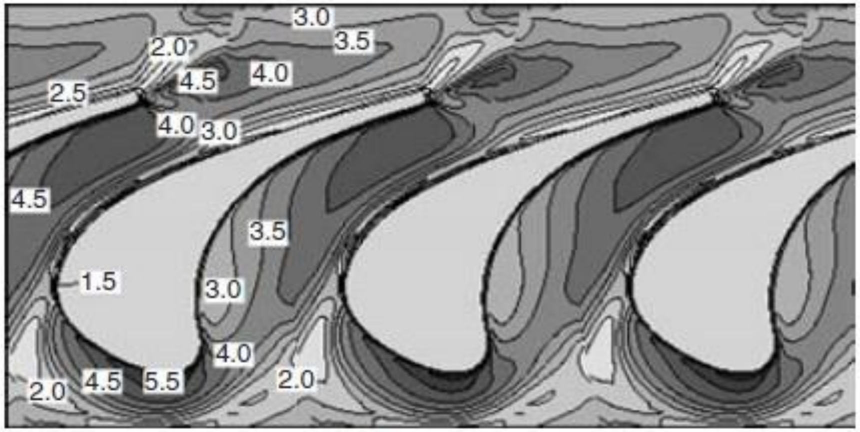
$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \tag{38}$$

gdzie f_{v1} dane jest Równ. (35).

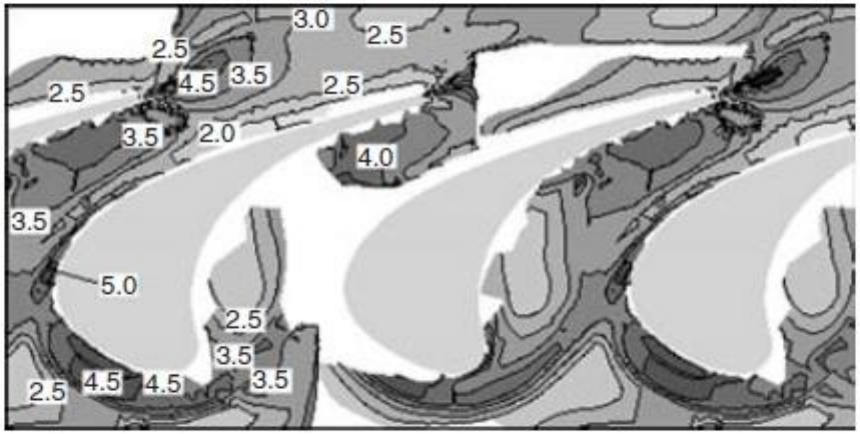
Pozostałe stałe wynoszą

$$c_{b2} = 0.622 \quad \sigma_{\tilde{\nu}} = 2/3 \quad c_{v1} = 7.1 \quad \kappa = 0.4187$$

Model Spalarta-Allmarasa



SA model



Experiment

Modelowanie procesu wymiany ciepła przez stopień turbiny (liczba Stantona=h/(ρc_pV)). Wyniki numeryczne Iaccarino i Kalitzin.