



Wykład 12 i 13

Hybrydyzacja modeli RANS. Metody PANS (Partially-Averaged Navier-Stokes)

Sławomir Kubacki

`slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl`

**Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej,
Politechnika Warszawska**

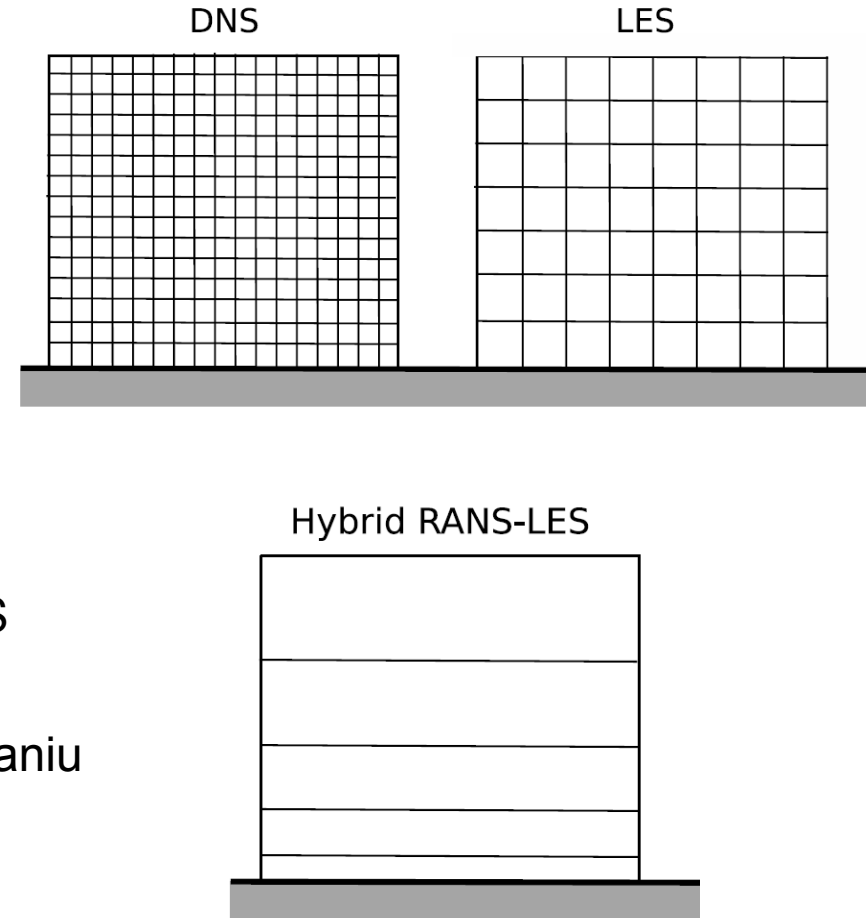
sierpień, 2013

Zakres wykładu

- Definicja uogólnionych momentów centralnych
- Równania pędu i równanie transportu uogólnionych momentów centralnych
- Równania transportu modelowanej energii kinetycznej i modelowanej dyssypacji energii kinetycznej dla modelu PANS

Wprowadzenie

- Metody hybrydowe RANS-LES umożliwiają modelowanie drobnych struktur wirowych w pobliżu ścian i symulowanie struktur dużych daleko od ścian (w 3D)
- Pozwala to na przyjęcie znacznie większych oczek siatki obliczeniowej w pobliżu ścian od tych które są wymagane w symulacjach DNS lub LES
- Mniejsze koszty obliczeniowe w porównaniu z LES



Metoda PANS

- Metoda PANS (ang. Partially-Averaged Navier-Stokes) jest jedną z powszechniej rozwijanych obecnie metod hybrydyzacji modeli RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes) i LES (Large-Eddy Simulation) pozwalająca na symulacje przepływów turbulentnych dla dużych liczb Reynoldsa
- Została zaproponowana przez Girimaji (2006)
- Uśrednienie równań Naviera-Stokesa i równań transportu naprężeń turbulentnych (uogólnionych momentów centralnych) jest niezależne od rodzaju przyjętego filtra (filtr czasowy lub przestrzenny). Filtr służący do uśrednienia równań musi jednak spełniać pewne własności (Germano, 1992)

Uogólnione momenty centralne

Girimaji przyjmuje za Germano (1992), że proces produkcji, dyssypacji, konwekcji i dyfuzji energii kinetycznej można opisać przy pomocy równania różniczkowego wyprowadzonego w oparciu o uogólnione momenty centralne τ (Moin i Yaglom, 1971):

$$\tau(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \langle \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \rangle - \langle \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{u}_j \rangle \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k) = & \langle \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k \rangle - \langle \mathbf{u}_i \rangle \tau(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k) - \langle \mathbf{u}_j \rangle \tau(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i) - \langle \mathbf{u}_k \rangle \tau(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \\ & - \langle \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{u}_j \rangle \langle \mathbf{u}_k \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie symbolem $\langle \rangle$ oznaczono operację filtrowania w czasie i w przestrzeni pola prędkości \mathbf{u} .

Klasyczne modele RANS i uogólnione momenty centralne wyrażone w postaci składowych fluktuacyjnych

Dla porównania, w przypadku modelu RANS τ przyjmuje postać (różnica pomiędzy chwilową a uśrednioną w czasie prędkością):

$$\tau_{ij}^R = \langle u'_i u'_j \rangle = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^R = \langle u'_i u'_j u'_k \rangle &= \langle u_i u_j u_k \rangle - \langle u_i \rangle \langle u'_j u'_k \rangle - \langle u_j \rangle \langle u'_i u'_k \rangle - \langle u_k \rangle \langle u'_i u'_j \rangle \\ &\quad - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \langle u_k \rangle \end{aligned}$$

Powyższe równania mają sens przy założeniu

$$\langle u'_i \rangle = 0 \quad \langle \langle u_i \rangle u'_j \rangle = 0 \quad (3)$$

Założenia (3) są oczywiście prawdziwe tylko dla uśredniania w czasie (RANS)

Filtr czasowo-przestrzenny

Leonard (1974) definiuje operację uśredniania jako całkę splotu pola wektorowego \mathbf{u} i filtru G :

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) \rangle_{\ell, \tau} = \int u_i(\mathbf{x}', t') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t'; \ell, \tau) d^3 \mathbf{x}' dt' \quad (4)$$

Filtr G musi spełniać warunek

$$\int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t'; \ell, \tau) d^3 \mathbf{x}' dt' = 1 \quad (5)$$

gdzie ℓ i τ oznaczają odpowiednio charakterystyczną długość i charakterystyczny czas uśredniania. Warto przypomnieć, że analogiczny filtr dla modelu RANS (uśrednianie w czasie) można zapisać w postaci:

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) \rangle_{\tau} = \bar{u}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} u_i(\mathbf{x}', t') dt' \quad (6)$$

Własności operacji filtrowania

Wracając do ogólnej definicji filtru danej zależnością (2). Przyjmuje się kilka założeń co do własności filtru, aby możliwe było dokonanie pewnych uproszczeń w wyprowadzanych poniżej uśrednionych równaniach Naviera-Stokesa i równaniach transportu energii kinetycznej:

1. Czasowo-przestrzenny filtr (4) jest liniowy i utrzymuje stałą

$$\langle \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{g} \rangle \qquad \langle \alpha \mathbf{f} \rangle = \alpha \langle \mathbf{f} \rangle \qquad (7)$$

dla $\alpha = \text{const.}$

2. Operacja filtrowania komutuje (jest przemienne) z operacją różniczkowania w czasie i przestrzeni

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{f} \rangle}{\partial t} \qquad \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_k} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{g} \rangle}{\partial \mathbf{x}_k} \qquad (8)$$

Równania Naviera-Stokesa

Przyjmując równanie ciągłości i równania pędu dla płynu nieściśliwego:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu S_{ik}) \quad (10)$$

gdzie

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Przyjmując równania Naviera-Stokesa jak poniżej:

$$N(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu S_{ik}) = 0 \quad (11)$$

oraz mnożąc Równ. (11) przez chwilową składową prędkości u_j i dodając do tego wyrażenia składnik $N(u_j)u_i$ otrzymuje się

$$N(u_i)u_j + N(u_j)u_i = 0 \quad (12)$$

Uśrednione równania Naviera-Stokesa

Po przekształceniach otrzymuje się równanie transportu dla $(u_i u_j)$

$$\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j u_k)}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[p u_i \delta_{jk} + p u_j \delta_{ik} - \nu \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_k} \right] + 2p S_{ij} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (13)$$

Interesuje nas otrzymanie uśrednionych równań zachowania masy, pędu i równania transportu dowolnych momentów centralnych. Działamy operatorem uśredniania (4) na Równ. (9, 10) i (12). Uwzględniając zależności (7) i (8) otrzymujemy uśrednione równanie ciągłości i uśrednione równania pędu

$$\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_k} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle)}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu \langle S_{ik} \rangle) - \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial x_k} \quad (15)$$

Uśrednione równania transportu dla τ

W analogiczny sposób uzyskuje się uśrednione równania transportu naprężeń $\tau(u_i, u_j)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_k \rangle \tau(u_i, u_j))}{\partial x_k} = & -\tau(u_i, u_k) \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \tau(u_j, u_k) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\tau(u_i, u_j, u_k) + \tau(p, u_i) \delta_{jk} + \tau(p, u_j) \delta_{ik} \right] \quad (16) \\ & + 2\tau(p, S_{ij}) - 2v\tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Uśrednione równania transportu dla τ

Równania (16) uzyskuje się przyjmując uśrednione składniki $u_i u_j$ i $u_i u_j u_k$ dane Równ. (1) i (2) w postaci

$$\langle u_i u_j \rangle = \tau(u_i, u_j) + \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j u_k \rangle &= \tau(u_i, u_j, u_k) + \langle u_i \rangle \tau(u_j, u_k) + \langle u_j \rangle \tau(u_k, u_i) + \langle u_k \rangle \tau(u_i, u_j) \\ &+ \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \langle u_k \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

Działając operatorem uśredniania $\langle \rangle$ na Równ. (13) i uwzględniając zależności (7), (8) i (17) otrzymuje się:

Uśrednione równania transportu dla τ

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle)}{\partial t} + \\
 & \frac{\partial \tau(u_i, u_j, u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\langle u_i \rangle \tau(u_j, u_k))}{\partial x_k} + \frac{\partial (\langle u_j \rangle \tau(u_k, u_i))}{\partial x_k} + \frac{\partial (\langle u_k \rangle \tau(u_i, u_j))}{\partial x_k} \\
 & + \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \langle u_k \rangle)}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left\langle p u_i \delta_{jk} + p u_j \delta_{ik} - \nu \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_k} \right\rangle \right] + \\
 & + 2 \langle p S_{ij} \rangle - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{18}$$

Uśrednione równania transportu dla τ

Zajmijmy się w pierwszej kolejności lewą stroną Równ. (18). Pochodne po czasie można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} \langle u_j \rangle + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial t} \langle u_i \rangle \quad (19)$$

Pochodne $\partial \langle u_i \rangle / \partial t$ i $\partial \langle u_j \rangle / \partial t$ w powyższym równaniu można wyrazić jako sumę członów konwekcyjnych i pozostałych składników znajdujących się na prawej stronie Równ. (15). Równ (18) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle)}{\partial t} &= \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} \\ &- \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \langle u_k \rangle \langle u_j \rangle - \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \langle u_k \rangle \langle u_i \rangle \\ &- \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} \langle u_j \rangle - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j} \langle u_i \rangle + 2\nu \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k} \langle u_j \rangle + 2\nu \frac{\partial \langle S_{jk} \rangle}{\partial x_k} \langle u_i \rangle \\ &- \frac{\partial \tau(u_i, u_k)}{\partial x_k} \langle u_j \rangle - \frac{\partial \tau(u_j, u_k)}{\partial x_k} \langle u_i \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

Uśrednione równania transportu dla τ

Składniki przedstawione w drugiej linii Równ. (20) zostały uzyskane uwzględniając równanie ciągłości (14).

Wracamy do prawej strony Równ. (18). Uwzględniając Równ. (1), (7) i (8) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left\langle pu_i \delta_{jk} + pu_j \delta_{ik} - \nu \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_k} \right\rangle \right] + 2\langle pS_{ij} \rangle - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = \\
 & = -\frac{\partial \tau(p, u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j} \langle u_j \rangle - \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \langle p \rangle + \\
 & -\frac{\partial \tau(p, u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} \langle u_j \rangle - \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \langle p \rangle + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\tau(p, S_{ij}) + 2\langle p \rangle \langle S_{ij} \rangle + \\
 & - 2\nu \tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{21}$$

Uśrednione równania transportu dla τ

Składnik $\partial(\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \langle u_k \rangle) / \partial x_k$ w Równ. (18) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \langle u_k \rangle)}{\partial x_k} &= \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} (\langle u_k \rangle \langle u_j \rangle) + \frac{\partial(\langle u_k \rangle \langle u_j \rangle)}{\partial x_k} \langle u_i \rangle = \\
 &= \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} (\langle u_k \rangle \langle u_j \rangle) + \underbrace{\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_k} \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}_{=0 \text{ (Równ.14)}} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} (\langle u_k \rangle \langle u_j \rangle) = \\
 &= \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} (\langle u_k \rangle \langle u_j \rangle) + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} (\langle u_k \rangle \langle u_j \rangle)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Uśrednione równania transportu dla τ

Wstawiając zależności (20) i (21) do Równ. (18) i uwzględniając (22) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_k \rangle \tau(u_i, u_j))}{\partial x_k} = \\
 & = - \frac{\partial \tau(u_i, u_j, u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle u_i \rangle \tau(u_j, u_k))}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle u_j \rangle \tau(u_k, u_i))}{\partial x_k} \\
 & - 2v \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k} \langle u_j \rangle - 2v \frac{\partial \langle S_{jk} \rangle}{\partial x_k} \langle u_i \rangle + \\
 & + \frac{\partial \tau(u_i, u_k)}{\partial x_k} \langle u_j \rangle + \frac{\partial \tau(u_j, u_k)}{\partial x_k} \langle u_i \rangle + \\
 & - \frac{\partial \tau(p, u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \langle p \rangle - \frac{\partial \tau(p, u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \langle p \rangle + \\
 & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle)}{\partial x_k} \right) + \\
 & + 2\tau(p, S_{ij}) + 2\langle p \rangle \langle S_{ij} \rangle - 2v\tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) - 2v \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{23}$$

Uśrednione równania transportu dla τ

Wiedząc, że

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle \tau(u_j, u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \tau(u_j, u_k) + \frac{\partial \tau(u_j, u_k)}{\partial x_k} \langle u_i \rangle$$

$$\frac{\partial \langle u_j \rangle \tau(u_k, u_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \tau(u_k, u_i) + \frac{\partial \tau(u_k, u_i)}{\partial x_k} \langle u_j \rangle$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \langle p \rangle + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \langle p \rangle = 2 \langle p \rangle \langle S_{ij} \rangle$$

Uśrednione równania transportu dla τ

Pozwala uprościć Równ. (23) do postaci

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_k \rangle \tau(u_i, u_j)}{\partial x_k} = \\
 & = - \frac{\partial \tau(u_i, u_j, u_k)}{\partial x_k} - \tau(u_j, u_k) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} - \tau(u_i, u_k) \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \\
 & - 2\nu \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k} \langle u_j \rangle - 2\nu \frac{\partial \langle S_{jk} \rangle}{\partial x_k} \langle u_i \rangle + \\
 & - \frac{\partial \tau(p, u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau(p, u_j)}{\partial x_i} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right) + \\
 & + 2\tau(p, S_{ij}) - 2\nu \tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) - 2\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Uśrednione równania transportu dla τ

Uwzględnienie równania ciągłości (14) pozwala zauważyć że składniki znajdujące się w trzeciej linii Równ. (24) wynoszą zero

$$-2\nu \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k} \langle u_j \rangle - 2\nu \frac{\partial \langle S_{jk} \rangle}{\partial x_k} \langle u_i \rangle - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle)}{\partial x_k} \right) - 2\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} = 0 \quad (25)$$

Ostatecznie, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_k \rangle \tau(u_i, u_j))}{\partial x_k} = \\ = - \frac{\partial \tau(u_i, u_j, u_k)}{\partial x_k} - \tau(u_j, u_k) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} - \tau(u_i, u_k) \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \\ - \frac{\partial \tau(p, u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau(p, u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial x_k} \right) \\ + 2\tau(p, S_{ij}) - 2\nu \tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Równ. (26) można również zapisać w postaci danej związkem (16).

Uśrednione równania transportu dla τ

Wracając do Równ. (16) i zapisując je dla trzech składowych normalnych uogólnionego tensora τ tj. dla τ_{11} , τ_{22} i τ_{33} otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau(u_1, u_1)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_k \rangle \tau(u_1, u_1))}{\partial x_k} &= -2\tau(u_1, u_k) \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tau(u_1, u_1)}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} [\tau(u_1, u_1, u_k) + 2\tau(p, u_1) \delta_{1k}] & \\ + 2\tau(p, S_{11}) - 2\nu\tau \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_k}, \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right). & \end{aligned} \quad (27)$$

+

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau(u_2, u_2)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_k \rangle \tau(u_2, u_2))}{\partial x_k} &= -2\tau(u_2, u_k) \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tau(u_2, u_2)}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} [\tau(u_2, u_2, u_k) + 2\tau(p, u_2) \delta_{2k}] & \\ + 2\tau(p, S_{22}) - 2\nu\tau \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_k}, \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right). & \end{aligned} \quad (28)$$

+

Równanie transportu dla modelowanej energii k_u

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \tau(u_3, u_3)}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_k \rangle \tau(u_3, u_3))}{\partial x_k} = -2\tau(u_3, u_k) \frac{\partial \langle u_3 \rangle}{\partial x_k} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tau(u_3, u_3)}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\tau(u_3, u_3, u_k) + 2\tau(p, u_3) \delta_{3k} \right] \\
 & + 2\tau(p, S_{33}) - 2\nu\tau \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_k}, \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \right).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Dodanie do siebie stronami Równ. (27-29) wiedząc, że modelowana energia kinetyczna dana jest zależnością $2k_u = \tau(u_1, u_1) + \tau(u_2, u_2) + \tau(u_3, u_3)$ pozwala uzyskać następujące równanie różniczkowe dla k_u :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial k_u}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_k \rangle k_u)}{\partial x_k} = -\tau(u_i, u_k) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial k_u}{\partial x_k} \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \tau(u_i, u_i, u_k) + \tau(p, u_k) \right] - \nu\tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Równanie transportu dla modelowanej energii k_u

Składnik opisujący korelacje pomiędzy chwilowym ciśnieniem i chwilową prędkością deformacji (przedostatni na prawej stronie Równ. 27-29) zeruje się w Równ. (30) uwzględniając Równ. (1), (2), (7) i (14):

$$\begin{aligned} & \tau(p, S_{11}) + \tau(p, S_{22}) + \tau(p, S_{33}) = \\ & = \left\langle p \underbrace{(S_{11} + S_{22} + S_{33})}_{=0} \right\rangle - \langle p \rangle \left\langle \underbrace{S_{11} + S_{22} + S_{33}}_{=0} \right\rangle \end{aligned} \quad (31)$$

Warto podkreślić, że kontrakcja Równ. (16) skutkuje tym, że traci się informację o anizotropowości składowych normalnych naprężeń.

Sam model staje się natomiast mniej złożony (jedno równanie zamiast sześciu) i niektóre kłopotliwe składniki się upraszczają.

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

- Termin „częściowo-uśredniony” (ang. partially-averaged) oznacza filtrowanie lub uśrednianie tylko części dostępnego pola prędkości czy pola ciśnienia (oczywiście uśrednianie można stosować dla różnych pól np. temperatury itp.).
- Analogia z filtrem dolnoprzepustowym – skale niskoczęstotliwościowe są symulowane – skale wysokoczęstotliwościowe podlegają modelowaniu.
- Analogia z modelem LES – symulowane są skale wielkoskalowe – metoda PANS pozwala jednak na modelowanie większego zakresu skal przestrzennych niż w modelach LES (dla PANS liczba falowa odcięcia jest bliżej piku na widmie energii).

Prędkość $\langle u_k \rangle$ w Równ. (30) oznacza prędkość uśrednioną w czasie i przestrzeni zgodnie z Równ. (4). Oznaczając „częściowo-uśrednioną” prędkość dla modelu PANS symbolem $\{ u_k \}$ otrzymuje się:

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + \{ u_k \} \frac{\partial k_u}{\partial x_k} = -\tau(u_i, u_k) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial k_u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \tau(u_i, u_i, u_k) + \tau(p, u_k) \right] - \nu \tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + (\{ u_k \} - \langle u_k \rangle) \frac{\partial k_u}{\partial x_k}. \quad (32)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

W praktycznych symulacjach PANS mamy do czynienia z polem prędkości $\{ u_k \}$ charakteryzującym się silniejszymi zmianami (fluktuacjami) niż pole prędkości uśrednione w czasie $\langle u_k \rangle$ (lub w dostatecznie długim oknie czasowym). Oznacza to, że człon produkcyjny (pierwszy człon na prawej stronie) w Równ. (32) w symulacjach PANS ulegałby sukcesywnemu zwiększaniu na skutek dużych gradientów prędkości. W praktyce wzrost ten jest kompensowany przez redukcję lepkości turbulentnej ν_t do lepkości modelowanej (podsiatkowej) ν_u .

Girimaji definiuje dwa filtry: f_k i f_ε będące odpowiednio stosunkiem modelowanej energii kinetycznej dla modelu PANS do energii kinetycznej dla modelu RANS oraz modelowanej dyssypacji energii kinetycznej dla modelu PANS do dyssypacji dla modelu RANS:

$$f_k = \frac{k_u}{k}, \quad f_\varepsilon = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon}. \quad (33)$$

Dla $f_k = f_\varepsilon = 1$ mamy RANS. Dla $f_k = f_\varepsilon = 0$ otrzymujemy DNS (model nie jest potrzebny).

Zazwyczaj przyjmuje się, że f_k i f_ε przyjmują pewne stałe wartości (0,1].

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Girimaji przyjmuje model Boussinesq do modelowania tensora naprężeń $\tau(u_i, u_k)$:

$$\tau(u_i, u_k) = -\nu_u \{S_{ik}\} \quad \nu_u = C_\mu \frac{k_u^2}{\varepsilon_u} \quad (34)$$

gdzie $C_\mu = 0.09$. Wykorzystując filtry dane Równ. (33) otrzymujemy związek między modelowanym współczynnikiem lepkości ν_u dla modelu PANS i współczynnikiem ν_t dla modelu RANS

$$\nu_u = C_\mu \frac{k_u^2}{\varepsilon_u} = \frac{f_k^2}{f_\varepsilon} \nu_t \quad (35)$$

Girimaji (2006) stosuje hipotezę gradientową do modelowania procesu transportu turbulencji w Równ. (32)

$$-\frac{1}{2} \tau(u_i, u_i, u_k) - \tau(p, u_k) = \frac{\nu_t}{\sigma} \frac{\partial k_u}{\partial x_k} \quad (36)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Dla dużej liczby Reynoldsa można na chwilę zaniedbać składnik opisujący dyfuzję molekularną w Równ. (32). Otrzymuje się:

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + \{u_k\} \frac{\partial k_u}{\partial x_k} = P_u - \varepsilon_u + T_{ku} \quad (37)$$

gdzie stałe $C_\mu=0.09$, $\sigma=1.0$, $P_u \equiv 2\nu_u \{S_{ik}\} \partial\{u_i\} / \partial x_k = 2\nu_u \{S_{ik}\} \{S_{ki}\}$

Transport w Równ. (37) można zapisać jak niżej:

$$T_{ku} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k_u}{\partial x_k} \right) + (\{u_k\} - \langle u_k \rangle) \frac{\partial k_u}{\partial x_k}. \quad (38)$$

Nie wiemy w jaki sposób modelować ε_u i T_{ku} .

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

W metodach PANS zazwyczaj zakłada się, że $0 < f_k < 1$ (np. $f_k = 0.4$). Można przyjąć, że $f_\varepsilon = 1$ - ze względu na duży koszt obliczeń nie chcemy symulować skal o rozmiarach bliskich skalom dyssypatywnym Kolmogorowa ($f_\varepsilon = 1$ oznacza to, że całkowita dyssypacja jest modelowana tak jak w metodach RANS).

Dla $k_u = f_k k$ wiedząc, że f_k jest stałe (lub wolnozmiennie) można zapisać:

$$\frac{Dk_u}{Dt} = k \underbrace{\frac{Df_k}{Dt}}_0 + f_k \frac{Dk}{Dt} \quad (39)$$

gdzie

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_k \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}$$

Równ. (39) przyjmuje więc postać

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_k \rangle \frac{\partial k_u}{\partial \mathbf{x}_k} = f_k \left[\frac{\partial k}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_k \rangle \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}_k} \right]$$

lub

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + \{ \mathbf{u}_k \} \frac{\partial k_u}{\partial \mathbf{x}_k} = f_k \left[\frac{\partial k}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_k \rangle \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}_k} \right] + (\{ \mathbf{u}_k \} - \langle \mathbf{u}_k \rangle) \frac{\partial k_u}{\partial \mathbf{x}_k}. \quad (40)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Składnik w nawiasie kwadratowym jest oczywiście pochodną substancjalną energii kinetycznej turbulencji uzyskiwaną z modelu RANS. Girimaji (2006) pokazuje wyprowadzenie modelu PANS przyjmując jako wyjściowy standardowy model RANS $k-\varepsilon$ (Launder i Sharma, 1974):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_k \rangle \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}_k} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}_k} \right), \quad (41)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_k \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{P \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_k} \right), \quad (42)$$

$$\mathbf{v}_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (43)$$

Wstawiając prawą stronę Równ. (41) do Równ. (40) otrzymuje się alternatywną postać równania dla energii kinetycznej (porównaj z Równ. 37)

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + \{ \mathbf{u}_k \} \frac{\partial k_u}{\partial \mathbf{x}_k} = f_k \left[P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}_k} \right) \right] + (\{ \mathbf{u}_k \} - \langle \mathbf{u}_k \rangle) \frac{\partial k_u}{\partial \mathbf{x}_k}. \quad (44)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Procesy lokalne (produkcja i dyssypacja) w Równ. (37) muszą odpowiadać procesom lokalnym w Równ. (44). W ten sposób otrzymuje się zależność pomiędzy produkcją i dyssypacją w modelach RANS i PANS:

$$P_u - \varepsilon_u = f_k (P - \varepsilon) \rightarrow P = \frac{1}{f_k} (P_u - \varepsilon_u) + \frac{\varepsilon_u}{f_\varepsilon} \quad (45)$$

Procesy nielocalne (transport) też muszą być również sobie równe w Równ. (37) i (44). Biorąc pod uwagę definicje filtrów danych Równ. (33) otrzymuje się

$$T_{ku} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_u f_\varepsilon}{\sigma f_k^2} \frac{\partial k_u}{\partial x_k} \right) + (\{u_k\} - \langle u_k \rangle) \frac{\partial k_u}{\partial x_k}. \quad (46)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Warto zauważyć, że drugi składnik na prawej stronie Równ. (46) opisuje iloczyn pewnych wielkoskalowych fluktuacji $\tilde{u}'_k = \{u_k\} - \langle u_k \rangle$ (będących wynikiem symulacji numerycznej, ang. resolved scales) i pochodnej k_u względem współrzędnych przestrzennych. W symulacjach PANS pole prędkości $\{u_k\}$ jest polem częściowo uśrednionym (jest bardziej niestacjonarne od pola uśrednionego w czasie $\langle u_k \rangle$). Oznacza to, że ostatni składnik na prawej stronie Równ. (46) można interpretować jako człon źródłowy opisujący przyrost modelowanej energii kinetycznej.

Girimaji (2006) proponuje dwa sposoby modelowania transportu w Równ. (46). W podejściu pierwszym postuluje się, że wpływ skal symulowanych (ang. resolved) na skale modelowane jest znikomy – bliski zeru (zero-transport model):

$$\left(\{u_k\} - \langle u_k \rangle \right) \frac{\partial k_u}{\partial x_k} = 0 \quad (47)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

W drugim przypadku zakłada się istnienie silnego transferu energii ze skal symulowanych do skal modelowanych. Transfer ten modeluje się z wykorzystaniem hipotezy gradientowej (maksimum transport):

$$\left(\overline{\{u_k\}} - \langle u_k \rangle \right) \frac{\partial k_u}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{v_r}{\sigma} \frac{\partial k_u}{\partial x_k} \right) \quad (48)$$

gdzie $v_r = v_t - v_u$ oznacza współczynnik lepkości turbulentnej będący niejako różnicą pomiędzy współczynnikiem lepkości dla modelu RANS i dla modelu PANS. Znak minus oznacza że energia tracona przez skale symulowane idzie na podwyższenie energii skal modelowanych. Przyjęcie pierwszego modelu danego Równ. (47) oznacza że współczynnik dyfuzji σ w Równ. (46) wynosi:

$$\sigma_u = \sigma \frac{f_k^2}{f_\varepsilon} \quad (49)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Przyjęcie drugiego wariantu oznacza, że utrzymuje się stałą wartość współczynnika dyfuzji

$$\sigma_u = \sigma \quad (50)$$

Wynika to z następujących założeń

$$\mathbf{T}_{ku} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_u \mathbf{f}_\varepsilon}{\sigma \mathbf{f}_k^2} \frac{\partial \mathbf{k}_u}{\partial \mathbf{X}_k} \right) + (\{\mathbf{u}_k\} - \langle \mathbf{u}_k \rangle) \frac{\partial \mathbf{k}_u}{\partial \mathbf{X}_k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_u \mathbf{f}_\varepsilon}{\sigma \mathbf{f}_k^2} \frac{\partial \mathbf{k}_u}{\partial \mathbf{X}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_r}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{k}_u}{\partial \mathbf{X}_k} \right) \quad (51)$$

Składnik $\mathbf{v}_u \frac{\mathbf{f}_\varepsilon}{\mathbf{f}_k^2}$ w powyższym równ. to \mathbf{v}_t

Wiedząc, że $\mathbf{v}_u = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_r$

$$\mathbf{T}_{ku} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{k}_u}{\partial \mathbf{X}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_r}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{k}_u}{\partial \mathbf{X}_k} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_u}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{k}_u}{\partial \mathbf{X}_k} \right)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Równanie (44) można więc ostatecznie zapisać w ogólnej postaci:

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + \{u_k\} \frac{\partial k_u}{\partial x_k} = P_u - \varepsilon_u + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{v_u}{\sigma_u} \frac{\partial k_u}{\partial x_k} \right) \quad (52)$$

gdzie współczynnik σ_u w zależności od przyjętego sposobu domknięcia członu (46) dany jest Równ (49) lub (50).

Równanie różniczkowe dla prędkości dyssypacji można wyprowadzić, żądając aby

$$\frac{Df_\varepsilon}{Dt} = 0 \quad (53)$$

Przyjmując, że f_ε nie zależy od współrzędnych przestrzennych i czasu otrzymuje się:

$$\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial x_k} = f_\varepsilon \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) \quad (54)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Wyrażenie na prawej stronie Równ. (54) wygodnie jest zastąpić wyrażeniem na prawej stronie Równ. (42)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_k \rangle \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \mathbf{x}_k} &= f_\varepsilon \left(C_{\varepsilon 1} \frac{P\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_k} \right) \right) = \\ &= C_{\varepsilon 1} f_k \frac{P\varepsilon_u}{k_u} - C_{\varepsilon 2} \frac{f_k}{f_\varepsilon} \frac{\varepsilon_u^2}{k_u} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \mathbf{x}_k} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

W powyższym równaniu ciągle nie jest znana produkcja P (bo to jest produkcja dla uśrednionego w czasie pola prędkości) i nie jest znane uśrednione pole prędkości $\langle \mathbf{u}_k \rangle$. Produkcję P można oszacować wykorzystując Równ. (45). Podobnie jak w przypadku Równ. (40) pojawi się składnik wynikający z $\{ \mathbf{u}_k \}$. Otrzymujemy

$$\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} + \{ \mathbf{u}_k \} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \mathbf{x}_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{P_u \varepsilon_u}{k_u} - C_{\varepsilon 2}^* \frac{\varepsilon_u^2}{k_u} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left(\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \mathbf{x}_k} \right) + (\{ \mathbf{u}_k \} - \langle \mathbf{u}_k \rangle) \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \mathbf{x}_k} \quad (56)$$

gdzie współczynnik

$$C_{\varepsilon 2}^* = C_{\varepsilon 1} - \frac{f_k}{f_\varepsilon} (C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2}) \quad (57)$$

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Ostatni składnik na prawej stronie Równ. (56) może być modelowany podobnie jak poprzednio przy pomocy modelu zerowego lub maksymalnego transportu. Równ. (56) można więc zapisać w ostatecznej postaci:

$$\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} + \{u_k\} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{P_u \varepsilon_u}{k_u} - C_{\varepsilon 2}^* \frac{\varepsilon_u^2}{k_u} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_u}{\sigma_{\varepsilon u}} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial x_k} \right) \quad (58)$$

gdzie podobnie jak dla równania dla k_u współczynnik dyfuzji

$$\sigma_{\varepsilon u} = \sigma_{\varepsilon} \frac{f_k^2}{f_{\varepsilon}}$$

przyjmując model zerowego transportu lub

$$\sigma_{\varepsilon u} = \sigma_{\varepsilon}$$

przyjmując model maksymalnego transportu.

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes

Podsumowując, należy zauważyć, że równanie ciągłości (14) i równania pędu (15) należy interpretować jako równania uśrednione przy pomocy metody PANS.

Oznacza to, że w praktyce symbol $\langle \rangle$ odpowiadający uśrednianiu w czasie należy więc zastąpić symbolem $\{ \}$:

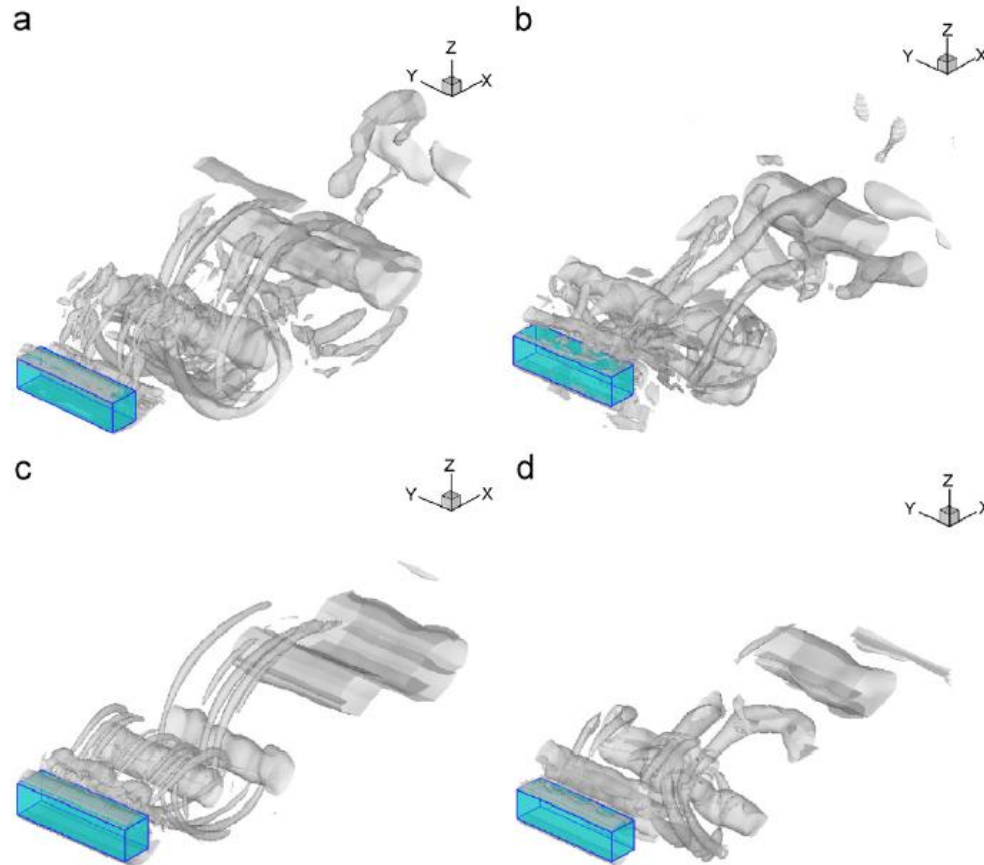
$$\frac{\partial \{u_k\}}{\partial x_k} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} + \frac{\partial (\{u_i\} \{u_j\})}{\partial x_k} = - \frac{\partial \{p\}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(2\nu \frac{\partial \{S_{ik}\}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \tau(u_i, u_j)}{\partial x_k} \quad (60)$$

Operacja ta jest dozwolona ponieważ zgodnie z założeniem Germano operacja uśredniania równań nie jest zależna od rodzaju przyjętego filtru.

Ostatni człon po prawej w Równ. (60) modeluje się więc wykorzystując model Boussinesq (Równ. 34). Równania (59), (60), (52), (58) jak i Równ. (34) stanowią więc model PANS wyprowadzony w oparciu o standardowy model RANS k-ε.

PANS – Partially Averaged Navier-Stokes



Rys. 1. Struktury wirowe za cylindrem o przekroju kwadratowym otrzymane z zastosowaniem metody PANS na siatkach o różnej gęstości.