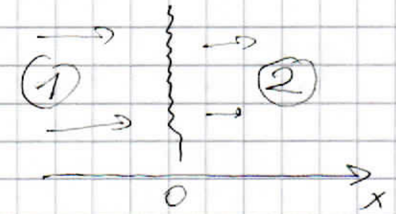
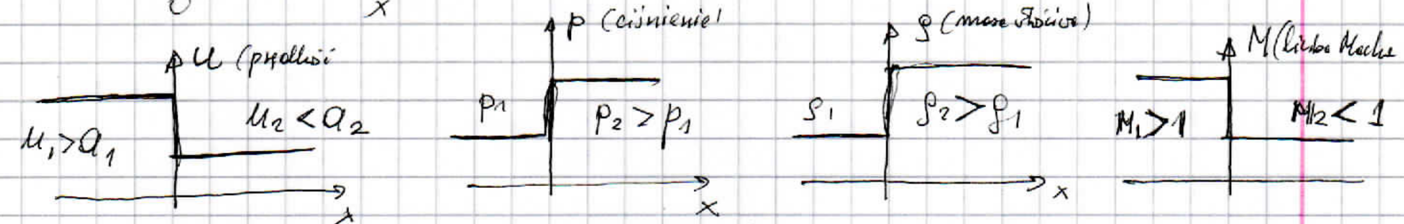
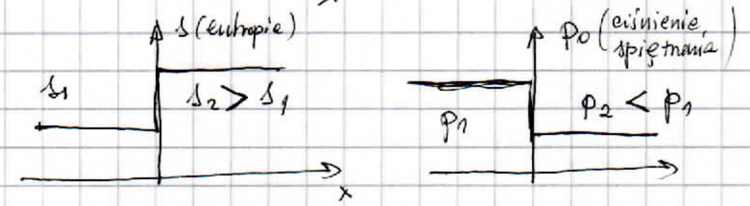
Wyznaczone związki pomiędzy parametrami stanu i ruchu gazu przy przepływie przez falę uderzeniową dobrze ilustrują szkice przedstawiające zachodzące zmiany.




Gaz płynie w kierunku osi x.
Fala jest unieruchomiona w miejscu $x=0$.
To znaczy, że układ odniesienia jest związany z falą.

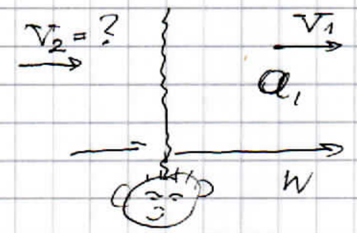


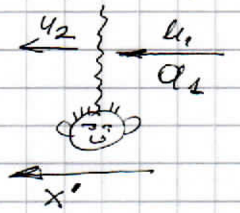

Czytelnik może zbadać zmianę energii swobodnej $f = c_v T - T s$ i określić zmianę tzw. pracy maksymalnej. (Dodajmy, że dla tzw. gazu niedoskonałego lepiej użyć energii wewnętrznej zamiast iloczynu $c_v T$...)

## Zadania

(I) Gaz płynie z prędkością V. W tę samą stronę porusza się fala uderzeniowa. Jej prędkość wynosi W. Wyznaczyć prędkość gazu za falą. Prędkość dźwięku przed falą wynosi $a$. Wykładnik izentropy $k$.
Przyjąć $V = 100$ m/sek, $W = 500$ m/sek, $a = 300$ m/sek. $k = 1.4$.




Umieszczamy obserwatora w układzie odniesienia związanym z falą. Obserwator stwierdza, że prędkość z jaką gaz wpływa do fali to




$$u_1 = W - V_1$$

(Jest oczywistością, że zwrot $u_1$ jest przeciwny do zwrotów $W$ i $V_1$. Po prostu: fala względem gazu ma prędkość $V_1 - W$. To oznacza, że zwrot prędkości względnej jest przeciwny do zwrotów $V_1$ i $W$. Obserwator wybiera oś x' skierowaną przeciwnie do ruchu gazu i ruchu fali.

Określamy $M_1 = u_1/a$, odczytujemy z wykresu ($k=1.4$!) $M_2$.
Ponieważ $a_2 = a_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$, to używając ponownie wykresu odczytamy $T_2/T_1$.
Prędkość $u_2$ to: $u_2 = M_2 \cdot a_2$. Tym samym $V_2 = W - u_2$ (bo zwrot $u_2$ jest przeciwny do (dodatniego!) zwrotu $W$.
Rachunki: $M_1 = 1.33$, $M_2 \cong 0.75$, $T_2/T_1 = 1.25$, $a_2 \cong 335$, $u_2 \cong 250$, $V_2 \cong 250$ m/sek

(II) To samo, jeśli zamiast $a_1$ zadana jest wielkość $a_2$.
Nie znając – z góry – $a_1$ nie możemy określić $M_1$ i poprzedni sposób rozwiązania nie ma sensu.
Trzeba wykorzystać znane (z teorii) związki: Kinematyczne równanie Prandtla $u_1 u_2 = a_*^2$. Obowiązuje też równanie energii.
Postarajmy się napisać je w taki sposób, by wykorzystać informację o znanym $a_2$...

Ponieważ $u_1 = W - V_1$ i $u_2 = W - V_2$, to

$$u_1 u_2 = (W - V_1)(W - V_2) = a_*^2$$

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{k-1} = \frac{(W-V_2)^2}{2} + \frac{a_2^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a_*^2$$

Niewiadome to $V_2$ oraz $a_*^2$. Ta ostatnia nie jest potrzebna... Rugujemy ją:

$$\frac{(W-V_2)^2}{2} + \frac{a_2^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} (W-V_1)(W-V_2)$$

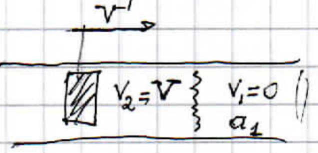
Znamy $W$ i $V_1$. Szukamy $V_2$. Najlepiej "przeskalować" równanie dzieląc je przez $a_2^2$ i mnożąc przez 2. Można też wprowadzić oznaczenie $Y^2 = \frac{(W-V_2)^2}{a_2^2}$. Otrzymamy następujący zapis:

$$Y^2 + \frac{2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} Y \left(\frac{W-V_1}{a_2}\right)$$

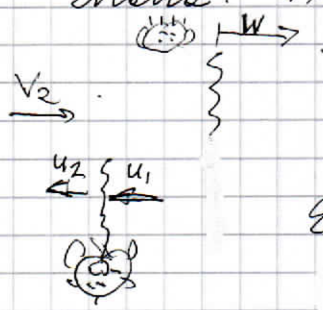
Liczby, które tu występują są całkowicie "umiarkowane"...

Czytelnik umie rozwiązywać równania kwadratowe i odrzucać niedopowiednie pierwiastki. Dodaję, że można skontrolować poprzednie obliczenie biorąc $a_2$ wyznaczone w poprzedniej wersji.

(III) W lufie wiatrówki śrut przesuwa się z prędkością $V$. Ciśnienie atmosferyczne $= p$, temperatura $= T_A$. Wyznaczyć ciśnienie na powierzchni śrutu od strony wylotu lufy.




Przed poruszającym się śrutem występuje obszar ruchomego powietrza przesuwającego się w kierunku wylotu lufy. Prędkość $V_2 = V$. Obszar ten jest oddzielony nieciągłością — to znaczy falą uderzeniową — od gazu nieruchomego w którym prędkość dźwięku wynosi $a_1 = \sqrt{kRT_A}$. Umieszczamy obserwatora na fali. Fala porusza się z prędkością $W$. Nie jest to prędkość znana. Piszemy równanie Prandtla i równanie energii:




$V_1 = 0$

$$u_1 u_2 = a_*^2, \quad u_1 = W \quad \left(u_1 = -(V_1 - W)\right)$$

$$u_2 = W - V_2, \quad V_2 = V \text{ jest znane.}$$

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a_*^2.$$

Eliminujemy niewiadomą $a_*^2$. Wynik jest taki:

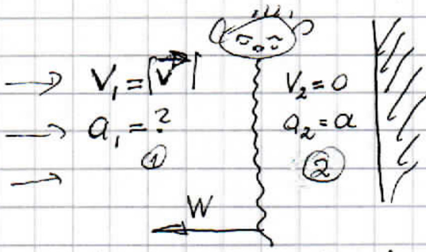
$$W^2 + \frac{2}{k-1} a_1^2 = \frac{k+1}{k-1}(W - V_2) \cdot W.$$

Postępujemy dalej tak, jak w zadaniu poprzednim. Niewiadoma $W$ określa prędkość $u_1$ i $M_1$: $M_1 = u_1/a_1 = W/a_1$, $a_1 = \sqrt{kRT_A}$. Teraz można napisać:

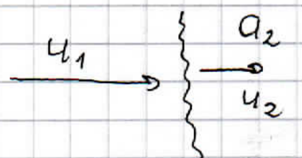
$$p_2 = \frac{p_2}{p_1}(M_1) \cdot p_A, \quad \text{bo } p_1 = p_A$$

i skorzystać z wykresu. Jeśli nie dysponujemy wykresem, to trzeba określić $M_2$: W tym celu trzeba wyznaczyć $a_2$, bo $M_2 = \frac{W - V_2}{a_2}$. Teraz wykorzystujemy wzór: $p_2/p_1 = (1 + kM_1^2)/(1 + kM_2^2)$ i już.

(IV) Strumień gazu o prędkości $\vec{V}$ trafia na płaską, rozległą przeszkodę prostopadłą do wektora $\vec{V}$. Temperatura gazu zmierzona na tej przeszkodzie wynosi $T$. Wyznaczyć prędkość dźwięku w strumieniu niezaburzonym istnieniem przeszkody.




"W sąsiedztwie przeszkody (to "ściana") prędkość gazu $V_2$ jest zerowa: $V_2=0$. Obszar bezruchu rozszerza się. Granica rozdziału przemieszcza się w kierunku przeciwnym do kierunku napływającego strumienia. Ta granica jest nieciągłością. Prędkość w niej maleje... A więc jest to fala uderzeniowa. Obserwator związany z falą notuje:




$$u_1 = W + V_1 = W + V$$
$$u_2 = W + V_2 = W$$
$$a_2 = a = \sqrt{kRT}\ ,\ \text{znane.}$$

Jeśli wszystko piszemy równanie Prandtla i równanie energii dla obszaru ②, bo tam znamy prędkość dźwięku:

$$u_1 u_2 = (W+V)W\ , \qquad \frac{u_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a_*^2$$

czyli

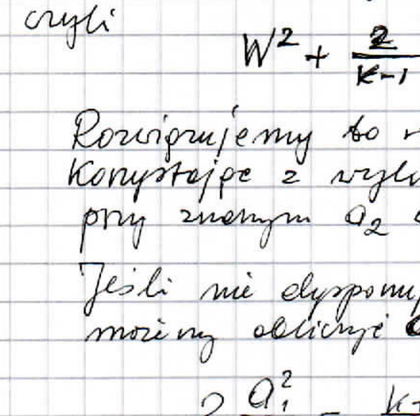
$$W^2 + \frac{2}{k-1} a_2^2 = \frac{k+1}{k-1}(W+V)W\ ,$$

Rozwiązujemy to równanie i znajdujemy $W$. To $u_2$, a więc $M_2 = u_2/a_2$. Korzystając z wykresu odczytujemy $M_1 = M_1(M_2)$ i $a_2/a_1(M_1)$, co przy znanym $a_2$ wyznacza $a_1$.

Jeśli nie dysponujemy wykresem, to z równania energii $\frac{u_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a_*^2$ możemy obliczyć $a_1^2$:

$$2\frac{a_1^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} W(W+V) - (W+V)^2.$$

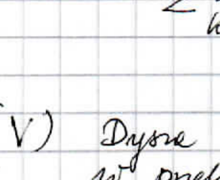
(V) Dysza Lavala ma przekrój wylotowy 2.5 raza większy od minimalnego. W przekroju tym pojawiła się fala uderzeniowa. Wyznaczyć ciśnienie za falą, jeśli znane jest ciśnienie w zbiorniku zasilającym dyszę. $k=1.4$




Fala uderzeniowa występuje tylko tam, gdzie ruch **przed** falą jest **naddźwiękowy**...

Dla $\frac{A}{A_*} = 2,5$ odczytujemy na wykresie ("przepływ izentropowy") liczbę Macha $M_1$.

$$M_1 = \mathcal{F}(A_0/A_*) = \mathcal{F}(2.5) = 2.5 \quad \text{(to przypadek..)}$$




Dla takiej liczby Macha odczytujemy $M_2 = M_2(M_1)$ (wykres dla fali)

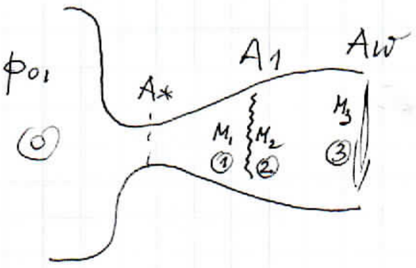
$$M_2 = M_2(M_1) = M_2(2.5) \approx 0.52$$

Pomiędzy obszarem ⓪ i falą nie zachodzi zmiana entropii. A więc $p_0$ – ciśnienie spiętrzenia – nie ulega zmianom. Ciśnienie to zmienia się w fali. Maleje. Z wykresu: $\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}}(M_1)$.

Odczytujemy. $\frac{p_{02}}{p_{01}}(M_1) = 0.5$. Dalej: $p_2 = \frac{p_2}{p_{02}}(M_2)\, p_{02} = \frac{p_2}{p_{02}} \cdot \frac{p_{02}}{p_{01}} \cdot p_{01}$

Ponieważ $M_2 < 1$, to $p_2$ = ciśnienie otoczenia. To tyle: $\frac{p_2}{p_{02}}(M_2) = 0,85$, to $p_2 \approx 0,41\, p_{01}$

(VI) Ta sama dysza. Fala uderzeniowa wystąpiła tam, gdzie $A = 1.5 A_{min}$.
Wypływ do otoczenia odbywa się w tym samym przekroju, co poprzednio.




Na odcinkach 0→1 i 2→3 przemiany termodynamiczne – w obu przypadkach – są takie same - To izentropy.

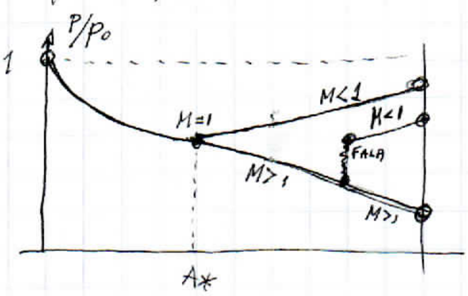
Wyznaczymy $p_{02}$. Także samo jest $p_{03}$.
Aby wyznaczyć $p_3$ – i tym samym ciśnienie zewnętrzne, bo $M_3 < 1$ i ciśnienie wylotowe jest równe ciśnieniu zewnętrznemu – trzeba znaleźć $M_3$.
To łatwe, bo znamy geometrię dyszy...

$M_1 = \mathcal{F}\left(\frac{A_1}{A_*}\right) = \mathcal{F}(1{,}5) = 1.85.$ $\quad M_2 = M_2(M_1) \cong 0{,}6.$ $\quad \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}}(M_1) \cong 0{,}75$

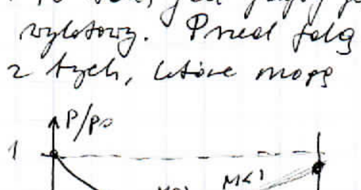
Wyznaczamy $M_3$: $\quad \frac{A_W}{A'_*}^{*)} = \frac{A_W}{A_1} \cdot \frac{A_1}{A'_*} = \frac{A_W/A_*}{A_1/A_*} \cdot \mathcal{F}(M_2) = \frac{2.5}{1.5}\mathcal{F}(0.6) \cong 1.67 \cdot 1.2 \cong 2.$

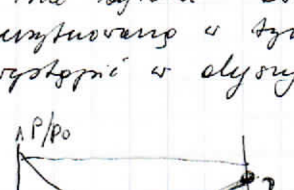
Tym samym $M_3 = \mathcal{F}(A_W/A'_*) = \mathcal{F}(2) \simeq 0.3.$
To już koniec, bo $p_3 = p_{zew} = \frac{p}{p_0}(M_3) \cdot p_{03} = \frac{p}{p_0}(M_3) \cdot p_{02} = \frac{p}{p_0}(M_3)\,\frac{p_{02}}{p_{01}}\,p_0 = 0{,}94 \cdot 0{,}75 \ldots$

Sporządźmy wykres zmian ciśnienia w dyszy w której wewnątrz występuje fala uderzeniowa.




Aby zaistniała fala uderzeniowa w przekroju minimalnym musi być ruch z prędkością dźwięku. A więc $A_{min} = A_*$.
Po przejściu przez falę ruch jest poddźwiękowy.
Dysza rozszerza się, a więc prędkość maleje, a ciśnienie wzrasta aż do przekroju wylotowego.
Wypływ odbywa się – oczywiście – z prędkością poddźwiękową. Ciśnienie w przekroju wylotowym musi być równe ciśnieniu zewnętrznemu.
Graniczne położenie fali to przekrój wylotowy (sytuację, w której fala uderzeniowa – lub fale uderzeniowe – występują **za** przekrojem wylotowym rozpatrzymy później) i przekrój minimalny.
Jeśli fala wystąpi w przekroju minimalnym (jej położenie **dąży** do przekroju minimalnego), to liczba Macha $M_1$, przed falą, jest $\gtrsim 1$. Dokładniej: dąży – z góry – do jedności. Fala jest nieskończenie słaba... To tak, jak gdyby jej nie było... Drugie skrajne położenie fali, to przekrój wylotowy. Przed falą usytuowaną w tym miejscu liczba Macha jest największa z tych, które mogą wystąpić w dyszy. A więc fala jest najsilniejsza z możliwych.




**Zakres ciśnień zewnętrznych dla których fala uderzeniowa występuje w dyszy zaznaczono klamrą.**
**Fala sytuuje się tak, by ciśnienie w przekroju wylotowym (tam $M < 1$!) było równe zewnętrznemu.**

---

*) **TO WAŻNE!** Czytelnik zauważył, że użyty jest symbol $A'_*$.
To pole przekroju w którym prędkość była by równa prędkości dźwięku, ale **za falą** uderzeniową. Fala "zmienia entropię" gazu. A więc po przejściu przez falę gaz ma inne właściwości, niż przed tym przejściem. Aby uzyskać ponownie ruch z $M=1$ trzeba zmniejszyć przekrój do $A'_*$ (z $A_*$ – uprzednim, w którym też był ruch z $M=1$)
Jest: $\quad A'_*/A_* = 1/\frac{A}{A_*}(M_2) \cdot \frac{A}{A_*}(M_1)$. Oczywiście $M_2 < 1$ i $M_1 > 1$. Znamy też $M_2(M_1)$ dla fali...