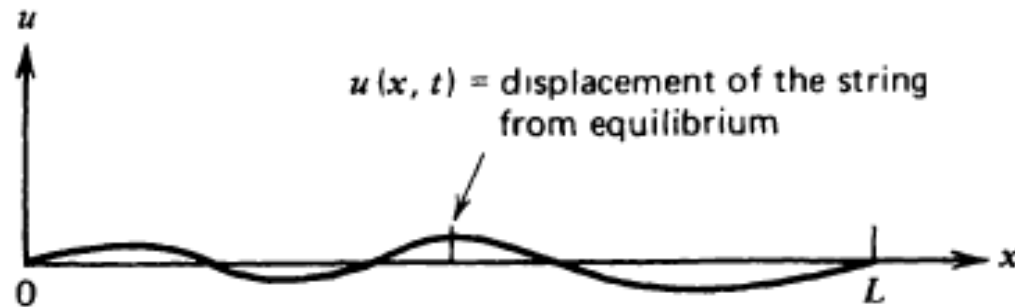


Jednowymiarowe równanie falowe (równanie hiperboliczne)

Rozważamy małe drgania struny, która jest zamocowana na każdym końcu. Zakładamy, że struna jest mocno naciągnięta, wykonana z jednorodnego materiału, siły grawitacyjne można zaniedbać, a drgania odbywają się w płaszczyźnie jak na poniższym rysunku



Drgania poprzeczne struny (przesunięcie struny z położenia równowagi)

Aby matematycznie opisać drgania tej struny, rozważmy siły działające na mały odcinek struny. Zakładamy, że naprężenie działa w kierunku stycznym do struny i że jest ono proporcjonalne do wydłużenia struny. Zasadniczo równanie falowe to nic innego jak równanie ruchu Newtona zastosowane do struny (zmiana pędu małego odcinka struny jest równa przyłożonym siłom). Patrząc na rysunek, możemy sobie wyobrazić siły wewnętrzne działające na strunę w kierunku prostopadłym do osi x . Są one oczywiście związane naciągiem struny.

Możemy je zapisać jako różnicę:

$$T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1$$

Dla małych kątów θ_1 i θ_2 zachodzi:

$$\sin \theta_1 \cong \operatorname{tg} \theta_1, \quad \sin \theta_2 \cong \operatorname{tg} \theta_2.$$

Tangensy θ_1, θ_2 to odpowiednio nachylenia struny przy x i $x + \Delta x$. Możemy zatem napisać:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = u_x(x, t), \quad \operatorname{tg} \theta_2 = u_x(x + \Delta x, t)$$

Z równania Newtona wiemy, że

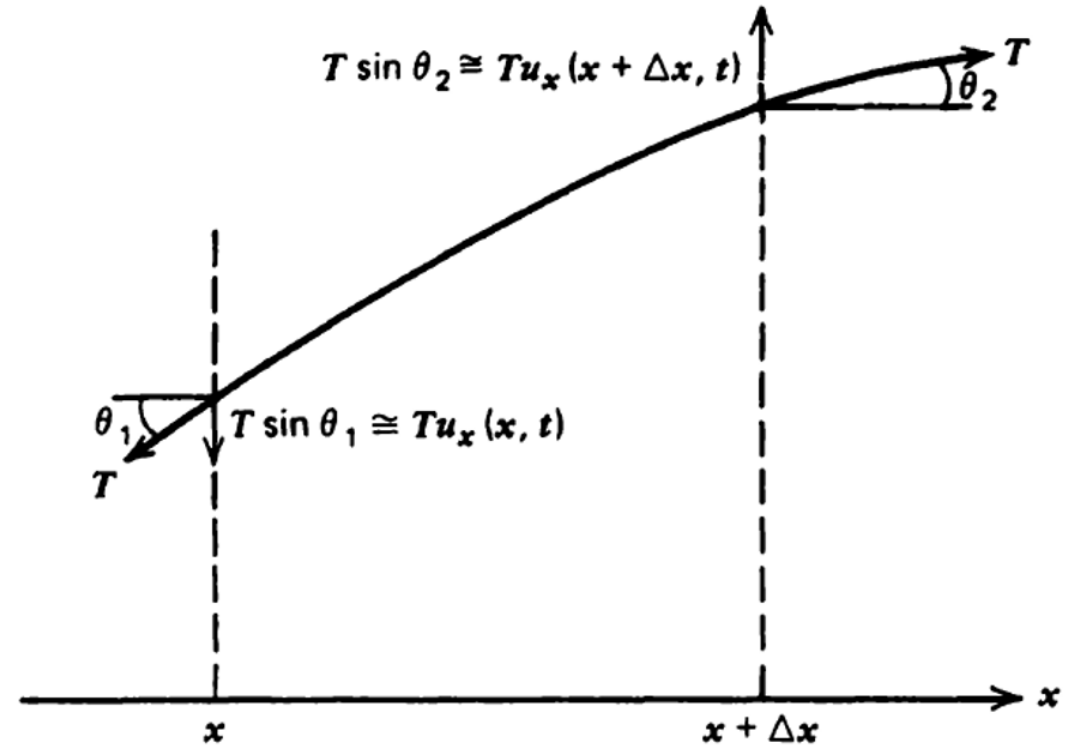
$$m u_{tt} = \text{siły przyłożone do odcinka}(x, x + \Delta x)$$

czyli

$$\rho \Delta x u_{tt} = T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]$$

Przekształćmy to równanie

$$\frac{\rho}{T} u_{tt} = \frac{1}{\Delta x} [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]$$



Jeśli Δx dąży się do zera to różnica pochodnych podzielona przez Δx staje się drugą pochodną po x

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

gdzie $c^2 = \frac{T}{\rho}$. Powyższe równanie nazywamy jednowymiarowym równaniem falowym.

Rozwiązanie d' Alemberta dla równania falowego

Zapiszmy wyjściowy problem czyli równanie wraz z warunkami początkowymi:

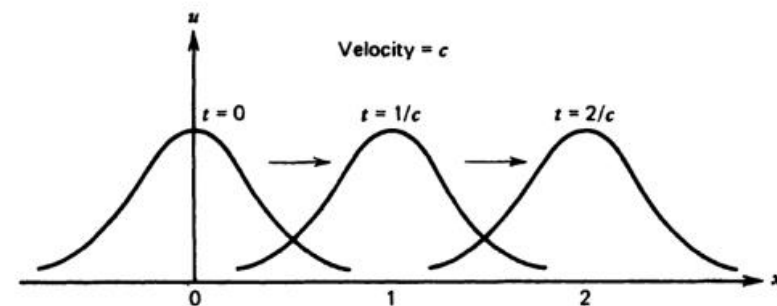
$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \quad t > 0 \\u(x, 0) &= f(x) & -\infty < x < \infty \\u_t(x, 0) &= g(x) & -\infty < x < \infty\end{aligned}$$

Zagadnienie to opisuje ruch nieskończonej struny o danych warunkach początkowych i zostało rozwiązane około 1750 roku przez francuskiego matematyka d' Alemberta. Rozwiązanie ma postać:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x - ct) + f(x + ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi$$

$$u(x, t) = e^{-(x-ct)^2}$$

Przykład poruszającej się w prawo fali przedstawia ilustracja:



Dotychczas jedynym rodzajem ruchu falowego, który omówiliśmy, są jednowymiarowe drgania poprzeczne struny. Warto zdawać sobie sprawę, że jest to tylko wierzchołek góry lodowej, jeśli chodzi o ruch falowy.

Kilka innych rodzajów ruchu falowego to:

1. Fale dźwiękowe (fale podłużne)
2. Fale elektromagnetyczne związane ze światłem i elektrycznością
3. Drgania w ciałach stałych (podłużne, poprzeczne i skrętne)
4. Fale prawdopodobieństwa w mechanice kwantowej
5. Fale wodne (fale poprzeczne)

Równanie falowe w domenie skończonej

$$\text{PDE} \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{BCs} \quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{ICs} \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

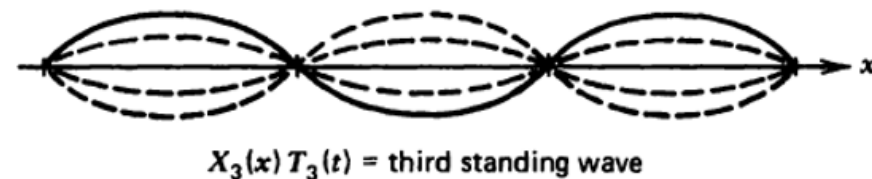
Równanie to rozwiązywane jest technikami separacji zmiennych a rozwiązanie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

może być interpretowane jako nieskończona suma drgań prostych, gdzie kształty $X_n(x)$ tych drgań podstawowych są rozwiązaniami (funkcjami własnymi) pewnego problemu granicznego zwanego problemem Sturm-Liouville'a.

Dla równań falowych określonych w dziedzinie nieskończonej $-\infty < x < \infty$ stwierdziliśmy (rozwiązanie D'Alemberta), że rozwiązaniami są pewne podróżujące fale (poruszające się w przeciwnych kierunkach). Kiedy badamy to samo równanie falowe w ograniczonym regionie przestrzeni $0 < x < L$, stwierdzamy, że fale nie wydają się już poruszać ze względu na ich wielokrotne oddziaływanie z brzegami i **w rzeczywistości często okazują się być tak zwanymi falami stojącymi.**

Na przykład, rozważmy co się dzieje, gdy **struna gitary jest wprowadzana w ruch.** Warunki brzegowe powodują odbijanie się poruszających się fal, wskutek czego nie obserwujemy poruszającej się fali w strunie a w rzeczywistości widzimy, że wibruje ona w jednej pozycji. Przykłady takich fal stojących pokazano na poniższych rysunkach.



Warunki brzegowe związane z równaniem falowym

Z równaniem falowym $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ w skończonej domenie $0 < x < L$ i dla $t > 0$ związane są trzy następujące warunki brzegowe:

1. pierwszego rodzaju – opisują położenie punktów końcowych w czasie

$$u(0, t) = g_1(t)$$

$$u(L, t) = g_2(t)$$

2. drugiego rodzaju – określają siłę przyłożoną na końcach

$$u_x(0, t) = g_1(t)$$

$$u_x(L, t) = g_2(t)$$

3. trzeciego rodzaju – określają elastyczne mocowanie końców

$$u_x(0, t) - \gamma_1 u(0, t) = g_1(t)$$

$$u_x(L, t) - \gamma_2 u(L, t) = g_2(t)$$

1. Warunki opisujące położenie punktów końcowych w czasie

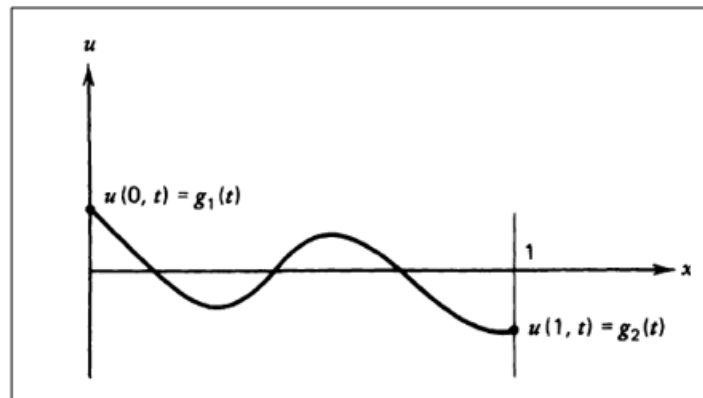
Opiszmy cały problem równaniami:

$$\text{PDE} \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{BCs} \quad \begin{cases} u(0,t) = g_1(t) \\ u(1,t) = g_2(t) \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

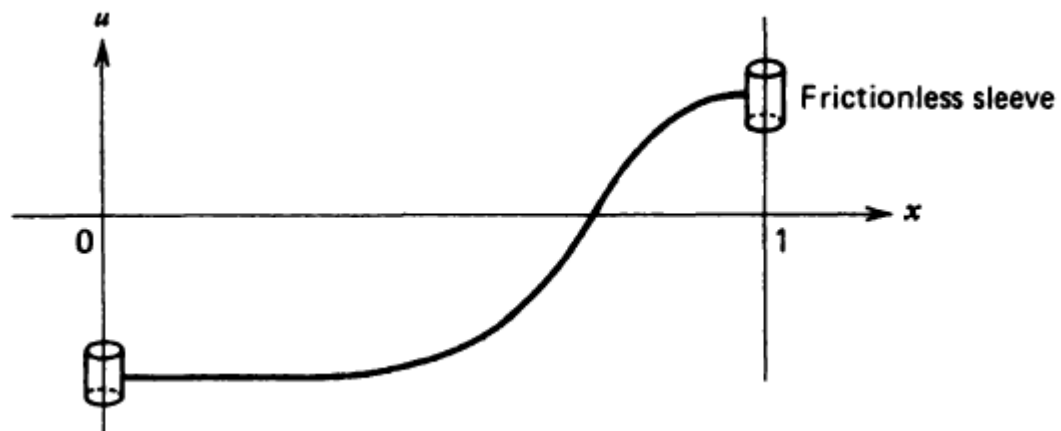
$$\text{ICs} \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

W problemie tym sterujemy punktami końcowymi tak, aby poruszały się w określony sposób. Przykład tego przedstawia poniższa ilustracja.



2. Siła przyłożona na końcach

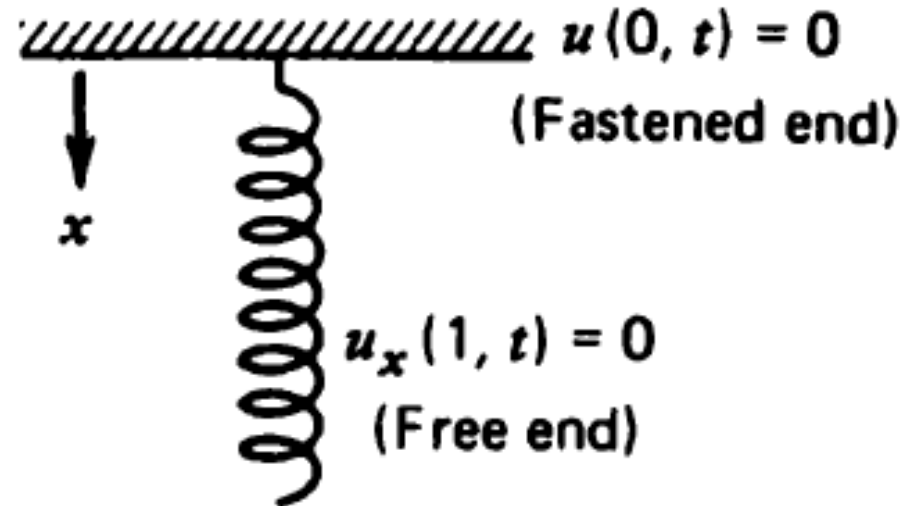
Wyobraźmy sobie strunę, której końce ślizgają się pionowo na beztarciowych tulejach. Siły działające na prawy i lewy koniec struny wyrażamy odpowiednio jako $Tu_x(0,t), Tu_x(L,t)$, co daje nam następujące warunki brzegowe.



$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_x(L,t) = 0$$

Drgająca sprężyna ze swobodnym dolnym końcem

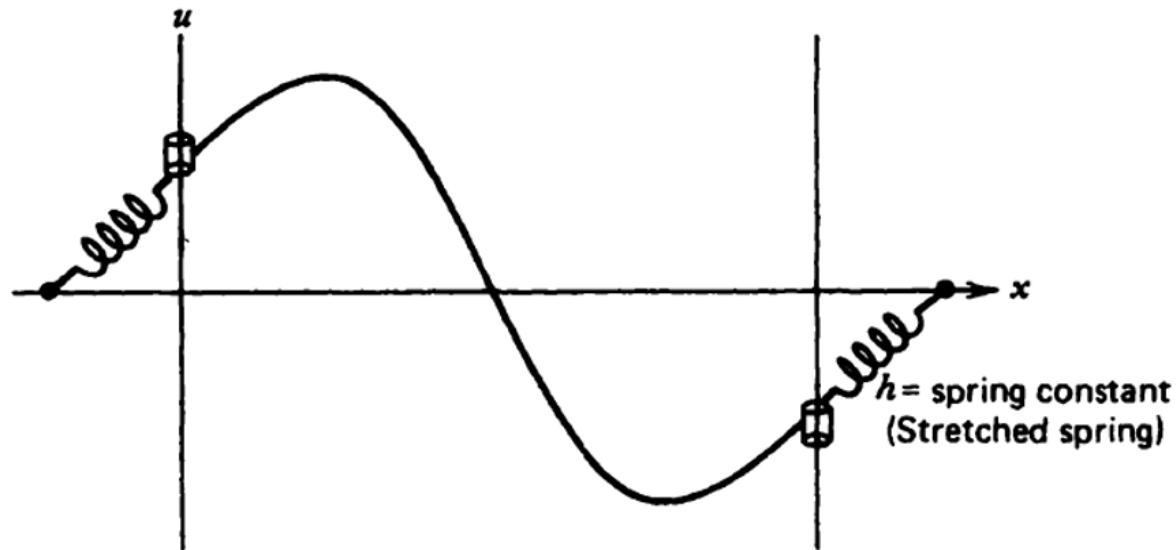


Jeśli siła $v(t)$ zostanie przyłożona na końcu $x = 1$ (siła dodatnia jest mierzona w dół), wówczas warunek brzegowy dla tego końca będzie następujący:

$$u_x(1, t) = \frac{1}{k}v(t) \quad (k \text{ is Young's modulus})$$

3. Elastyczne zamocowanie końców

Rozważmy strunę skrzypiec, której końce są przymocowane do elastycznego układu, takiego jak ten pokazany na rysunku



Mocowania sprężyn na każdym końcu powodują powstanie sił pionowych proporcjonalnych do przemieszczeń.

Przemieszczenie na lewym końcu oznaczmy jako $u(0,t)$

Przemieszczenie na prawym końcu oznaczmy jako $u(L,t)$

Zapiszmy wyrażenia na pionowe naprężenia sprężyny na obu końcach

Siła w górę na lewym końcu $= Tu_x(0,t)$

Siła w górę na prawym końcu $= -Tu_x(L,t)$

gdzie T to naprężenie w strunie a $Tu_x(0,t)$ równe jest przemieszczeniom pomnożonym przez stałą sprężystości h .

Wykorzystując tę wiedzę i dzieląc stronami równanie przez T otrzymujemy pożądane warunki brzegowe

$$u_x(0,t) = \frac{h}{T} u(0,t)$$
$$u_x(L,t) = -\frac{h}{T} u(L,t)$$

Te dwa jednorodne warunki brzegowe możemy przepisać jako

$$u_x(0,t) - \frac{h}{T} u(0,t) = 0$$
$$u_x(L,t) + \frac{h}{T} u(L,t) = 0$$

Problemy typu dyfuzyjnego (równania paraboliczne)

Prosty eksperyment z przepływem ciepła

Założmy, że mamy następujący prosty eksperyment, który podzielimy na kroki:

KROK 1

Weźmy miedziany pręt o długości $L = 2 \text{ m}$ i średnicy 2 cm , którego boki (ale nie końce) owijamy izolacją. Innymi słowy, ciepło może wpływać i wypływać przez końce pręta, ale nie przez granicę boczną.

KROK 2

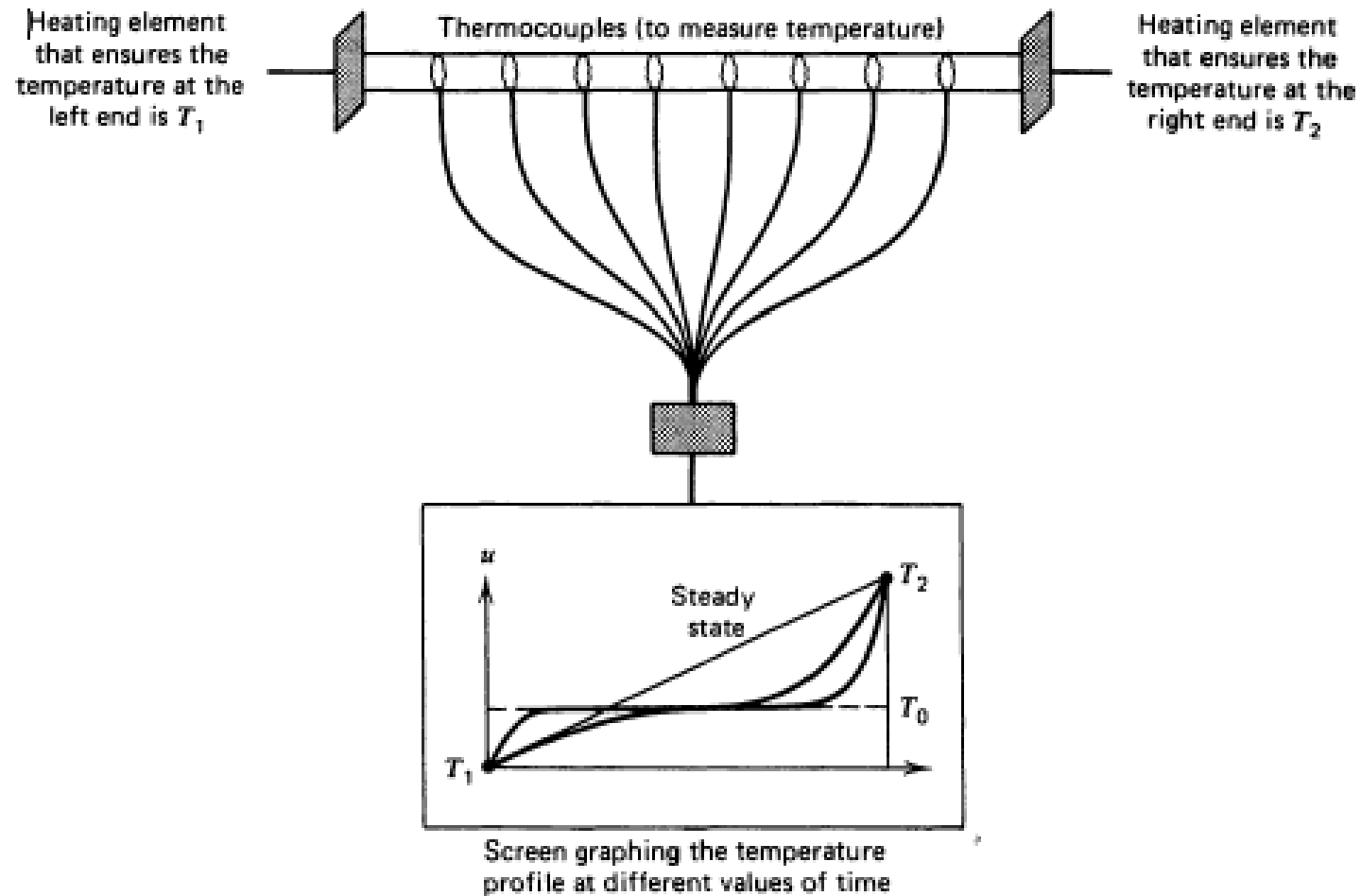
Następnie umieszczamy ten pręt w środowisku, którego temperatura jest stała i wynosi $T_0 = 10^\circ\text{C}$ (stopni Celsjusza) przez odpowiednio długi czas, tak aby temperatura całego pręta osiągnęła wartość w stanie ustalonym zbliżoną do temperatury otoczenia.

KROK 3

Wyjmujemy pręt z otoczenia w chwili, którą nazywamy $t = 0$ i dołączamy do końców pręta dwa termostaty. Zadaniem tych elementów jest utrzymywanie końcówek w określonych temperaturach np $T_1 = 0^\circ\text{C}$ i $T_2 = 50^\circ\text{C}$.

Termostaty stale monitorują temperaturę na końcach pręta i jeśli temperatury różnią się od zalecanych wartości T_1 i T_2 , włączają się silne elementy grzejne (lub chłodzące), aby odpowiednio dostosować temperaturę.

KROK 4 Monitorujemy profil temperatury pręta na wyświetlaczu.



Model matematyczny eksperymentu przepływu ciepła

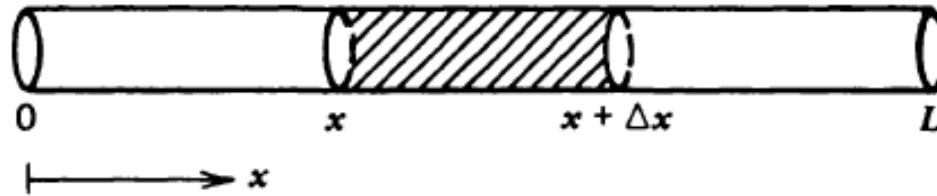
Opis naszego problemu fizycznego wymaga trzech rodzajów równań

1. RRC opisującego zjawisko fizyczne przepływu ciepła.
2. Warunków brzegowych opisujących fizyczną naturę naszego problemu na granicach.
3. Warunku początkowego opisującego zjawisko fizyczne w momencie rozpoczęcia eksperymentu.

Przyjmijmy następujące założenia

- Pręt jest wykonany z jednego jednorodnego materiału przewodzącego.
- Pręt jest izolowany poprzecznie (ciepło przepływa tylko w kierunku x).
- Pręt jest cienki (temperatura we wszystkich punktach przekroju poprzecznego jest stała).

Jeśli zastosujemy zasadę zachowania energii do odcinka pręta $[x, x + \Delta x]$ możemy stwierdzić, że:



Zmiana netto ciepła wewnątrz $[x, x + \Delta x]$ = Strumień netto ciepła przez końce pręta + Całkowita ilość ciepła wytworzonego wewnątrz $[x, x + \Delta x]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t) ds &= c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s,t) ds \\ &= kA [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + A \int_x^{x+\Delta x} f(s,t) ds \end{aligned}$$

gdzie:

c - pojemność cieplna pręta (mierzy zdolność pręta do magazynowania ciepła);

ρ – gęstość pręta

A – pole przekroju poprzecznego pręta

k - przewodność cieplna pręta (mierzy zdolność do przewodzenia ciepła);

$f(s, t)$ - zewnętrzne źródła ciepła (kalorie na cm na sekundę)

Problemem jest teraz zastąpienie powyższego równania takim, które nie zawiera całek
Skorzystajmy z twierdzenia o wartości średniej.

Twierdzenie o wartości średniej

Jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, to istnieje co najmniej jedna liczba ξ , taka, że $a < \xi < b$, która spełnia wyrażenie:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) (b - a)$$

Stosując ten wynik do równania zachowania energii otrzymujemy

$$cpAu_t(\xi_1, t)\Delta x = kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + Af(\xi_2, t)\Delta x \quad x < \xi < x + \Delta x$$

Po podzieleniu stronami przez $c\rho A$ i Δx dostajemy

$$u_t(\xi, t) = \frac{k}{c\rho} \left\{ \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \right\} + \frac{1}{c\rho} f(\xi, t)$$

Gdy $\Delta x \rightarrow 0$ otrzymujemy wynik

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) + F(x, t)$$

Gdy nie ma zewnętrznych źródeł ciepła znika człon $F(x, t)$.

Równanie opisujące eksperyment wygląda więc następująco

$$\text{PDE} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \quad 0 < t < \infty$$

Warunki brzegowe

W naszym eksperymencie warunki brzegowe (BC) są dość proste - temperatura na dwóch końcach $x = 0$ i $x = L$ była stała przez cały czas $t > 0$ i wynosiła odpowiednio T_1 i T_2 . Możemy to zapisać następująco:

$$\text{BCs} \begin{cases} u(0,t) = T_1 \\ u(L,t) = T_2 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

Warunki początkowe

Wszystkie problemy fizyczne muszą zaczynać się od pewnej wartości czasu (zwanej ogólnie $t = 0$) czyli od tkz chwili początkowej. Wiemy, że temperatura w chwili początkowej była stała i równa T_0 .

| | | |
|----|----------------|-------------------|
| IC | $u(x,0) = T_0$ | $0 \leq x \leq L$ |
|----|----------------|-------------------|

Zapiszmy omawiany problem za pomocą wszystkich przedstawionych równań. Nazywamy je zagadnieniem brzegowo- początkowym

$$\text{PDE} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{BCs} \quad \begin{cases} u(0,t) = T_1 \\ u(L,t) = T_2 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{IC} \quad u(x,0) = T_0 \quad 0 \leq x \leq L$$

Interesującą rzeczą, która nie jest wcale oczywista, jest to, że istnieje tylko jedna funkcja $u(x,t)$, która spełnia powyższy problem i ta funkcja opisuje temperaturę pręta. W związku z tym, naszym celem jest znalezienie unikalnego rozwiązania $u(x,t)$.

Więcej równań typu dyfuzyjnego

1. Boczne straty ciepła proporcjonalne do różnicy temperatur

Równanie

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta (u - u_0) \quad \beta > 0$$

opisuje przepływ ciepła w pręcie z dyfuzją $\alpha^2 u_{xx}$ wzdłuż pręta oraz straty (lub zyski) ciepła wynikające z braku izolacji pręta.

Straty ciepła $u > u_0$ lub zyski ciepła $u < u_0$ są proporcjonalne do różnicy pomiędzy temperaturą $u(x, t)$ pręta i temperaturą otaczającego go medium u_0 (przy czym β jest stałą proporcjonalności).

Jeśli β jest bardzo duża w przeciwieństwie do α^2 , to przepływ ciepła w przód i w tył wzdłuż pręta będzie niewielki w przeciwieństwie do przepływu do i na zewnątrz boków, a zatem ciepło będzie odprowadzane z boków (w każdym punkcie) zgodnie z przybliżonym równaniem

$$u_t = -\beta(u - u_0)$$

W chemii, gdzie u może oznaczać stężenie, równanie

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_0)$$

mówi, że szybkość zmian u_t substancji wynika zarówno z dyfuzji $\alpha^2 u_{xx}$, (w kierunku x) oraz z faktu, że substancja jest tworzona.

Wewnętrzne źródła ciepła

Równanie niejednorodne

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$$

odpowiada sytuacji, gdy pręt jest zasilany wewnętrznym źródłem ciepła (wszędzie wzdłuż pręta i przez cały czas t). Może się zdarzyć, że przez pręt przechodzi przewód przewodzący prąd elektryczny, a opór generuje stałe źródło ciepła $f(x, t)$.

Równanie dyfuzji – konwekcji

Założmy, że substancja zanieczyszczająca jest niesiona w strumieniu poruszającym się z prędkością v . Jest oczywiste, że stężenie $u(x, t)$ substancji zmienia się w funkcji zarówno x (dodatnie x oznacza odległość w dół strumienia), jak i czasu t . Szybkość zmian u , jest mierzona równaniem dyfuzji-konwekcji:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

Człon $\alpha^2 u_{xx}$ jest członem dyfuzyjnym a $-v u_x$ składnikiem konwekcyjnym.

To, czy zanieczyszczenie głównie ulega dyfuzji czy konwekcji, zależy od względnej wielkości dwóch współczynników α^2 i v .

Drugim przykładem, który może opisywać równanie dyfuzji – konwekcji jest dym unoszący się z komina. W tym przypadku cząsteczki dymu są unoszone w górę (następuje konwekcja do góry) wraz z gorącym powietrzem i jednocześnie dyfundują w strumieniach powietrza.

Warunki brzegowe dla równań typu dyfuzyjnego

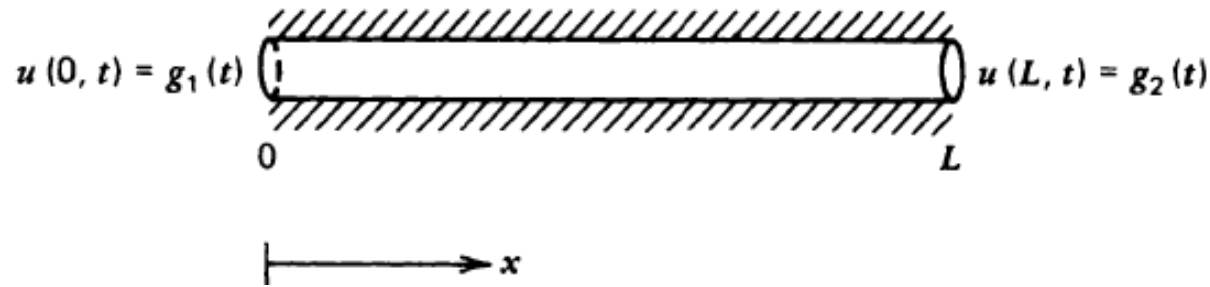
Trzy ważne rodzaje warunków brzegowych to:

1. $u = g(t)$ — znana jest temperatura na brzegu
2. $\frac{\partial u}{\partial n} = g(t)$ - podany jest strumień przepływający przez końce
3. $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g(t)$ — określona jest temperatura otaczającego ośrodka

1. Warunek brzegowy pierwszego rodzaju – temperatura określona na brzegu

Rozważmy przepływ ciepła w jednowymiarowym pręcie przedstawionym na poniższym rysunku i załóżmy, że sprawimy, że końce pręta będą mieć rozkłady temperatury reprezentowane przez funkcje $g_1(t)$ i $g_2(t)$.

Pręt jest bocznie izolowany.



Aby utrzymać stałą temperaturę na brzegu potrzebne będą termostaty oraz elementy grzejne, które odpowiednio regulują temperaturę. Problemy z warunkami brzegowymi tego rodzaju są dość powszechne. Może się nawet okazać, że celem rozwiązania zadania jest znalezienie temperatur granicznych $g_1(t)$ i $g_2(t)$, które wymuszają odpowiednie zachowanie się temperatury w pręcie.

W przemyśle stalowym często konieczne jest wyznaczenie warunków granicznych w taki sposób, aby temperatura metalu wewnątrz pieca zmieniała się w czasie, ale gradient temperatury między jednym a drugim punktem był niewielki.

2. Warunek brzegowy drugiego rodzaju (podany jest strumień przepływający przez końce pręta - w tym specjalny przypadek końców izolowanych)

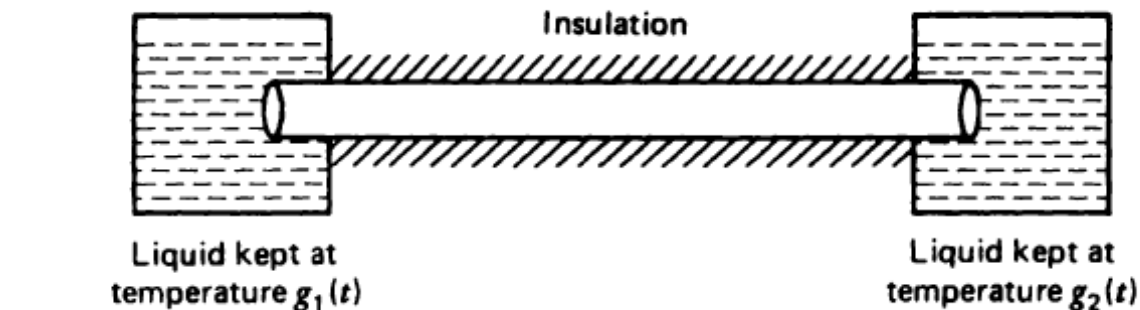
Końce izolowane to takie, które nie przepuszczają żadnego przepływu ciepła, a zatem pochodna normalna (do wewnątrz lub na zewnątrz) musi być zerowa na granicy (ponieważ pochodna normalna jest proporcjonalna do strumienia). W przypadku jednowymiarowego pręta z izolowanymi końcami w punktach $x = 0$ i $x = L$, warunki brzegowe przyjmą następującą postać:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= 0 \\ u_x(L,t) &= 0 \end{aligned} \quad 0 < t < \infty$$

Jeśli określimy ilość ciepła wnikaącego przez końce naszego pręta, wtedy prawa strona jest różna od zera.

3. Warunek brzegowy trzeciego rodzaju – określona jest temperatura otaczającego ośrodka

Przypuśćmy, że ponownie rozważymy nasz izolowany bocznie miedziany pręt, ale teraz zamiast wymagać, aby oba końce były utrzymywane w temperaturach $g_1(t)$ i $g_2(t)$, doprowadzimy je tylko do kontaktu z otaczającymi je ośrodkami, które mają te temperatury. Innymi słowy, założymy, że lewy koniec pręta jest zamknięty w pojemniku z cieczą o zmieniającej się temperaturze $g_1(t)$, natomiast prawy koniec jest zamknięty w innej cieczy o temperaturze $g_2(t)$.



Określając tego typu warunki brzegowe, nie możemy powiedzieć, że temperatury graniczne pręta będą takie same jak temperatury cieczy $g_1(t)$ i $g_2(t)$, ale wiemy (prawo chłodzenia Newtona), że ilekroć temperatura pręta na jednym z końców będzie mniejsza od odpowiednich temperatur cieczy, to ciepło będzie dopływać do pręta z szybkością proporcjonalną do tej różnicy. Innymi słowy, dla jednowymiarowego pręta o granicach $x = 0$ i $x=L$, prawo chłodzenia Newtona mówi, że

strumień ciepła z zewnątrz w kierunku $x=0$ jest równy $h[u(0, t) - g_1(t)]$

strumień ciepła z zewnątrz w kierunku $x=L$ jest równy $h[u(L, t) - g_2(t)]$

gdzie h jest współczynnikiem wymiany ciepła, a strumień ciepła mówi nam o liczbie kalorii przekraczających końce pręta na sekundę. Należy zauważyć, że strumień ciepła będzie dodatni na każdym końcu pod warunkiem, że temperatura pręta jest wyższa niż otaczającego go ośrodka.

Aby wyprowadzić warunek brzegowy skorzystajmy z prawa Fouriera dotyczącego chłodzenia. Mówi ono, że strumień ciepła przepływający przez koniec pręta jest proporcjonalny do pochodnej normalnej temperatury, przy czym normalna skierowana jest na zewnątrz pręta.

Dla problemu jednowymiarowego można napisać:

$$\begin{cases} \text{Outward flux of heat (at } x = 0) = k \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \\ \text{Outward flux of heat (at } x = L) = -k \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \end{cases}$$

(Outward flux of heat – zewnętrzny strumień ciepła)

gdzie k jest przewodnością cieplną metalu, która jest miarą tego, jak dobrze metal przewodzi ciepło (Materiały słabo przewodzące mają wartości bliskie zeru, podczas gdy miedź i aluminium mają wartości bliskie jedności).

Jak porównamy ze sobą strumienie ciepła na dwóch końcach wyrażone przez prawo Newtona ze strumieniami ciepła wyrażonymi przez prawo Fouriera otrzymamy:

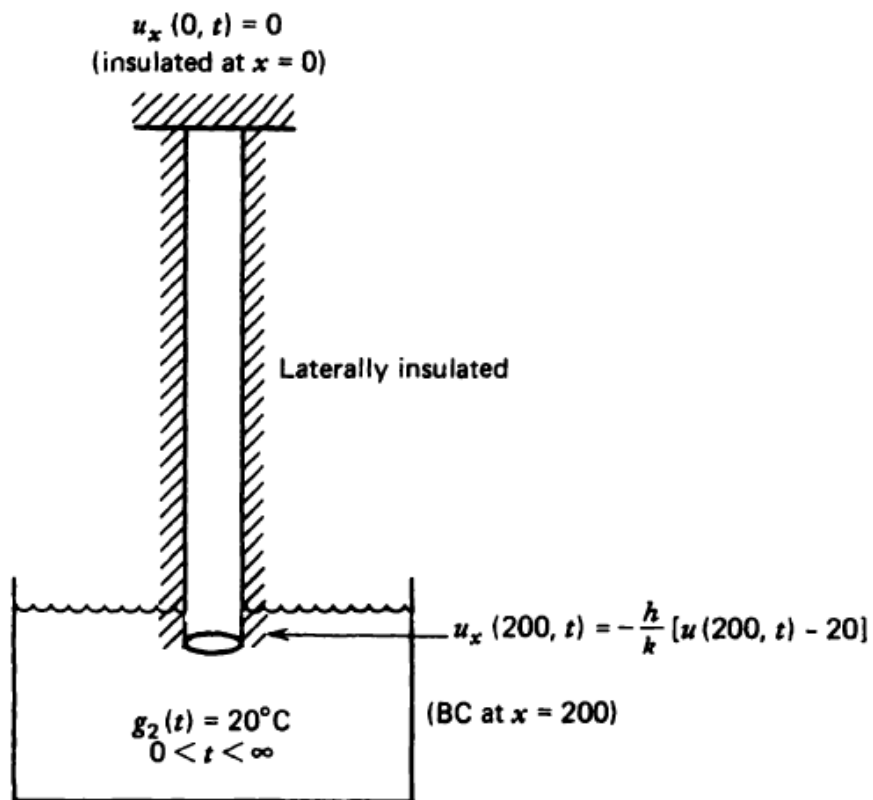
$$\begin{cases} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{h}{k} [u(0,t) - g_1(t)] \\ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = -\frac{h}{k} [u(L,t) - g_2(t)] \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

Dość często stałą $\frac{h}{k}$ zapisuje się po prostu jako λ , więc warunki brzegowe można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \lambda [u(0,t) - g_1(t)] \\ u_x(L,t) &= -\lambda [u(L,t) - g_2(t)] \end{aligned}$$

Przykład

Założmy, że mamy miedziany pręt o długości 200 cm, który jest izolowany bocznie i ma temperaturę początkową 0°C . Założmy, że górna część pręta ($x = 0$) jest izolowana, natomiast dół ($x = 200$) jest zanurzony w poruszającej się wodzie o stałej temperaturze $g_2(t) = 20^\circ\text{C}$



Zapiszmy matematyczny model tego problemu:

$$\text{PDE} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < 200 \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{BCs} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(200, t) = -\frac{h}{k} [u(200, t) - 20] \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{IC} \quad u(x, 0) = 0^\circ\text{C} \quad 0 \leq x \leq 200$$

Operator Laplace'a

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

jest prawdopodobnie najważniejszym operatorem w fizyce matematycznej.

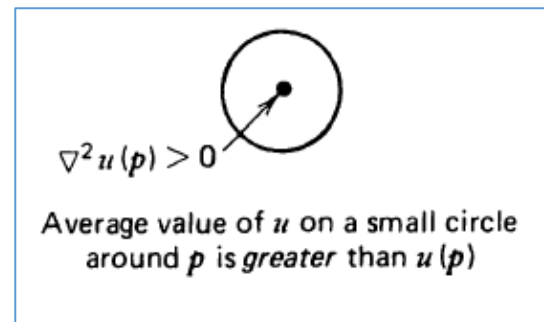
Pytanie brzmi: **co oznacza i dlaczego suma trzech drugich pochodnych ma mieć coś wspólnego z prawami natury?**

Odpowiedź leży w tym, że **Laplasjan funkcji pozwala nam porównać funkcję w danym punkcie z funkcją w punktach sąsiednich**. Robi on to, co druga pochodna robiła w jednym wymiarze i można o nim myśleć jak o drugiej pochodnej uogólnionej na wyższe wymiary.

Interpretacja Laplasjanu w dwóch wymiarach

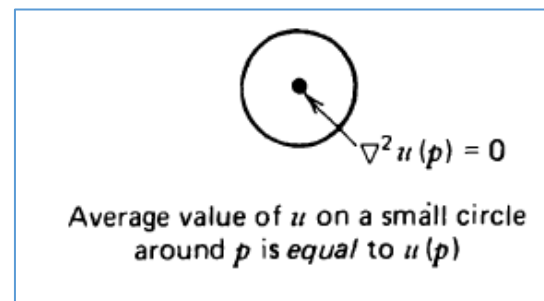
1. Jeżeli $\Delta u = \nabla^2 u > 0$

w punkcie (x, y) , wtedy $u(x, y)$ jest mniejsze od średniej wartości u w jego sąsiedztwie (w sensie okręgu wokół punktu (x, y)).



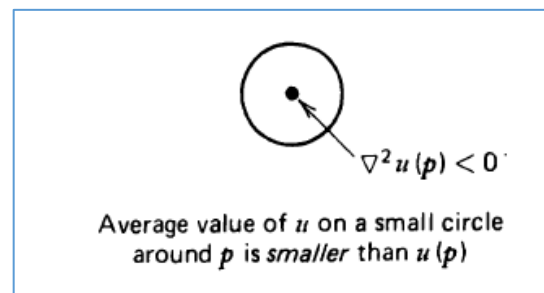
2. Jeżeli $\Delta u = \nabla^2 u = 0$

w punkcie (x, y) , wtedy $u(x, y)$ jest równe średniej wartości u w jego sąsiedztwie



3. Jeżeli $\Delta u = \nabla^2 u < 0$

w punkcie (x, y) , wtedy $u(x, y)$ jest większe od średniej wartości u w jego sąsiedztwie .



Napiszmy bezpośrednio Laplasjan dla dwóch i trzech zmiennych:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} \quad (\text{Two dimensions})$$

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad (\text{Three dimensions})$$

Jednak w wielu problemach konieczne jest zapisanie tego operatora w innych współrzędnych. Na przykład, jeśli granicą regionu jest okrąg, to musimy użyć współrzędnych biegunowych (ρ, ϕ) .

Natomiast jeśli jesteśmy w trzech wymiarach i naszą granicą jest sfera, wtedy używamy współrzędnych sferycznych (r, θ, ϕ) .

Zatem powstaje pytanie , jak zapisać Laplasjan w różnych układach współrzędnych?

Laplasjan w różnych innych układach współrzędnych

| | |
|-----------------------|--|
| Współrzędne biegunowe | $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ |
| Współrzędne walcowe | $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ |
| Współrzędne sferyczne | $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$ |

Istnieje wiele ważnych zagadnień, których wyniki nie zmieniają się w czasie, a jedynie w odniesieniu do przestrzeni. Problemy te, w większości są opisywane przez eliptyczne zagadnienia brzegowe.

W problemach fizycznych występują dwie częste sytuacje, w których powstają RRC, które nie zależą od czasu

1. Problemy stanu ustalonego

2. Problemy, w których w rozwiązaniu pomijamy składnik czasowy.

Przykładem mogą być zagadnienia poszukiwania

- stacjonarnego rozkładu temperatury wewnątrz regionu, gdy dana jest temperatura na brzegu lub gdy brzeg jest izolowany lub znana jest wymiana ciepła z otoczeniem;
- potencjału wewnątrz regionu (np. potencjał elektrostatyczny, lub potencjał prędkości w polu przepływu), gdy potencjał jest podany na brzegu;

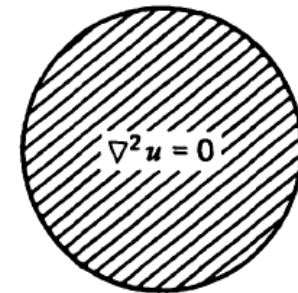
W zależności od tego jak są sformułowane warunki brzegowe mówimy o zagadnieniach brzegowych I, II i III rodzaju.

Zagadnienia brzegowe pierwszego rodzaju (Zagadnienie Dirichleta)

Rozważmy równanie Laplace'a wewnątrz okręgu z rozwiązaniem danym na granicy

$$\text{PDE} \quad u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 1$$

$$\text{BC} \quad u(1, \theta) = \sin \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

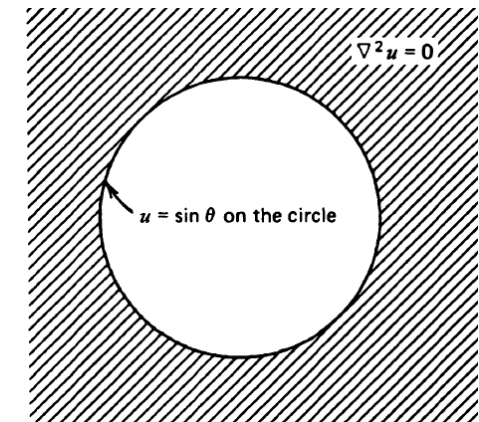


$u = \sin \theta$ on the boundary

Innym przykładem może być zewnętrzny problem Dirichleta, w którym szukamy rozwiązania równania Laplace'a poza okręgiem jednostkowym, a rozwiązanie jest dane na okręgu:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 1 < r < +\infty$$

$$u(1, \theta) = \sin \theta \quad 0 < \theta < 2\pi$$



Problemy Dirichleta są powszechne w elektrostatyce, gdy chcemy znaleźć potencjał w regionie, którego potencjał jest dany na granicy.

Zagadnienia brzegowe drugiego rodzaju (Zagadnienia Neumanna)

W tym wypadku na brzegu dana jest zewnętrzna pochodna normalna $\frac{\partial u}{\partial n}$ (która jest proporcjonalna do strumienia skierowanego do wewnątrz obszaru).

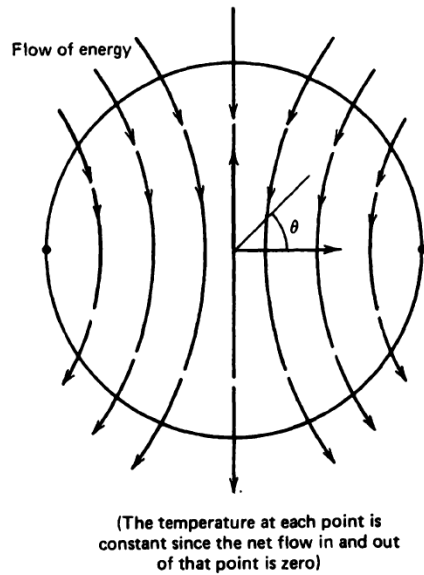
Problemy tego typu są powszechne w przepływie ciepła w stanie ustalonym i elektrostatyce, gdzie na brzegu podane jest natężenie strumienia.

Na przykład, załóżmy, że przepływ ciepła do wewnątrz zmienia się na okręgu zgodnie z $\frac{\partial u}{\partial r} = \sin \theta$

Temperatura w stanie ustalonym wewnątrz okręgu byłaby wówczas określona przez rozwiązanie następującego zagadnienia

$$\nabla^2 u = 0 \quad 0 < r < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin \theta \quad r = 1 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$



Przyglądając się ilustracji możemy zauważyć, że strumień ciepła przepływa przez brzeg do wewnątrz obszaru dla $0 < \theta < \pi$ i z wnętrza obszaru na zewnątrz dla $\pi < \theta < 2\pi$.

Jednakże, ponieważ całkowity strumień

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

(warunek, który musi być zawsze prawdziwy dla problemów Neumanna), możemy powiedzieć, że temperatura w każdym punkcie wewnątrz okręgu nie zmienia się względem czasu.

Innymi słowy, **problemy Neumanna mają sens tylko wtedy, gdy zysk netto w postaci ciepła (lub czegokolwiek innego) przez brzeg jest zerowy. Matematycznie oznacza to, że**

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

musi być prawdą blisko brzegu, bo inaczej problem nie ma rozwiązania.

Weźmy dla przykładu, wewnętrzny problem Neumanna

$$\nabla^2 u = 0 \quad 0 < r < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = 1 \quad r = 1 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Nie ma on sensu fizycznego, ponieważ stały jednostkowy strumień do wewnątrz nie dałby rozwiązania w stanie ustalonym.

Problem Neumanna różni się nieco od innych zagadnień brzegowych tym, że rozwiązania nie są unikalne. Spójrzmy na zagadnienie:

$$\nabla^2 u = 0 \quad 0 < r < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = \cos(2\theta) \quad r = 1 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Ma ono nieskończoną liczbę rozwiązań $u(r, \theta)$. Można zauważyć, że w tym wypadku całkowity strumień przepływający przez brzeg da nam wartość zero.

Jednakże, gdy mamy już jedno rozwiązanie, możemy uzyskać pozostałe inne przez dodanie stałej. Na przykład, jednym z rozwiązań naszego problemu Neumanna jest

$$u(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$$

i jest oczywiste, że jeśli do tego rozwiązania dodamy stałą, to otrzymamy inne rozwiązanie. Z tego powodu, jeśli chcemy znaleźć jedno rozwiązanie problemu Neumanna, musimy mieć jakąś dodatkową informację (np. znać rozwiązanie w jednym punkcie).

Zagadnienia brzegowe trzeciego rodzaju:

Problemy te odpowiadają RRC zadanym w pewnym regionie przestrzeni, ale warunki graniczne są mieszanką warunków dwóch pierwszych rodzajów

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - g) = 0$$

gdzie h jest stałą, a g daną funkcją, która może zmieniać się na brzegu.

Bardziej sugestywną formą tego warunku brzegowego byłoby

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u - g)$$

Mówi nam to, że strumień wejściowy przez brzeg jest proporcjonalny do różnicy pomiędzy temperaturą u a pewną określoną temperaturą g . Można to zinterpretować następująco:

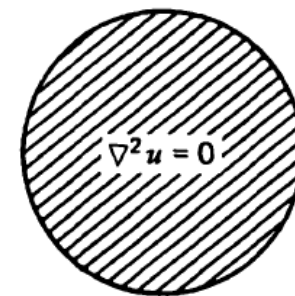
- Jeśli temperatura u (na brzegu) jest większa niż zewnętrzna temperatura przy brzegu to przepływ ciepła odbywa się na zewnątrz.
- Jeśli u jest mniejsze od temperatury g w otoczeniu brzegu, to ciepło wpływa do środka.

To oczywiście jest po prostu prawo Newtona dotyczące chłodzenia, a więc tego typu warunki brzegowe są bardzo naturalne w ustalonym przepływie ciepła.

Wewnętrzny problem Dirichleta dla koła

$$\text{PDE} \quad u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 1$$

$$\text{BC} \quad u(1, \theta) = g(\theta) \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$



$u = \sin \theta$ on the boundary

Problem ten jest bardzo ważny w zastosowaniach fizycznych. Można go przykładowo interpretować jako poszukiwanie potencjału elektrostatycznego wewnątrz okręgu, gdy potencjał jest dany na granicy.

Do rozwiązania tego problemu można użyć metody separacji zmiennych. Natomiast odpowiednio manipulując rozwiązaniem można uzyskać tkz wzór całkowy Poissona.

Na pierwszy rzut oka można pomyśleć, że przedstawiony problem nie jest bardzo istotny, gdyż jego dziedzina jest bardzo prosta (wnętrze koła).

Prawdą jest, że równanie Laplace'a jest najprostsze, gdy obszar, o którym mowa, jest okręgiem, kwadratem, półpłaszczyzną, ćwierć płaszczyzną itd.

Jest jednak kilka ważnych punktów, na które należy zwrócić uwagę.

W wielu przypadkach eksperymentator projektuje aparaturę fizyczną i ma możliwość kształtowania granicy w dowolny sposób.

Istnieją transformacje znane jako odwzorowania konforemne, które pozwalają przekształcać skomplikowane regiony w proste (np. takie jak okręgi). Zatem, aby rozwiązać problem Dirichleta w dowolnym obszarze, wystarczy tylko przekształcić go konforemnie w okrąg, użyć rozwiązań które zostały wyprowadzone dla okręgu i przekształcić z powrotem do oryginalnych współrzędnych.

Rozwiązania analityczne versus numeryczne

Rozwiązania analityczne

Rozwiązania analityczne to takie rozwiązania, w których nieznana funkcja u jest podana jako wyrażenie matematyczne w kategoriach zmiennych niezależnych i parametrów układu.

Są one na ogół nieskończonymi szeregami lub całkami.

Rozwiązania numeryczne

Rozwiązania numeryczne odnoszą się do znalezienia rozwiązania RRC poprzez zastąpienie go równaniem przybliżonym i rozwiązanie tego łatwiejszego.

Na przykład, metoda aproksymacji różnic skończonych zastępuje pochodne cząstkowe różnicami skończonymi, więc przybliżamy rozwiązanie RRC rozwiązując równanie różnic skończonych. Wynikiem jest zazwyczaj tabela liczb wyliczających rozwiązanie u dla różnych wartości zmiennych niezależnych.

Gdy znamy już podstawowe znaczenie tych dwóch typów rozwiązań, **zapytajmy które jest lepsze?**

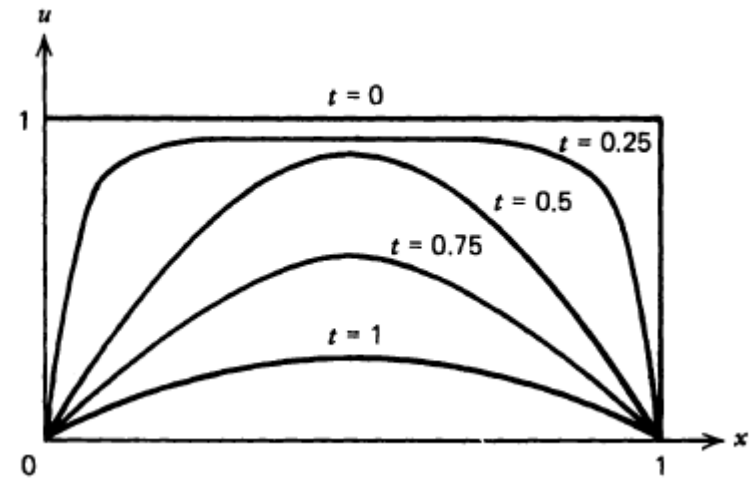
Odpowiedź zależy od tego, co chcemy zrobić z rozwiązaniem. Istnieją jednak pewne wyraźne zalety każdego z tych dwóch typów rozwiązań.

Weźmy przykładowo proste równanie typu parabolicznego (równanie przewodnictwa cieplnego) wraz z warunkami brzegowymi i początkowym. Rozwiązanie przedstawia rysunek.

$$\text{PDE} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{BCs} \quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{IC} \quad u(x,0) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$



Powstaje pytanie, czy wolelibyśmy otrzymać rozwiązanie analityczne tego problemu.

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \left[e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x) + \frac{1}{3} e^{-(3\pi\alpha)^2 t} \sin(3\pi x) + \dots \right]$$

Czy rozwiązanie numeryczne.

| | | x | | | | | | | | | | |
|-----|------|-----|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|----|
| | | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1. |
| t | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0.01 | 0 | 0.2 | 0.34 | . | . | . | . | . | 0.34 | 0.2 | 0 |
| | 0.02 | 0 | 0.15 | . | | | | | | . | 0.15 | 0 |
| | 0.03 | 0 | . | | | | | | | | . | 0 |
| | . | . | | | | | | | | | | . |
| | | . | | | . | | | . | . | . | . | . |

Zalety rozwiązań analitycznych:

- Równanie zawiera oczywiście więcej informacji niż tabela liczb. Gdybyśmy chcieli ocenić rozwiązanie w dowolnym konkretnym punkcie (x,t) , moglibyśmy to zrobić z dowolną dokładnością, po prostu dodając odpowiednią liczbę wyrazów w nieskończonym szeregu. Górną granicę błędu można by było znaleźć bez większych trudności.
- Rozwiązanie analityczne pozwala nam znaleźć rozwiązanie w pojedynczym punkcie (x,t) bez przechodzenia przez cały proces znajdowania rozwiązania we wszystkich innych punktach, jak to miało miejsce w przypadku metody jawnej i ukrytej.
- Rozwiązanie analityczne pozwala nam znaleźć rozwiązanie w dowolnym punkcie, a nie tylko w punktach siatki.
- **Prawdopodobnie najważniejsze ze wszystkich jest to, że rozwiązanie analityczne mówi nam, jak parametry fizyczne, warunki początkowe i brzegowe wpływają na rozwiązanie.**

Rozwiązania numeryczne nie wydobywają tych zależności, ponieważ znajdujemy rozwiązanie numeryczne dla określonych parametrów, warunków początkowych i brzegowych.

W wielu sytuacjach poznanie zależności pomiędzy parametrami modelu i rozwiązaniem jest bardzo istotne. Szczególnie w przypadku, gdy naszym celem jest oszacowanie parametrów z rozwiązania. Na przykład, założmy, że mierzymy eksperymentalnie rozwiązanie u i znamy rozwiązanie analityczne

$$u = \text{funkcja parametrów}$$

wtedy możemy mniej więcej znaleźć parametry jako funkcję danych poprzez

$$\text{parametry} = \text{funkcja } u = \text{funkcja danych}$$

Koncepcja ta nazywana jest identyfikacją parametrów i jest jednym z głównych powodów rozwiązywania RRC w sposób analityczny.

Zalety rozwiązań numerycznych

Jest jedna główna zaleta rozwiązań numerycznych, a mianowicie to, że wiele problemów nie ma znanych rozwiązań analitycznych. Praktycznie wszystkie nieliniowe RRC muszą być rozwiązywane metodami numerycznymi, i w rzeczywistości większość realistycznych modeli w fizyce, chemii, biologii i tak dalej, są to problemy w rzeczywistości nieliniowe.

Modele liniowe reprezentują, w większości, przybliżenia, z których wyrzuciliśmy niektóre nieliniowe składniki. Niektóre bardzo ważne równania nieliniowe takie jak:

nieliniowe równanie falowe

$$u_{tt} = u_{xx} + f(u)$$

równanie reakcji-dyfuzji

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

równanie Hodgkina-Huxleya

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, v) \\ v_t = g(u, v) \end{cases}$$

nie mają znanych rozwiązań analitycznych dla wszystkich nieliniowych funkcji f i g . Dlatego też, do rozwiązania tego typu zagadnień wykorzystuje się rozwiązania numeryczne.