



INFORMATYKA II: INSTRUKCJA 4

Całkowanie numeryczne równań różniczkowych zwyczajnych

1 Wstęp

Celem dzisiejszych zajęć jest zapoznanie się z podstawowymi metodami całkowania numerycznego równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Większość procesów fizycznych w otaczającym nas świecie można zamodelować, korzystając właśnie z równań różniczkowych. Niestety większości z wyprowadzonych przez nas równań nie da się rozwiązać w sposób analityczny (tj. podać rozwiązania w postaci jawnej). W szczególności największe problemy sprawiają równania zawierające człony nieliniowe. Świat, w którym żyjemy, jest silnie nieliniowy (inaczej życie byłoby nudne), dlatego większość problemów, które przyjdzie nam rozwiązywać, nie będzie posiadać rozwiązania... A przynajmniej rozwiązania w formie analitycznej. Stąd płynie nasza motywacja do zagłębienia się magiczny świat całkowania numerycznego równań różniczkowych, który pozwoli nam lepiej zrozumieć otaczającą nas rzeczywistość! Jako pierwszą poznamy metodę pierwszego rzędu zwaną (od nazwiska odkrywcy) jawną metodą Eulera. Jest ona jednocześnie najprostszą i (niestety) bardzo niestabilną metodą. Drugą metodą, którą zastosujemy na dzisiejszych zajęciach, będzie metoda Rungego-Kutty 4-go rzędu. Jest to jawna metoda wieloetapową, która charakteryzuje się wysokim rzędem, łatwością w implementacji oraz relatywnie wysoką stabilnością.

2 Metoda Eulera

Metodę Eulera będziemy wykorzystywać do rozwiązania zagadnienia początkowego w postaci:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Stosując następujący schemat iteracyjny:

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$$

Gdzie: h - krok całkowania, y_{i+1} - rozwiązanie, y_i - rozwiązanie w kroku poprzednim, f - funkcja obliczająca prawą stronę równania różniczkowego

3 Ćwiczenia

Dane jest zagadnienie początkowe:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Rozwiązanie dokładne ma postać:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda(t-t_0)}$$

1. Napisz program rozwiązujący dane zagadnienie, z wykorzystaniem schematu Eulera
2. Napisz program rozwiązujący dane zagadnienie, z wykorzystaniem schematu RK4
3. Dla obu przypadków wyświetl na monitorze kolejne wartości t , y oraz względną wartość błędu:

$$\epsilon_{wz} = \frac{|y_a - y_{num}|}{y_a}$$

(moduł różnicy między rozwiązaniem dokładnym i numerycznym dzielony przez wartość rozwiązania dokładnego)

4. Zmodyfikuj program tak aby wykonywał obliczenia jedną i drugą metodą dla zadanego t_k i $h = 2^0, 2^{-1}, \dots, 2^{-6}$ oraz drukował do pliku: h , błąd metody Eulera, błąd metody RK4 dla ostatniego kroku czasowego.
5. Sporządzić wykres „błąd metody w funkcji h ”.



6. Rozwiąż następujące zagadnienie:

$$\frac{dy}{dt} = 100 \cdot (\sin(x) - y)$$
$$y(0) = 0$$

Rozwiązanie dokładne ma postać:

$$y(x) = \frac{\sin(x) - 0.01 \cdot \cos(x) + 0.01 \cdot e^{-100x}}{1.0001}$$

Wykorzystaj obydwie metody dla $h=0.01, 0.02, 0.03$. Sporządź wykresy przedstawiające błąd w funkcji x .

7. Wyciągnij wnioski!!!