WYKŁAD 3

OGÓLNE UJĘCIE ZASAD ZACHOWANIA W MECHANICE PŁYNÓW.
ZASADA ZACHOWANIA MASY.

Fundamentalne Zasady Zachowania/Zmienności w Mechanice mówią nam co dzieję się z:

- **masą**
- **pędem**
- **krętem (momentem pędu)**
- **energią**

ośrodka ciągłego podczas jego ruchu.

Wszystkie równia rządzące ruchem płynu wynikają (są wyprowadzane) z tych zasad.

Dodatkowo, odwołanie do **2-giej Zasady Termodynamiki** może być konieczne w celu rozpoznania fizycznie dopuszczalnych rozwiązań równań opisujących zjawiska termo-mechaniczne w płynie.

PRAWA ZACHOWANIA – PODEJŚCIE OGÓLNE

Rozważmy fizyczną wielkość ekstensywną H charakteryzującą stan termodynamiczny i/lub ruch płynu. Założymy, że rozkład przestrzenny tej wielkości w obszarze zajętym przez płyn może być opisany przez pole gęstości wielkości H, oznaczane dalej literą h. Oznacza to, że jednostką fizyczną gęstości h (czyli $[h]$) jest $[h]=[H]/kg$.

Całkowita „ilość" wielkości fizycznej H w wybranym obszarze (wszystko jednio czy płynnym, czy nie) Ω zadana jest całką objętościową

$$H=\int_{\Omega}\rho h\,d\Omega \quad , \quad \rho \text{ - gęstość płynu}$$

Na tym etapie nie ma znaczenia czy wielkość H jest skalarna, wektorowa czy tensorowa.

Założmy teraz, że obszar Ω jest w wybranym układzie odniesienia nieruchomy i niezmienny w czasie. Taki obszar nazywamy **obszarem kontrolnym**, w odróżnieniu od obszaru poruszającego się z płynem, zwanym **obszarem płynnym** lub materialnym.

Kluczowe pytanie: **od czego zależy tempo zmian wielkości *H* w obszarze kontrolnym?**

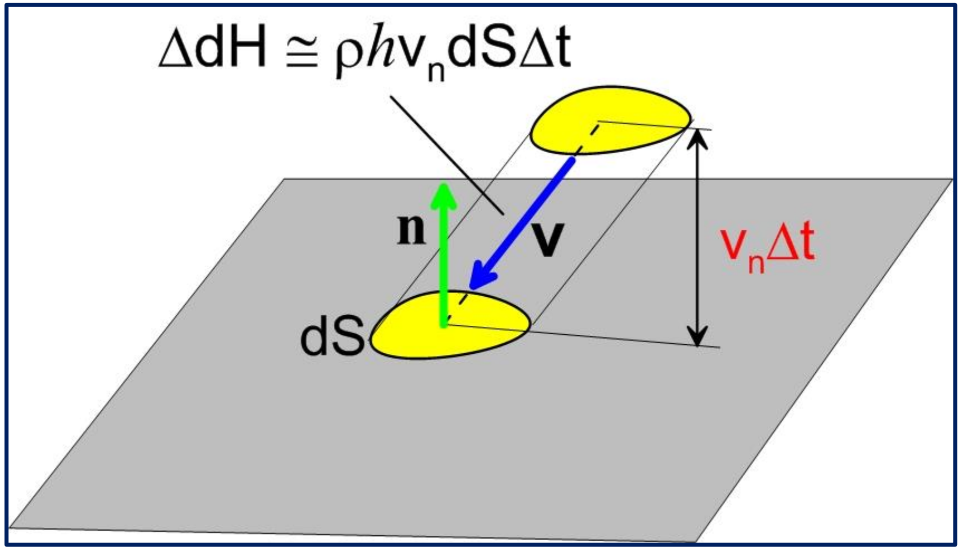
Tempo zmian wielkości *H* w obszarze kontrolnym Ω jest sumą dwóch składników:

- tempa zmian wywołanych produkcją/destrukcją wielkości H w obszarze Ω,
- tempa zmian wywołanych strumieniem wielkości H przez brzeg obszaru $\partial\Omega$ związanym z przepływem przez ten brzeg.

W zapisie matematycznym:

$$\frac{dH}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho h \, dV = \left.\frac{dH}{dt}\right|_{produkcja} + \left.\frac{dH}{dt}\right|_{strumien\ przez\ \partial\Omega}$$

Zauważmy, że drugi ze składników może być zapisany jako następująca całka powierzchniowa (vide obrazek)



$$\left.\frac{dH}{dt}\right|_{strumien\ przez\ \partial\Omega} = -\int_{\partial\Omega} \rho h \upsilon_n \, dS$$

gdzie $\left.\upsilon_n\right|_{\partial\Omega} = \left.\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n}\right|_{\partial\Omega}$ składową prędkości płynu normalną do brzegu. Znak minus w formule pojawia się w związku z zewnętrzną orientacją brzegu (wersor $\boldsymbol{n}$ skierowany jest na zewnątrz , zatem $\upsilon_n < 0$ gdy wpływa, $\upsilon_n > 0$ gdy wypływa).

Ogólna forma zasady zachowania (czy raczej zmienności) wielkości H może być zapisana w sposób następujący

$$\left.\frac{dH}{dt}\right|_{produkcja} = \mathcal{E}_{źródla}$$

gdzie symbolem $\mathcal{E}_{źródla}$ oznaczyliśmy tzw. człon źródłowy, czyli wyrażenie opisujące fizyczne przyczyny produkcji/destrukcji wielkości H w obszarze Ω.

Szczegółowy charakter członu źródłowego zależy od konkretnej wielkości dla której sformułowana jest zasada mechaniki:

1. Masa płynu (skalar)

Wówczas $h \equiv 1$ i

$$H \equiv M(t) = \int_{\Omega} \rho \, dV$$

W tym przypadku $\mathcal{E}_{źródla} \equiv 0$ jako, że w masa nie może być produkowana!

2. Pęd płynu (wektor)

Teraz $h \equiv \boldsymbol{v}$ i

$$H \equiv \boldsymbol{P}(t) = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{v} \, dV$$

W tym przypadku źródłem zmienności pędu płynu w obszarze Ω są siły zewnętrzne (powierzchniowa i objętościowa) działające na płyn

$$\mathcal{E}_{źródla} \equiv \underset{powierzchniowa}{\boldsymbol{F}_S} + \underset{objętosciowa}{\boldsymbol{F}_V} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \, dS + \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{f} \, dS$$

gdzie symbolem $\boldsymbol{\sigma}$ oznaczyliśmy **wektor naprężeń** (jednostkowej siły powierzchniowej) na powierzchni brzegowej $\partial\Omega$.

3. Kręt (moment pędu)

Teraz $h \equiv \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}$ i

$$\boldsymbol{K}(t) = \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v} \, dV$$

Człon źródłowy zawiera całkowity moment sił zewnętrznych działających na płyn w obszarze Ω

$$\mathcal{E}_{\acute{z}r\acute{o}dla} \equiv \underset{powierzchniowy}{\boldsymbol{M}_S} + \underset{obj\k{e}tosciowy}{\boldsymbol{M}_V} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma} \, dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{f} \, dV$$

4. Energia

Zasadę zachowania w ośrodku ciągłym należy napisać dla sumy wszystkich form energii, tj. energii wewnętrznej i energii kinetycznej. Mamy zatem

$$h \equiv e = u + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = u + \tfrac{1}{2}\upsilon^2$$

i

$$H \equiv E(t) = \int_{\Omega} \rho\left(u + \tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) dV$$

gdzie symbol u oznacza energię wewnętrzną właściwą (tj. odniesioną do jednostkowej masy płynu) , natomiast υ to wartość (długość) wektora prędkości płynu.

W porównaniu z poprzednimi zasadami, **człon źródłowy jest bardziej złożony i obejmuje**:

- pracę wykonywaną w jednostkowym czasie (czyli moc) przez siły zewnętrzne (powierzchniowe i objętościowe)
- strumień ciepła przepływający przez brzeg $\partial\Omega$ w wyniku niezerowego gradientu temperatury na tym brzegu (przewodnictwo)
- produkcję ciepła przez wewnętrzne źródła ciepła i/lub objętościową absorbcję promieniowania.

Możemy zapisać formułę

$$\mathcal{E}_{źródla}(t) = \underbrace{P_S + P_V}_{\text{moc sil zewnętrznych}} + \underbrace{Q_{\partial\Omega}}_{\text{moc strumienia ciepla przez brzeg}} + \underbrace{Q_{\Omega}}_{\text{moc wewnętrznych źródel ciepla}}$$

gdzie składniki mechaniczne mają postać

$$P_S = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}\, dS \quad , \quad P_V = \int_{\Omega} \rho\, \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dV$$

a składniki cieplne to

$$Q_{\partial\Omega} = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}\, dS \quad , \quad Q_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho\, \gamma_h\, dV$$

Powyżej, $\boldsymbol{q}_h$ oznacza wektor strumienia ciepła związany z przewodnictwem ciepła przez brzeg obszaru $\partial\Omega$ (pokażemy później, że jest on ściśle związany z gradientem temperatury) a symbol γ_h oznacza gęstość właściwą (odniesioną do jednostki masy) wewnętrznych źródeł ciepła.

ZASADA ZACHOWANIA MASY W FORMIE RÓŻNICZKOWEJ

Wiemy już, że w równaniu wyrażającym zasadę zachowania masy człon źródłowy nie występuje. Mamy

$$\left.\frac{dM}{dt}\right|_{produkcja} = \frac{dM}{dt} - \left.\frac{dM}{dt}\right|_{strumien\ na\ \partial\Omega} = 0$$

W zapisie całkowym

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho\, dV - \left(-\int_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS\right) = 0$$

Ponieważ obszar Ω jest niezmienny w czasie, możemy wejść z różniczkowaniem pod całkę objętościową. Ponadto, możemy zastosować twierdzenie GGO po to, aby zamienić całkę powierzchniową w równoważną całkę objętościową.

W wyniku tych manipulacji otrzymujemy

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v})\right] dV = 0$$

Ponieważ obszar Ω został wybrany dowolnie, to – przy założeniu ciągłości całkowanego wyrażenia – powyższa równość implikuje, że wyrażenie to jest równe zeru w każdym punkcie obszaru zajętego przez płyn.

Otrzymujemy w ten sposób **różniczkowe równanie zachowania masy**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0}$$

Postać otrzymanego równania nazywamy **postacią zachowawczą**. Rozwijając składnik zawierający operator dywergencji zastosowany do iloczynu gęstości i prędkości możemy otrzymać inne równoważne formy tego równania, a mianowicie

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho}_{\frac{D}{Dt}\rho} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{D}{Dt}\rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

W notacji indeksowej

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \upsilon_j) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \upsilon_j \frac{\partial}{\partial x_j}\rho}_{\frac{D}{Dt}\rho} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_j = \frac{D}{Dt}\rho + \rho \frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_j$$

Zauważmy, że:

1. Jeżeli przepływ jest ustalony, tj. żadne z pól fizycznych nie zależy jawnie od czasu, to równanie zachowania masy upraszcza się do formy

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

2. Jeżeli $\rho\equiv const$ to równanie zachowania masy redukuje się do szczególnie prostej formy

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

Równanie to nazywane bywa równaniem ciągłości. **Jest to de facto warunek zachowania objętości sformułowany dla płynu nieściśliwego. Mówi on, że tylko pola prędkości o zerowej dywergencji mogą opisywać ruch takiego płynu.**

Warto zauważyć, że równanie ciągłości nie jest równaniem „dynamicznym" lecz wyraża więz geometryczny nałożony na klasę dopuszczalnych pól prędkości.

DWUWYMIAROWY PRZEPŁYW NIEŚCIŚLIWY. FUNKCJA PRĄDU.

Funkcja prądu jest wygodnym narzędziem opisu dwuwymiarowego ruchu płynu nieściśliwego. Płyn nieściśliwy to płyn który podczas ruchu ściśle zachowuje swoja objętość (a zatem jego gęstość jest stała). Pokażemy dalej, że kinematycznym warunkiem nieściśliwości płynu jest znikanie dywergencji pola prędkości w każdym punkcie obszaru przepływu. W przypadku 2D warunek ten można łatwo spełnić postulując istnienie funkcji prądu $\psi = \psi(t, x_1, x_2)$ takiej, że

$$\upsilon_1 = \partial_{x_2}\psi \quad , \quad \upsilon_2 = -\partial_{x_1}\psi$$

Łatwo pokazać, że warunek nieściśliwości

$$\partial_{x_1}\upsilon_1 + \partial_{x_2}\upsilon_2 = 0$$

Jest automatycznie spełniony. Istotnie, mamy

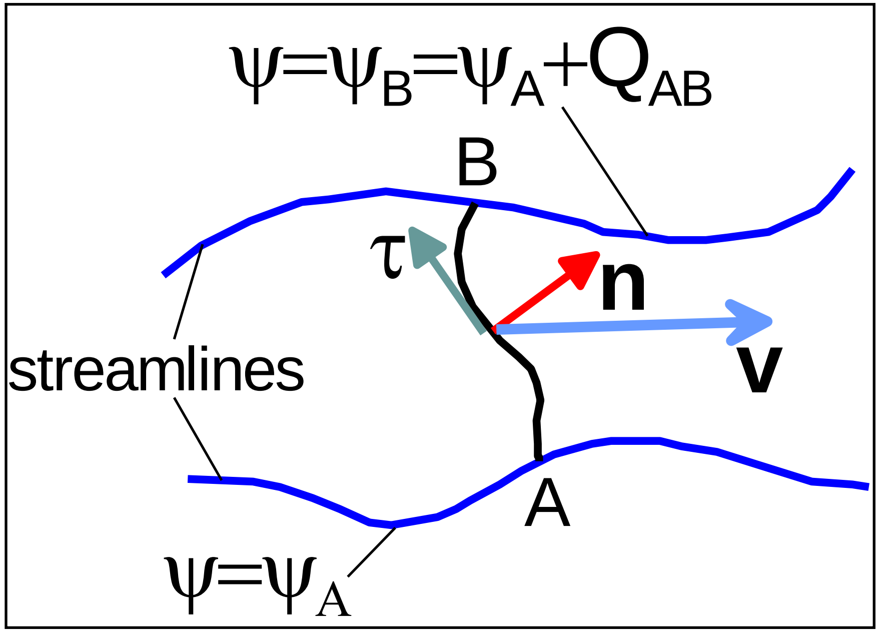
$$\partial_{x_1}\upsilon_1 + \partial_{x_2}\upsilon_2 = \partial_{x_1,x_2}\psi - \partial_{x_2,x_1}\psi = 0$$

Funkcja prądu ma ważną własność: jest stała wzdłuż każdej linii prądu.

Aby się o tym przekonać wystarczy pokazać, że gradient funkcji prądu jest w każdym punkcie przepływu prostopadły do lokalnego wektora prędkości. Mamy zatem

$$\nabla\psi\cdot\boldsymbol{\upsilon}=\upsilon_1\partial_{x_1}\psi+\upsilon_2\partial_{x_2}\psi=-\upsilon_1\upsilon_2+\upsilon_2\upsilon_1=0$$

Rozważmy teraz dwie linie prądu i dowolna linię łączącą dwa punkty położone na tych liniach (obrazek). Obliczmy strumień objętości płynu (zwany – ogólnie - wydatkiem objętościowym, chociaż w 2D mierzonym de facto w m^2/s) przez linię AB.



Obliczamy …

$$Q_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=\int_A^B(\upsilon_1 n_1+\upsilon_2 n_2)\,ds=$$

$$=\int_A^B(\upsilon_1\tau_2-\upsilon_2\tau_1)\,ds=\int_A^B(\tau_1\partial_{x_1}\psi+\tau_2\partial_{x_2}\psi)\,ds=$$

$$=\int_A^B\nabla\psi\cdot d\boldsymbol{s}=\psi_B-\psi_A$$

Strumień objętości (w 2D) płynący pomiędzy dwiema liniami prądu jest równy różnicy wartości funkcji prądu na tych liniach.

UWAGA:

Skalarna funkcja prądu może być również zdefiniowana dla przepływu nieściśliwego, którego pole prędkości jest osiowo symetryczne. W takim polu istnieją jedynie dwie niezerowe składowe wektora prędkości: osiowa i radialna (promieniowa), natomiast składowa obwodowa (azymutalna) znika tożsamościowo. W ogólnym przypadku 3D skalarna funkcja prądu musi być zastąpiona przez **wektorową funkcję prądu** $\boldsymbol{\Psi}$ związaną z polem prędkości wzorem $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{\Psi}$. Relacja ta implikuje automatycznie, że $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, tj. warunek nieściśliwości jest spełniony automatycznie.
