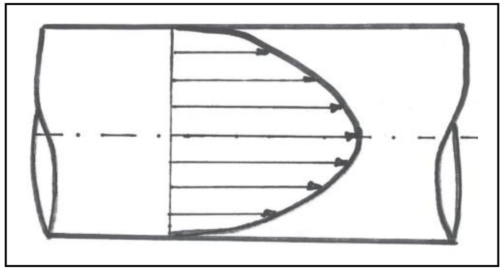
WYKŁAD 8B
PRZEPŁYWY CIECZY LEPKIEJ W RUROCIĄGACH

PRZEPŁYW HAGENA-POISEUILLE'A (LAMINARNY RUCH W PROSTOLINIOWEJ RURZE O PRZEKROJU KOŁOWYM)

Prędkość w rurze wyraża się wzorem:

$$w = \frac{G_p}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right) \quad , \quad G_p \equiv -\frac{dp}{dz} = const$$



Podstawiając to wyrażenie pod całkę dostajemy:

$$Q = 2\pi \int_0^R r w(r) dr = \frac{\pi G_p R^4}{8\mu} = \frac{\pi G_p D^4}{128\mu}$$

wzór Hagena - Poiseiuille'a

Wzór Hagena – Poiseiuille'a określa wydatek w zależności od spadku ciśnienia, rodzaju cieczy i geometrii przewodu. Wzór ten jest poprawny tylko dla przepływów bardzo powolnych! Dla ruchów szybkich, przy dużych wydatkach pomiary i obliczenia dają radykalnie różne wyniki.

DOŚWIADCZENIE REYNOLDSA

Osborne Reynolds wykonał elementarne doświadczenie: do szklanej rury wprowadził strugę barwnika.

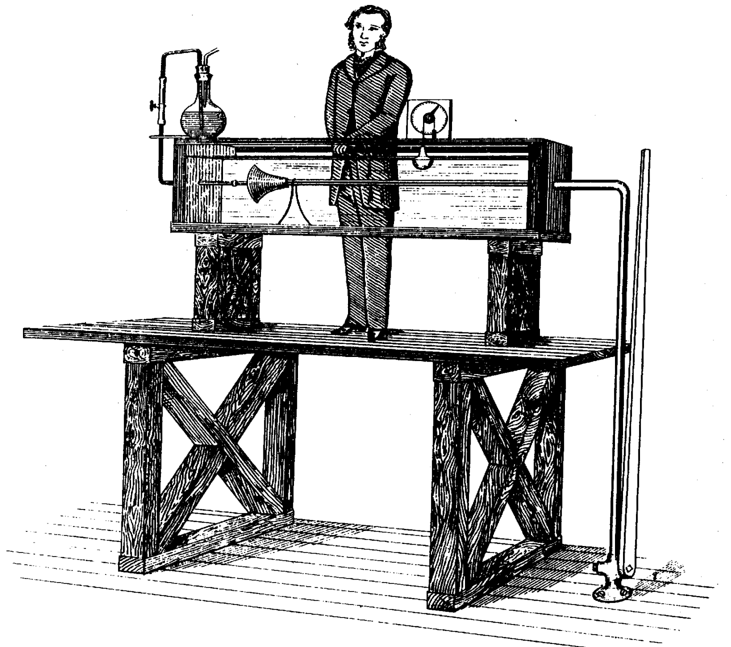
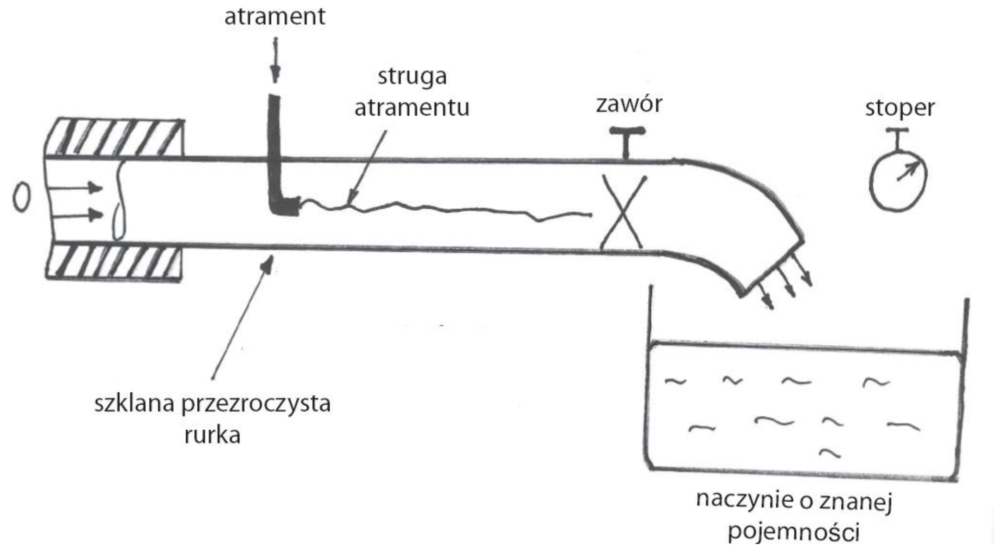
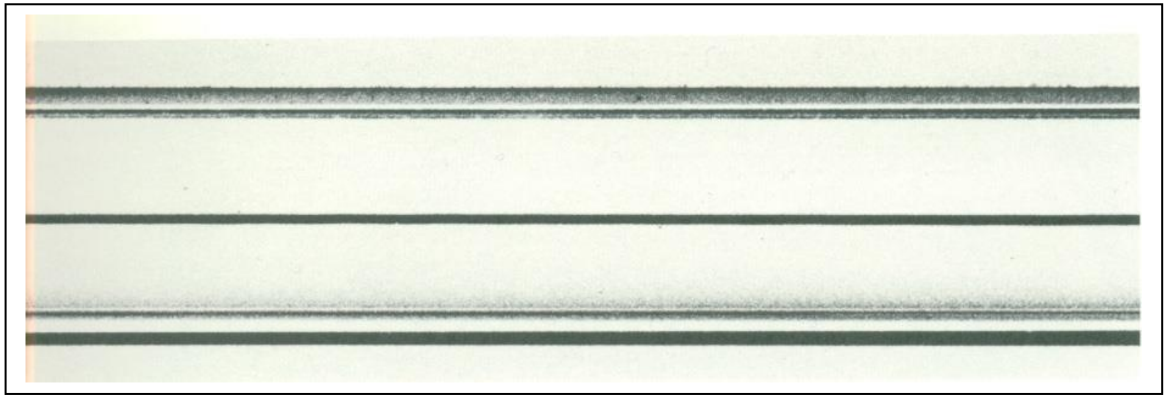


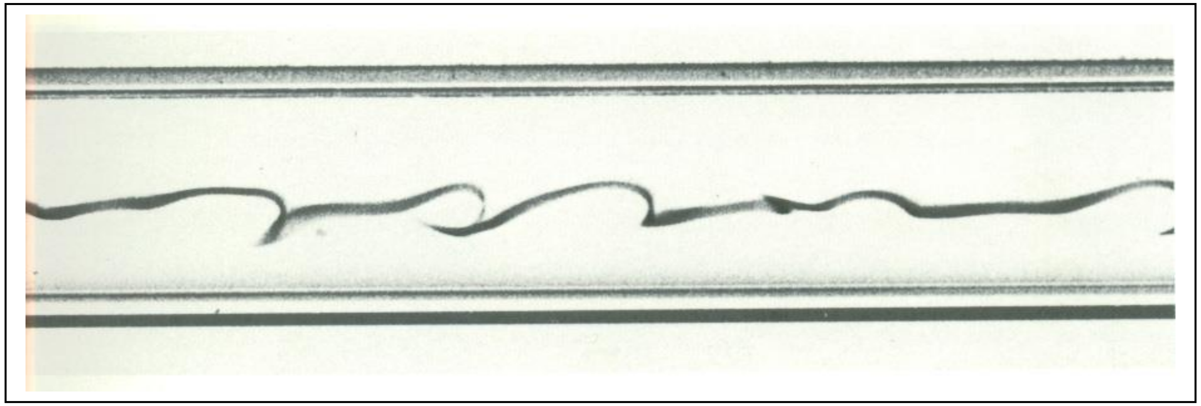
Fig. 9.1. Sketch of Reynolds's dye experiment, taken from his 1883 paper



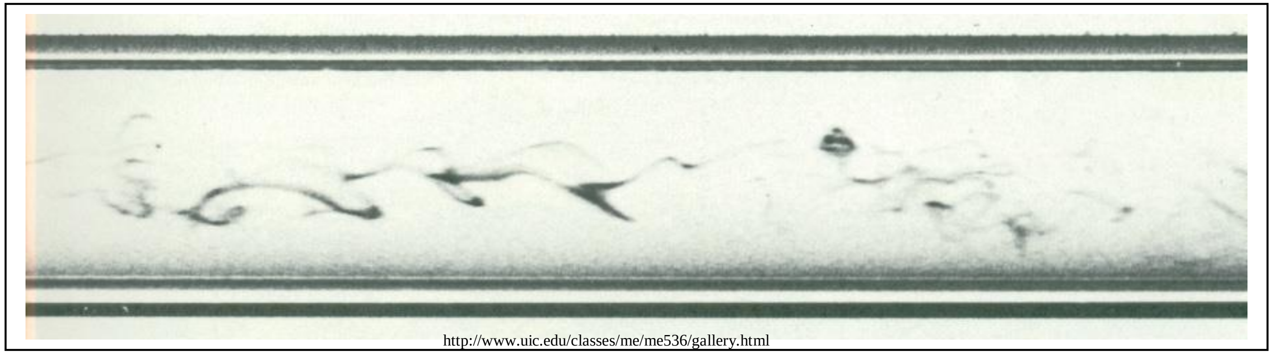
Ruch powolny (laminarny). Struga zachowuje swoją integralność na długim odcinku rury.



Ruch szybszy (przejściowy). Pojawiły się składowe poprzeczne w polu prędkości, ruch nie jest już stacjonarny. Struga jest nadal widoczna, ale przybiera bardziej złożony (pofalowany, skręcony) i zmienny kształt.

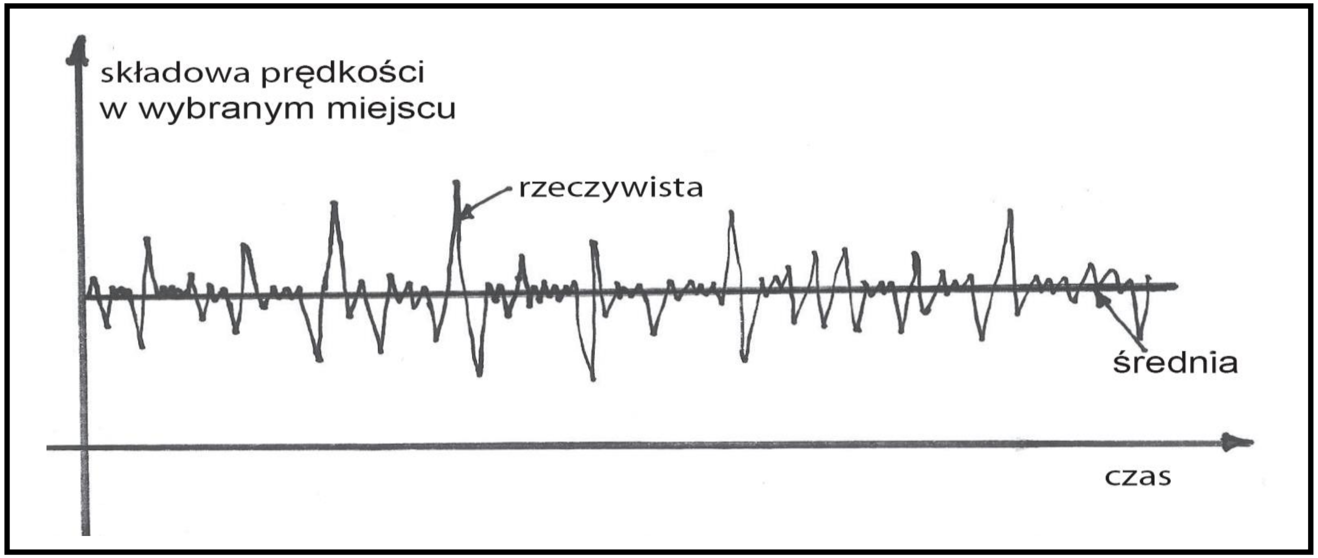


Ruch szybki (turbulentny, burzliwy). Występują silne, chaotyczne fluktuacje pola prędkości. Pojawia się efekt mieszania – struga atramentu natychmiast traci integralność i cząstki atramentu przemieszczają się po całej objętości rury.



http://www.uic.edu/classes/me/me536/gallery.html

W ruchu burzliwym zachodzą znaczące chaotyczne (quasi-losowe) zmiany prędkości.

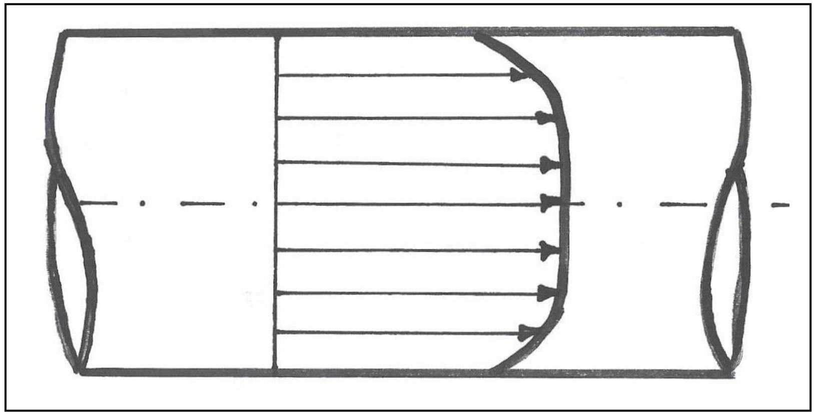


RUCH LAMINARNY I TURBULENTNY

Ruch powolny, bez pulsacji prędkości nazywa się ruchem laminarnym. W ruchu tym wymiana masy, pędu i energii zachodzi na drodze molekularnej. Dla takiego ruchu w rurze możemy korzystać ze wzoru Hagena – Poiseiuille'a.

Ruch szybki, dla którego zachodzą znaczące losowe zmiany prędkości, a między sąsiednimi warstwami płynu zachodzi wymiana masy, pędu i energii na drodze wymiany elementów płynu to ruch turbulentny

Profil prędkości średniej w rurze dla ruchu turbulentnego



$$w(r) \cong w_{\max}[1-(r/R)^n]\ ,\ n \approx 7 \div 8$$

$$Q = \frac{\pi n}{n+2} w_{\max} R^2 \ \Rightarrow \ w_{sr} = \frac{n}{n+2} w_{\max}$$

SPADEK CIŚNIENIA WZDŁUŻ DŁUGIEJ RURY O PRZEKROJU KOŁOWYM

Spadek ciśnienia w przepływie rozwiniętym wzdłuż długiego prostoliniowego przewodu o stałym przekroju zależy od liczby Reynoldsa oraz jakości powierzchni wewnętrznej (chropowatości) tego przewodu.

Formuła Darcy'ego-Weisbacha

$$\boxed{\Delta p = \tfrac{1}{2}\lambda(\mathrm{Re}, \bar{s})\rho w_{sr}^2 \frac{L}{D}}$$

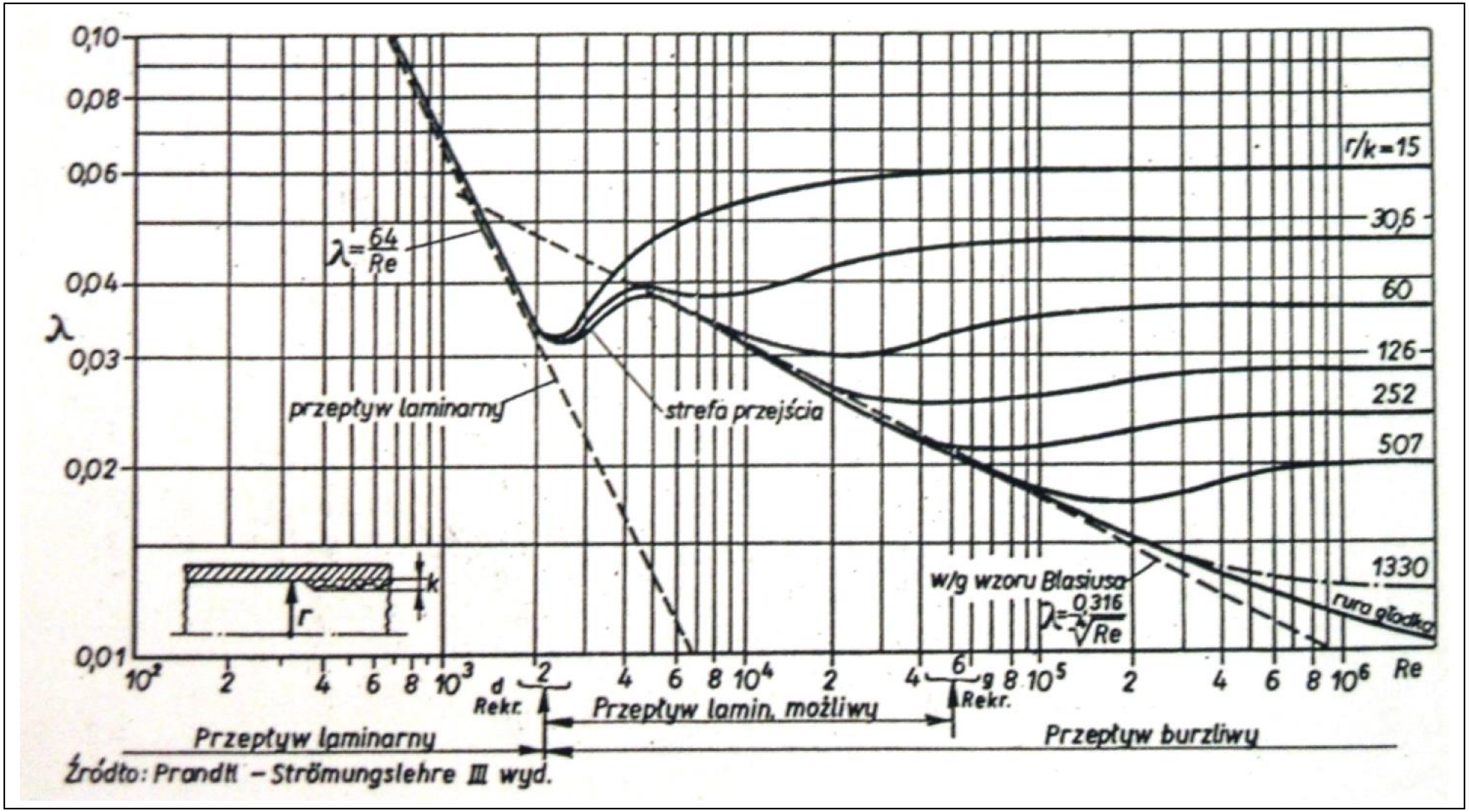
gdzie

$\mathrm{Re} = \dfrac{w_{sr} D}{\nu}$ **- liczba Reynoldsa,** $w_{sr} = \dfrac{4Q}{\pi D^2}$ **- prędkość średnia**

$\bar{s} = \dfrac{s}{D}$ **- względna chropowatość ściany przewodu.**

Dla ruchu laminarnego (Hagena-Poiseuille'a) mamy: $\boxed{\lambda(\mathrm{Re}) = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}}$

Dla liczb Reynoldsa, przy których wzór Hagena-Poiseuille'a nie działa, wielkość współczynnika λ wyznaczono doświadczalnie. Pierwsze wyniki otrzymał NIKURADSE. Sporządził on słynny wykres …



Dla dużych liczb Reynoldsa i gładkich rur gradient ciśnienia jest

$$\boxed{G_p = \lambda(\mathrm{Re})\frac{\rho w_{sr}^2}{2}\frac{1}{D} \Rightarrow G_p \sim \lambda(\mathrm{Re})\frac{Q^2}{D^3}}$$

<u>Dla ruchu laminarnego</u> $\boxed{\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64\nu}{w_{sr} D} \Rightarrow \lambda \sim \frac{D}{Q}}$

Stąd, na ustalonym odcinku rury, w ruchu laminarnym $\boxed{\Delta p \sim \frac{Q}{D^2}}$.

W pełni rozwiniętym ruchu turbulentnym w rurze o dużej chropowatości $\lambda \approx const$**, zatem**

$$\boxed{\Delta p \sim \frac{Q^2}{D^3}}$$

Moc potrzebna do przetłoczenia wydatku Q na odcinku rury ze spadkiem ciśnienia Δp to

$$\boxed{N = Q\Delta p}$$

<u>Dla ruchu laminarnego</u> $\Rightarrow$ $$\boxed{N \sim \frac{Q^2}{D^2}}$$

<u>Dla ruchu turbulentnego (szorstka rura)</u> $\Rightarrow$ $$\boxed{N \sim \frac{Q^3}{D^3}}$$

OBLICZENIA RUROCIĄGÓW

Spadki ciśnienia wzdłuż rurociągu spowodowane są przez:

1. Przeszkody lokalne takie jak kolanka, zmiany średnicy, kryzy, zawory, filtry itp.

$$\boxed{\Delta p_{lok} = \zeta \frac{\rho w_{ref}^2}{2}}$$

ζ - współczynnik strat lokalnych charakteryzujący daną przeszkodę, wyznaczany na ogół w sposób doświadczalny

w_{ref} - prędkość odniesienia dla strat lokalnych (na ogół prędkość średnia na odcinku rury zawierającym źródło tych strat)

2. „Tarcie" płynu o ścianki , zachodzące wzdłuż odcinków prostoliniowych

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho w_{sr}^2}{2} \frac{L}{D}$$

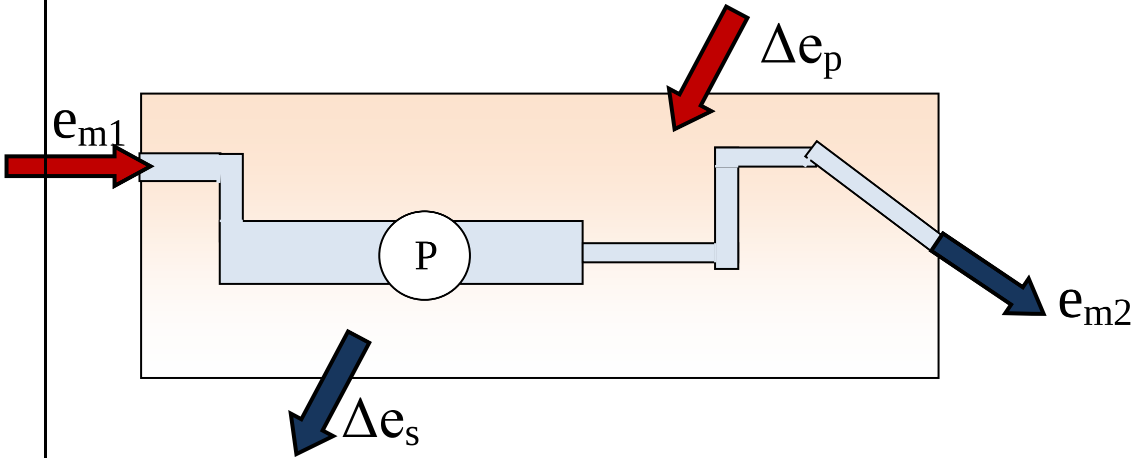
Łączny spadek ciśnienia wynika z sumowania po wszystkich odcinkach rurociągu i wszystkich źródłach strat lokalnych

$$\Delta p_S = \sum \lambda_k \left(\frac{\rho w_{sr}^2}{2} \right)_k \left(\frac{L}{D} \right)_k + \sum \zeta_j \left(\frac{\rho w_{ref}^2}{2} \right)_j$$

Spadek ciśnienia Δp_S **określa ubytek energii mechanicznej. Energia mechaniczna to suma energii kinetycznej, potencjalnej i ciśnienia. Dla cieczy – na mocy równania Bernoulliego otrzymamy:**

$$e_m = \tfrac{1}{2}\rho \bar{w}^2 + p + \rho g z$$

$\bar{w}$ **- oznacza prędkość średnią w przekroju przewodu.**



Bilans energii mechanicznej dla dowolnego rurociągu:

$$e_{m1} + \Delta e_p = e_{m2} + \Delta e_s$$

Δe_p **– energia dostarczana przez pompę**

Δe_s **– energia wynikająca ze strat**

Oznaczmy

$$\Delta e_P = \Delta p_P \quad , \quad \Delta e_S = \Delta p_S$$

Dostaniemy <u>bilans energii</u> w postaci **uogólnionego r-nia Bernoulliego**:

$$\boxed{\frac{\rho w_1^{\ 2}}{2} + \rho g z_1 + p_1 + \Delta p_p = \frac{\rho w_2^{\ 2}}{2} + \rho g z_2 + p_2 + \Delta p_s}$$

Otrzymane równanie, uzupełnione przez formuły określające spadki ciśnienia na długości przewodu oraz spadki lokalne, a także przez równanie ciągłości (pozwalające na obliczanie prędkości średniej w odcinkach przewodu o rozmaitej średnicy), stanowi podstawę obliczeń prostych rurociągów.

Ogólnie, mamy do czynienia z dwoma typami zadań:

- Typ 1 (zadanie projektowania): wyznaczyć wzrost ciśnienia Δp_P i moc pompy niezbędną do przetłoczenia zadanego wydatku.
- Typ 2 : obliczyć wydatek płynący w rurociągu znając ciśnienie pompy Δp_P lub moc N_P dostarczaną przez pompę dom przepływu.

<u>Zarys postępowania (szczegółowe przykłady – ćwiczenia):</u>

Zadanie typu 1 rozwiązujemy bezpośrednio. Znając wydatek jesteśmy w stanie obliczyć prędkości średnie i referencyjne. Pozwala to na określenie potrzebnych liczb Reynoldsa oraz współczynników strat „lambda” (posługujemy się – w ogólności – wykresem Nikuradsego lub jego numerycznymi aproksymacjami) i strat lokalnych. Po tych obliczeniach jedyną niewiadomą w uogólnionym r-niu Bernoulliego jest ciśnienie pompy.

Zadania typu 2 są trudniejsze. Celem obliczeń jest tym razem wyznaczenie wydatku, a więc de facto prędkości w przewodzie. Trudność polega na tym, że uogólnione r-nie Bernoulliego jest de facto nieliniowym równaniem algebraicznych ze względu na prędkości przepływu (współczynniki strat są funkcjami nieznanych a priori prędkości). Z tego powodu zadania typu 2 wymagają obliczeń iteracyjnych (metodą kolejnych przybliżeń).

<u>UWAGA:</u>

W zadaniach dotyczących przepływów przez rury gładkie posługiwać będziemy się formułą Blasiusa dla ruchu turbulentnego

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$$

dającą zadowalającą aproksymację z zakresie liczby Reynoldsa od 5 do (mniej więcej) 100 tysięcy. Istnieją lepsze i ogólniejsze formuły np. wzór Colebrooka-White'a:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2.5}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{\bar{s}}{3.7D}\right)$$

Jest on jednak uwikłany, co dodatkowo komplikuje obliczenia.