KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Wykład 2

Równanie transportu naprężeń Reynoldsa i równanie dla energii kinetycznej turbulencji

Sławomir Kubacki
slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl

Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej,
Politechnika Warszawska

lipiec, 2013

Zakres wykładu

- Przestawiony zostanie problem modelowana składowych tensora naprężeń Reynoldsa
- Wyprowadzona zostanie ogólna postać równań transportu naprężeń Reynoldsa
- Wyprowadzone zostanie ogólna postać równania różniczkowego dla energii kinetycznej turbulencji (jedno z równań stosowanych w modelach 2-równaniowych)
- Pokazane zostaną sposoby modelowania wybranych składników w równaniu transportu energii kinetycznej turbulencji .

Uśrednione w czasie równania ciągłości i pędu (płyn nieściśliwy)

Równania ciągłości i pędu dla nieściśliwego płynu newtonowskiego przyjmują postać

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_i \overline{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu \overline{S}_{ij} - \overline{u_i' u_j'}\right) \tag{2}$$

gdzie $-\overline{u_i' u_j'}$ to składowe tensora naprężeń turbulentnych

$$\tau_{ij} = -\overline{u_i' u_j'}$$

$\overline{S}_{ij}$ to składowe tensora prędkości deformacji uśrednionych

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

Układ równań (1) i (2) wymaga domknięcia.

Hipoteza Boussinesq i prosty model turbulencji

Przyjmujemy model Boussinesq

$$\tau_{ij} = -\overline{u_i' u_j'} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \qquad (3)$$

gdzie ν_t - współczynnik lepkości turbulentnej,

k=1/2(u′u′ + v′v′ + w′w′) – energia kinetyczna turbulencji.

Dla przepływu w turbulentnej warstwie przyściennej można zastosować model „drogi mieszania” (Prandtl,1925)

$$\tau_{ij} = \tau_{xy} = \nu_t \frac{dU}{dy}$$

Prandtl postulował, że wiry turbulentne zderzają się ze sobą podobnie jak cząsteczki płynu.

$$\nu_t = \ell_{mix}^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

W pewnej odległości od ściany prawdziwe jest założenie $\ell_{mix} = \kappa y$ (κ=0.41 – stała von Karmana)

Próby zdefiniowania „uniwersalnego” modelu turbulencji

Zero-równaniowy model Prandtla jest mało uniwersalny.

Definicja „drogi mieszania” zmienia się wraz ze zmianą typu przepływu.

Istnieje konieczność zdefiniowania bardziej uniwersalnego modelu turbulencji.

W praktyce taki uniwersalny model nie istnieje. Można jednak zdefiniować model bardziej uniwersalny od modelu Prandtla opartego na drodze mieszania.

Obecnie istnieje ponad 100 modeli turbulencji RANS.

Przykłady:

- modele jedno-równaniowe: Prandtl (k), Spalart-Allmaras (ν_t)
- modele dwu-równaniowe: model k-ε, k-ω
- modele cztero-równaniowe: model k-ε-v^2-f
- model transportu naprężeń Reynoldsa (5 równań – 2D, 7 równań – 3D)

Równania Naviera-Stokesa i równanie transportu naprężeń turbulentnych

Równania Naviera-Stokesa można zapisać w postaci

$$N(u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = 0 \qquad (4)$$

Mnożąc Równ. (4) przez składową fluktuacyjną prędkości i dodając do tego składnika podobny składnik ze zmienionymi indeksami i uśredniając otrzymuje się następujące równanie:

$$\overline{u_i' \mathcal{N}(u_j) + u_j' \mathcal{N}(u_i)} = 0$$

Równania Naviera-Stokesa i równanie transportu naprężeń turbulentnych

Po przekształceniach otrzymuje się

$$\overline{u_i'\left(\rho\frac{\partial u_j}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_j}-\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}\right)+u_j'\left(\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\right)}=$$

$$\begin{aligned}
= &\quad \overline{u_i'\rho\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_j'\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}}+\\
+ &\quad \overline{u_i'\rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+u_j'\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}+\\
+ &\quad \overline{u_i'\frac{\partial p}{\partial x_j}+u_j'\frac{\partial p}{\partial x_i}}+\\
- &\quad \mu\overline{\left(u_i'\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}+u_j'\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\right)}=0
\end{aligned}$$

(5)

Równania Naviera-Stokesa i równanie transportu naprężeń turbulentnych

Przyjmując za Reynoldsem

$$u_i = \overline{u}_i + u_i' \tag{6}$$

Wstawiając (6) do Równ. (5) otrzymujemy:

1. Pochodna lokalna

$$\begin{aligned}
\overline{u_i'\rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j'\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}} &= \rho\overline{u_i'\frac{\partial(\overline{u}_j + u_j')}{\partial t}} + \rho\overline{u_j'\frac{\partial(\overline{u}_i + u_i')}{\partial t}} \\
&= \rho\overline{u_i'\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial t}} + \rho\overline{u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial t}} + \rho\overline{u_j'\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}} + \rho\overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial t}} \\
&= \rho\overline{u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial t}} + \rho\overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial t}} \\
&= \rho\frac{\partial\overline{(u_i'u_j')}}{\partial t} \\
&= -\rho\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{7}$$

Równania Naviera-Stokesa i równanie transportu naprężeń turbulentnych

2. Pochodna konwekcyjna

$$
\begin{aligned}
\overline{u_i'\rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_j'\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} &= \overline{\rho u_i'(\overline{u}_k + u_k')\frac{\partial(\overline{u}_j + u_j')}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_j'(\overline{u}_k + u_k')\frac{\partial(\overline{u}_i + u_i')}{\partial x_k}} \\
&= \overline{\rho u_i'\overline{u}_k \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_i'\overline{u}_k \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_i' u_k' \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_i' u_k' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \\
&+ \overline{\rho u_j'\overline{u}_k \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_j'\overline{u}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_j' u_k' \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_j' u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \\
&= \rho\overline{u}_k \frac{\partial \overline{(u_i'u_j')}}{\partial x_k} + \rho\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u_k' \frac{\partial (u_i'u_j')}{\partial x_k}} + \rho\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \\
&= -\rho\overline{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \rho\tau_{ik}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} + \rho\frac{\partial \overline{(u_i'u_j'u_k')}}{\partial x_k} - \rho\tau_{jk}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Równania Naviera-Stokesa i równanie transportu naprężeń turbulentnych

3. Człon z gradientem ciśnienia

$$
\begin{aligned}
\overline{u'_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} &= \overline{u'_i \frac{\partial(\overline{p} + p')}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial(\overline{p} + p')}{\partial x_i}} \\
&= \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Równania Naviera-Stokesa i równanie transportu naprężeń turbulentnych

4. Składnik lepki

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu\left(u_i'\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + u_j'\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\right)} &= \mu\overline{u_i'\frac{\partial^2(\overline{u}_j + u_j')}{\partial x_k \partial x_k}} + \mu\overline{u_j'\frac{\partial^2(\overline{u}_i + u_i')}{\partial x_k \partial x_k}} \\
&= \mu\overline{u_i'\frac{\partial^2 \overline{u}_j}{\partial x_k \partial x_k}} + \mu\overline{u_i'\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_k \partial x_k}} + \\
&+ \mu\overline{u_j'\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \mu\overline{u_j'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k}} \\
&= \mu\frac{\partial^2 \overline{(u_i' u_j')}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \\
&= -\mu\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Ogólna postać równania transportu naprężeń turbulentnych

Wstawiając Równ. (7-10) do Równ. (5) otrzymuje się równanie transportu naprężeń Reynoldsa (turbulentnych)

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + 2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \overline{\frac{u_i'}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{\frac{u_j'}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_j' u_k'}\right].$$

Przyjmując następujące podstawienia

$$\overline{\frac{u_i'}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}} = \frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(p' u_i')} - \overline{\frac{p'}{\rho}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$

$$\overline{\frac{u_j'}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}} = \frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}(p' u_j')} - \overline{\frac{p'}{\rho}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}$$

Ogólna postać równania transportu naprężeń turbulentnych

Otrzymujemy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = \boxed{-\tau_{ik}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + 2\nu\,\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} - \frac{1}{\rho}\,\overline{p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{1}{\rho}\overline{p'u'_i}\delta_{jk} + \frac{1}{\rho}\overline{p'u'_j}\delta_{ik}\right]. \qquad (11)$$

Znaczenie fizyczne poszczególnych składników Równ. (11)

1. Produkcja naprężeń turbulentnych. Związana jest przede wszystkim z największymi (wielkoskalowymi) strukturami występującymi w przepływie turbulentnym. Generacja składowych tensora naprężeń Reynoldsa jest wynikiem występowania w przepływie lokalnych zmian prędkości średniej. Składnik ten nie wymaga domknięcia (modelowania).

Ogólna postać równania transportu naprężeń turbulentnych

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \boxed{2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}} - \frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_j' u_k'} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u_i'} \delta_{jk} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u_j'} \delta_{ik} \right]. \qquad (11)$$

Znaczenie fizyczne poszczególnych składników Równ. (11) c.d.

2. Dyssypacja naprężeń turbulentnych. Składnik odpowiadający za rozproszenie energii najmniejszych struktur wirowych występujących w przepływie skutkujące podwyższeniem energii wewnętrznej płynu. Dyssypacja musi być modelowana.

Ogólna postać równania transportu naprężeń turbulentnych

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} - \boxed{\frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_j' u_k'} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u_i'} \delta_{jk} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u_j'} \delta_{ik} \right]. \tag{11}$$

Znaczenie fizyczne poszczególnych składników Równ. (11) c.d.

3. Fluktuacje ciśnienia odpowiedzialne są za redystrybucje składowych tensora naprężeń (ang. pressure-strain term) w taki sposób aby zwiększyć izotropowość przepływu. Człon trudny do modelowania ze względu na brak wiarygodnych danych eksperymentalnych.

Ogólna postać równania transportu naprężeń turbulentnych

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + 2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} - \frac{1}{\rho}\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} +$$

$$+\boxed{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \overline{u_i'u_j'u_k'} + \frac{1}{\rho}\overline{p'u_i'}\delta_{jk} + \frac{1}{\rho}\overline{p'u_j'}\delta_{ik}\right]}. \qquad (11)$$

Znaczenie fizyczne poszczególnych składników Równ. (11) c.d.

4. Transport . Poszczególne składniki opisują procesy: dyfuzji molekularnej, dyfuzji turbulentnej (transportu poprzez fluktuacje prędkości) oraz transportu będącego wynikiem fluktuacji ciśnienia. Dyfuzja turbulentna i składniki z fluktuacjami ciśnienia wymagają modelowania.

Ogólna postać równania transportu naprężeń turbulentnych

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} - \frac{1}{\rho}\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \overline{u_i'u_j'u_k'} + \frac{1}{\rho}\overline{p'u_i'}\delta_{jk} + \frac{1}{\rho}\overline{p'u_j'}\delta_{ik}\right]. \tag{11}$$

- W zagadnieniach 3D należy rozwiązać 6 równań (duży koszt)
- Trudności w modelowaniu niektórych składników Równ. (11) – mogące prowadzić do trudności w uzyskaniu zbieżności procesu iteracyjnego
- Model turbulencji oparty na Równ. (11) nazywany jest modelem RSM – Reynolds Stress Model (model drugiego rzędu – nie ma konieczności stosowania aproksymacji Boussinesq)

W wielu zagadnieniach inżynierskich stosowanie modelu RSM jest ciągle zbyt kosztowne obliczeniowo .

Istnieje konieczność uproszczenia tego modelu.

Ogólna postać równania różniczkowego dla energii kinetycznej turbulencji

Równanie transportu energii kinetycznej turbulencji uzyskuje się dokonując kontrakcji Równ. (11). W tym celu przyjmuje się indeksy i=j=1,2 i 3 w Równ. (11) i sumuje się otrzymane trzy równania stronami.

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_k} = -2\tau_{1k} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_k} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_1'}{\partial x_k} \frac{\partial u_1'}{\partial x_k}} - \frac{2}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1} \right)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_k} + \overline{u_1' u_1' u_k'} + \frac{2}{\rho} \overline{p' u_1'} \delta_{1k} \right].$$

$$+$$

$$\frac{\partial \tau_{22}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_k} = -2\tau_{2k} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_k} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_2'}{\partial x_k} \frac{\partial u_2'}{\partial x_k}} - \frac{2}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u_2'}{\partial x_2} \right)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_k} + \overline{u_2' u_2' u_k'} + \frac{2}{\rho} \overline{p' u_2'} \delta_{2k} \right].$$

$$+$$

Ogólna postać równania różniczkowego dla energii kinetycznej turbulencji

$$+$$

$$\frac{\partial \tau_{33}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_k} = -2\tau_{1k}\frac{\partial \overline{u}_3}{\partial x_k} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_3'}{\partial x_k}\frac{\partial u_3'}{\partial x_k}} - \frac{2}{\rho}\overline{p'\left(\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}\right)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_k} + \overline{u_3' u_3' u_k'} + \frac{2}{\rho}\overline{p' u_3'}\delta_{3k}\right].$$

$$=$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}) + \overline{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}) = -2\left(\tau_{1k}\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_k} + \tau_{2k}\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_k} + \tau_{3k}\frac{\partial \overline{u}_3}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ 2\nu\left(\overline{\frac{\partial u_1'}{\partial x_k}\frac{\partial u_1'}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_2'}{\partial x_k}\frac{\partial u_2'}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_3'}{\partial x_k}\frac{\partial u_3'}{\partial x_k}}\right) + 0 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}) + \overline{u_1' u_1' u_k'} + \overline{u_2' u_2' u_k'} + \overline{u_3' u_3' u_k'} +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\rho}\left(\overline{p' u_1'}\delta_{1k} + \overline{p' u_2'}\delta_{2k} + \overline{p' u_3'}\delta_{3k}\right)\right]. \qquad (12)$$

Ogólna postać równania różniczkowego dla energii kinetycznej turbulencji

Zero w Równ (12) jest wynikiem uwzględniania równania ciągłości dla składowych fluktuacyjnych prędkości

$$\partial u_1'/\partial x_1 + \partial u_2'/\partial x_2 + \partial u_3'/\partial x_3 = 0$$

Przyjmując definicję energii kinetycznej turbulencji

$$k = \frac{1}{2}(u_1'u_1' + u_2'u_2' + u_3'u_3') = -\frac{1}{2}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \Rightarrow (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = -2k$$

Otrzymuje się równanie różniczkowe opisujące proces konwekcji, produkcji, dyssypacji i dyfuzji (transportu turbulentnego) energii kinetycznej turbulencji

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \tau_{ik}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - \nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu\frac{\partial k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'u_k'} - \frac{1}{\rho}\overline{p'u_k'}\right] \qquad (13)$$

Ogólna postać równania różniczkowego dla energii kinetycznej turbulencji

W Równ. (13) produkcja energii kinetycznej turbulencji (pierwszy składnik na prawej stronie) jest modelowana z wykorzystaniem hipotezy Boussinesq (3):

$$P_k \equiv 2\nu_t \bar{S}_{ik} \partial \bar{u}_i / \partial x_k = 2\nu_t \bar{S}_{ik} \bar{S}_{ik} \qquad (14)$$

Drugi składnik po prawej reprezentuje dyssypację energii kinetycznej turbulencji

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}$$

W modelach 2-równaniowych dyssypacja ε jest otrzymywana (pośrednio lub bezpośrednio) na podstawie rozwiązania 2 równania różniczkowego.

Ogólna postać równania różniczkowego dla energii kinetycznej turbulencji

Drugi i trzeci człon w nawiasie w Równ. (13) opisują procesy transportu turbulentnego i dyfuzji ciśnienia i zazwyczaj są modelowane przy pomocy hipotezy gradientowej:

$$-\frac{1}{2}\overline{u_i' u_i' u_k'} - \frac{1}{\rho}\overline{p' u_k'} = \frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_k} \tag{15}$$

gdzie σ_k jest pewną stałą modelu (zazwyczaj wynosi ona 1, patrz jeden z kolejnych wykładów). Na podstawie Równ. (14) i (15) można zapisać Równ. (13) w postaci:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = P_k - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_k}\right] \tag{16}$$

Jak wspomniano ε w Równ. (16) otrzymuje się na podstawie rozwiązania kolejnego równania transportu (następny wykład).