KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Wykład 1

Uśrednianie Reynoldsa i uśrednianie Favre dla równań Naviera-Stokesa

Sławomir Kubacki
slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl

Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej,
Politechnika Warszawska

lipiec, 2013

Zakres wykładów

- Metody RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) : 6 wykładów
- Symulacje przepływów turbulentnych (Direct Numerical Simulation, DNS) i Metoda Symulacji Wielkich Wirów (Large Eddy Simulation, LES) : 4 wykłady
- Metody hybrydowe RANS/LES : 3 lub 4 wykłady

13 -14 wykładów (2h)

Na 15 spotkaniu kolokwium z wykładu (teoria)

Sprawdzanie stanu wiedzy na wybranych wykładach

7 spotkań laboratoryjnych (2h)

Literatura:

1. D.C. Wilcox, Turbulence Modelling for CFD
2. S.B. Pope, Turbulent flows
3. P.Durbin, B.A. Pettersson Reif, Statistical theory and modeling for turbulent flows

Turbulencja i jej cechy

“Observe the motion of the surface of the water, which resembles that of hair, which has two motions, of which one is caused by the weight of the hair, the other by the direction of the curls; thus the water has eddying motions, one part of which is due to the principal current, the other to random and reverse motion.”

Szkice struktur wirowych wykonane przez Leonardo da Vinci (1452-1519)

Turbulencja i jej cechy

Cebeci i Smith (1974) :

Turbulencja charakteryzuje się występowaniem zjawisk o bardzo szerokim zakresie skal przestrzennych

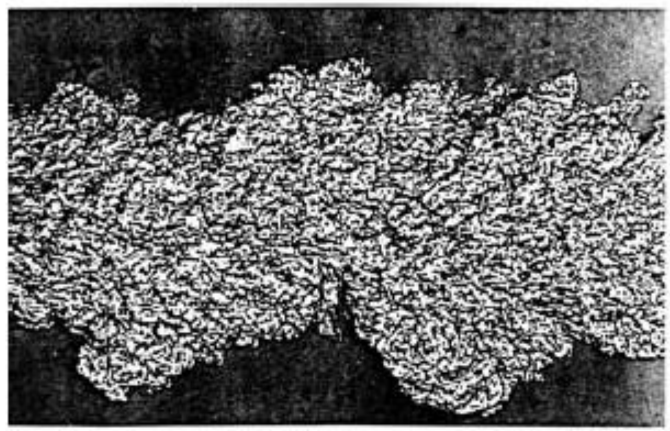
- W przepływach wewnętrznych skale duże są porównywalne z rozmiarem obiektu L: 10-20% L
- Skale najmniejsze (skale Kołmogorowa) mogą stanowić 1/10000 grubości warstwy przyściennej δ

Hinze (1975):

Turbulentny ruch przepływu charakteryzuje się występowaniem zarówno wolno- jak i szybkozmiennych (losowych) fluktuacji pewnych wielkości fizycznych

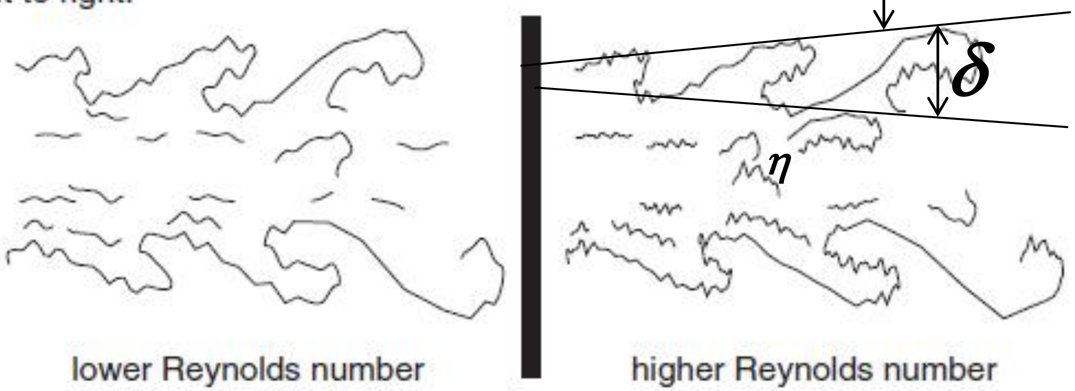
„Losowość" wynika z definicji warunków początkowych i/lub brzegowych.

Przepływ za pociskiem i charakterystyczne skale turbulencji



Turbulent wake behind a bullet, visualized by Schlireren photography (Corrsin and Kisler, 1954).
Flow is from left to right.

Skale największe mają rozmiary porównywalne z grubością warstwy ścinającej δ



Równania zachowania masy, pędu i energii

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f} + \nabla.\boldsymbol{\tau}_{\mu} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla.(\rho E \mathbf{u}) + \nabla.(p \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f}.\mathbf{u} + \nabla.(\boldsymbol{\tau}_{\mu}.\mathbf{u}) - \nabla.\mathbf{q} + Q$$

gdzie:

ρ - gęstość,

p – ciśnienie,

E – energia całkowita (e + 1/2**u.u**)

Q – energia pochodząca od reakcji chemicznych i in. procesów

u – wektor prędkości

q – wektor strumienia ciepła

f – wektor sił zewnętrznych działających na układ (np. siła grawitacji)

$\boldsymbol{\tau}_{\mu}$ - tensor naprężeń ścinających płynu (lepkich)

Równania energii

Równanie energii można zapisać również w postaci :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla.(\rho H\mathbf{u}) = \rho\mathbf{f}.\mathbf{u} + \nabla.(\boldsymbol{\tau}_{\mu}.\mathbf{u}) - \nabla.\mathbf{q} + Q \qquad (3)$$

gdzie:

E – energia całkowita (e + 1/2**u.u**)

H – entalpia całkowita (H=h+1/2**u.u**) lub (H=E+p/ρ), h entalpia (h=e+p/ρ)

Q – energia pochodząca od reakcji chemicznych i in. procesów

q – wektor strumienia ciepła

f – wektor sił zewnętrznych działających na układ (np. siła grawitacji)

$\boldsymbol{\tau}_{\mu}$ - tensor naprężeń ścinających płynu (lepkich)

Równania konstytutywne

- Linowa zależność między składowymi tensora naprężeń stycznych a składowymi tensora prędkości deformacji (płyn newtonowski)

$$\boldsymbol{\tau}_{\mu} = 2\mu\boldsymbol{\gamma}$$

Odejmujemy składnik $1/3S_{kk}\delta_{ij}$ w celu wyeliminowania wpływu składowych normalnych tensora prędkości deformacji na tensor naprężeń stycznych.

(4)

gdzie

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S} - \tfrac{1}{3}\{\mathbf{S}\}\mathbf{I}$$

składowe tensora prędkości deformacji $S_{ij}=1/2(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)$,

{ } oznacza sumę składników na diagonalnej tensora **S**,

I - macierz jednostkowa.

- Wektor gęstości strumienia ciepła **q** wyznaczany jest w oparciu o gradient temperatury T i współczynnik przewodzenia ciepła k (prawo Fouriera)

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

Strumień **q** można też wyrazić w postaci

$$\mathbf{q} = -\frac{\mu}{Pr}\nabla h \qquad (5)$$

gdzie Pr to liczba Prandtla ($Pr=\mu c_p/k$, $dh=c_p dT$)

Równania zachowania masy i pędu (płyn nieściśliwy)

Dla nieściśliwego płynu newtonowskiego (ρ=const) Równ. (1 i 2) przyjmują postać

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho}\tau_{\mu,ij}\right)$$

lub przyjmując (4)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu S_{ij}\right) \qquad (7)$$

gdzie

ν - współczynnik lepkości kinematycznej,

$S_{ij}=1/2(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)$

Uśrednianie w czasie

Chwilową składową prędkości $u_i(\mathbf{x}, t)$ wyraża się jako sumę prędkości średniej i składowej fluktuacyjnej

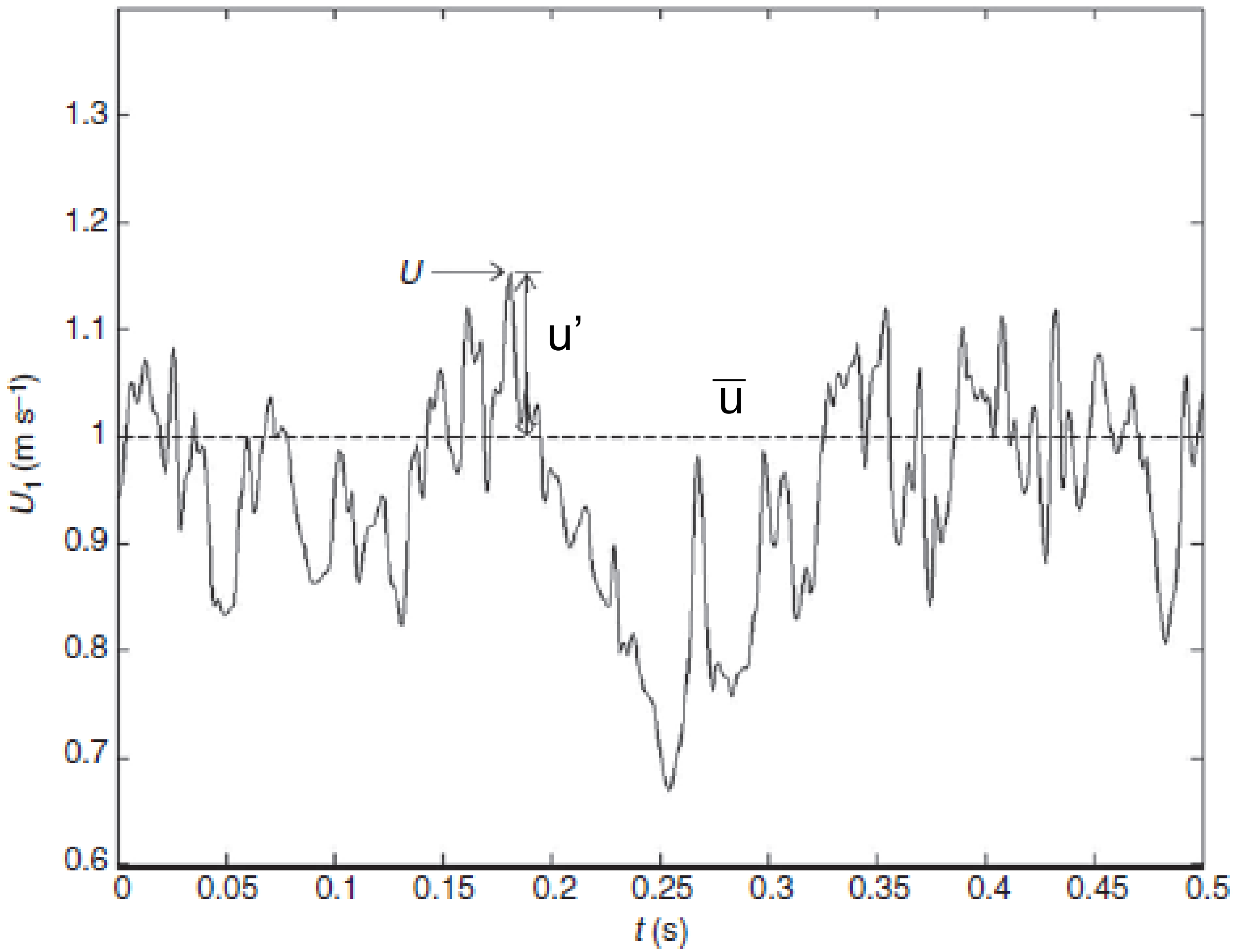
$$u_i(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_i(\mathbf{x}) + u_i'(\mathbf{x}, t) \tag{8}$$

gdzie prędkość średnia jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(\mathbf{x}, t) dt \tag{9}$$

T oznacza czas (okno) uśredniania. Czas T musi być wystarczająco długi w porównaniu ze skalą czasową modelowanych fluktuacji pola prędkości.

Uśrednianie w czasie

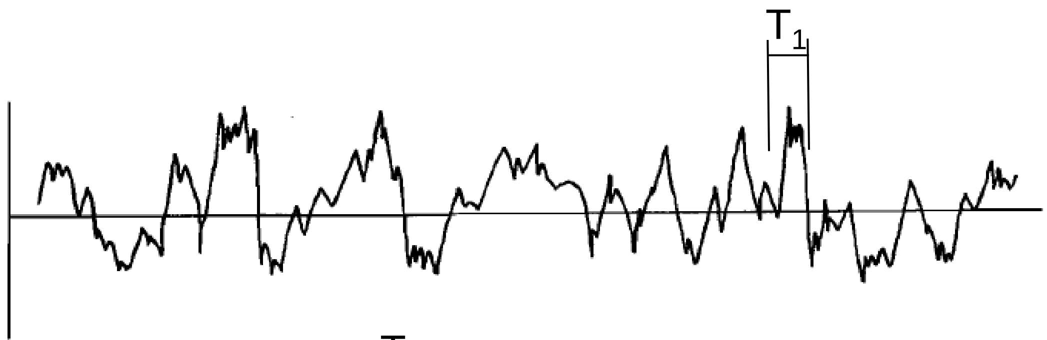


$$u_i(\mathbf{x}, t) = \overline{u}_i(\mathbf{x}) + u_i'(\mathbf{x}, t)$$

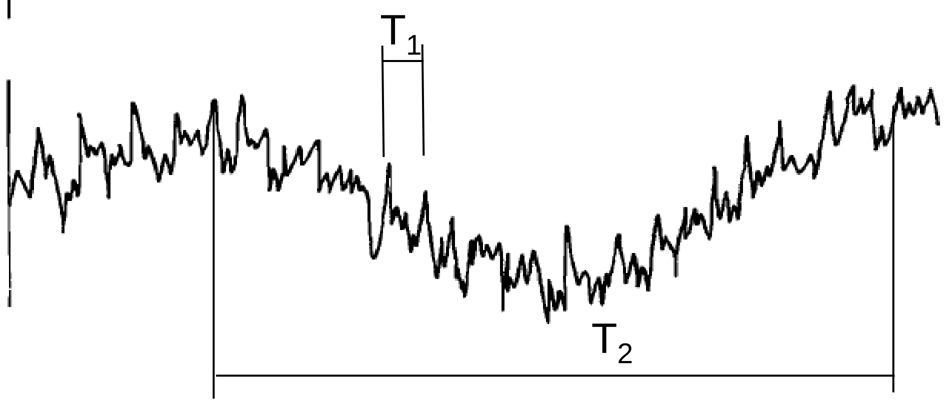
Przykłady sygnałów czasowych dla których można zastosować uśrednianie w czasie

Skale czasowe związane z fluktuacjami turbulentnymi T_1 (modelowane) muszą być mniejsze od skali czasowej uśredniania T i skali czasowej T_2 związanej z przepływem głównym

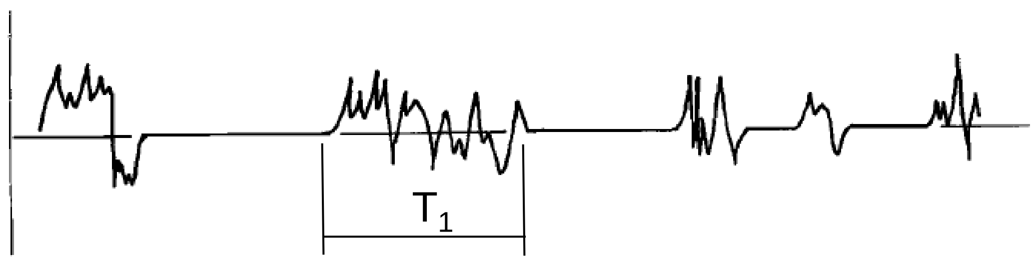
$$\bar{u}_i(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u_i(\mathbf{x},t)\,dt$$



Losowe fluktuacje turbulentne (T_2,T→∞)



Periodyczne zaburzenia + fluktuacje turbulentne ($T<T_2$)



Przepływ intermitentny (częściowo turbulentny i częściwo laminarny) ($T_{2,}$T→∞)

Uśrednianie w czasie

Własności operacji uśredniania w czasie:

- uśrednienie wcześniej uśrednionej prędkości daje prędkość średnią

$$\overline{\overline{u}}_i(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\overline{u}_i(\mathbf{x})dt = \overline{u}_i(\mathbf{x}) \qquad (10)$$

- uśrednienie w czasie składowej fluktuacyjnej prędkości daje zero

$$\overline{u'_i}(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[u_i(\mathbf{x},t) - \overline{u}_i(\mathbf{x})]dt = \overline{u}_i(\mathbf{x}) - \overline{\overline{u}}_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad (11)$$

Uśrednianie w czasie

Pozostałe istotne własności operacji uśredniania

- Filtr czasowy jest liniowy $\overline{(\xi+\psi)} = \overline{\xi} + \overline{\psi}$ (przykładowo filtr oparty na medianie nie jest liniowy)

- Operacja uśredniania komutuje (jest przemienna) z operacją różniczkowania względem współrzędnych przestrzennych.

$$\overline{\frac{\partial \xi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial x_i} \quad \text{natomiast zakłada się że} \quad \overline{\frac{\partial \xi}{\partial t}} \cong \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial t}$$

- „Nieczułość” na kolejne uśrednianie (Równ. 10) dotyczy również iloczynu dwóch wielkości uśrednionych (ta własność nie dotyczy uśredniania w przestrzeni)

$$\overline{\overline{\xi}\,\overline{\psi}} = \overline{\xi}\,\overline{\psi}$$

$$\overline{\overline{\xi}\,\overline{\psi'\zeta'}} = \overline{\xi}\,\overline{\psi'\zeta'}$$

Uśrednianie w czasie

Pozostałe istotne własności operacji uśredniania

- Średnia iloczynu wielkości średniej i składowej fluktuacyjnej jest zero ponieważ średnia składowej fluktuacyjnej wynosi zero (Równ. 11)

$$\overline{\bar{\xi}\psi'} = 0$$

$$\overline{\bar{\xi}\bar{\psi}\zeta'} = 0$$

- Wielkości ξ' i ψ' są skorelowane. Oznacza to, że średnia iloczynu tych wielkości nie jest równa zero

$$\overline{\xi'\psi'} \neq 0 \qquad (12)$$

Uśrednianie w czasie

W pierwszej kolejności, analizie poddamy iloczyn u_iu_j w równaniu pędu (7).

Przyjmujemy za Reynoldsem

$$u_i(\mathbf{x},t) = \overline{u}_i(\mathbf{x}) + u'_i(\mathbf{x},t)$$

Po uśrednieniu otrzymujemy

$$\overline{u_iu_j} = \overline{\left(\overline{u}_i + u'_i\right)\left(\overline{u}_j + u'_j\right)} = \overline{\overline{u}_i\,\overline{u}_j} + \overset{0}{\cancel{\overline{\overline{u}_i u'_j}}} + \overset{0}{\cancel{\overline{u'_i\,\overline{u}_j}}} + \overline{u'_iu'_j}$$

$$\overline{u_iu_j} = \overline{\left(\overline{u}_i + u'_i\right)\left(\overline{u}_j + u'_j\right)} = \overline{u}_i\,\overline{u}_j + \overline{u'_iu'_j}$$

dodatkowy składnik wynika z nieliniowości członów konwekcyjnych w równaniach pędu

Uśrednione w czasie równania ciągłości i pędu (płyn nieściśliwy)

Działając operatorem uśredniania na Równ (6) i (7) otrzymuje się

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu \bar{S}_{ij} - \overline{u_i' u_j'}\right) \tag{14}$$

gdzie $-\overline{u_i' u_j'}$ oznaczają składowe tensora naprężeń turbulentnych

$$\tau_{ij} = -\overline{u_i' u_j'} = \begin{bmatrix} -\overline{u_1' u_1'} & -\overline{u_1' u_2'} & -\overline{u_1' u_3'} \\ -\overline{u_2' u_1'} & -\overline{u_2' u_2'} & -\overline{u_2' u_3'} \\ -\overline{u_3' u_1'} & -\overline{u_3' u_2'} & -\overline{u_3' u_3'} \end{bmatrix}$$

Tensor τ jest tensorem symetrycznym $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. $\bar{S}_{ij}$ oznaczają składowe tensora prędkości deformacji uśrednionych

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

Równanie (14) wymaga domknięcia

Uśrednione w czasie dla równania ciągłości zapisanego dla płynu ściśliwego

Stosując uśrednianie Reynoldsa do Równ. (1) (płyn ściśliwy) otrzymujemy

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u_i}}{\partial x_i} = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{(\overline{\rho} + \rho')(\overline{u_i} + u_i')}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\,\overline{u_i} + \overline{\rho' u_i'}\right) = 0 \qquad (16)$$

pojawia się dodatkowy składnik wymagający domknięcia

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre

Dla płynu ściśliwego wygodniej jest przyjąć uśrednianie pędu zamiast uśredniania samej prędkości

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \rho(\mathbf{x},t)\, u_i(\mathbf{x},t)\, dt}{\overline{\rho}} = \frac{\overline{\rho u_i}}{\overline{\rho}} \tag{17}$$

gdzie $\overline{\rho}$ oznacza uśrednione w czasie pole gęstości.

Zastosowanie Równ. (17) do pola prędkości u_i w Równ. (1) pozwala otrzymać

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_i\right) = 0 \tag{18}$$

postać równania jak dla przepływu laminarnego

Na podstawie Równ. (16) i (18) otrzymujemy związek

$$\overline{\rho}\,\overline{u}_i + \overline{\rho' u_i'} = \overline{\rho}\tilde{u}_i \tag{19}$$

Uśrednianie Reynoldsa dla składowej fluktuacyjnej u″

Prędkość u_i można wyrazić jako sumę prędkości średniej (wg. Favre) i składowej fluktuacyjnej

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \qquad (20)$$

Uśredniając Równ. (20) stosując metodę Reynoldsa

$$\overline{u_i''} = \overline{u_i} - \overline{\tilde{u}_i} \qquad (21)$$

Składnik $\overline{\tilde{u}_i}$ można wyeliminować z pomocą Równ. (19). Otrzymujemy

$$\tilde{u}_i = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}}\tilde{u}_i = \frac{\overline{\rho}\,\overline{u}_i + \overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} = \overline{u}_i + \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}}$$

$$\overline{\tilde{u}}_i = \left(\overline{\overline{u}_i}\right) + \overline{\left(\frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}}\right)} = \overline{u}_i + \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}}$$

Wstawiając powyższą zależność do Równ. (21)

$$\overline{u_i''} = \overline{u_i} - \overline{u}_i - \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} = -\frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} \neq 0$$

składowa fluktuacyjna prędkości u″ uśredniona w czasie nie jest równa zeru

Uśrednianie Reynoldsa dla składnika $\rho u''$

Mnożąc Równ. (20) przez gęstość i uśredniając:

$$\rho u_i = \rho \tilde{u}_i + \rho u_i''$$

$$\overline{\rho u_i} = \overline{\rho \tilde{u}_i} + \overline{\rho u_i''}$$

$$\boxed{\overline{\rho u_i''} = 0}$$

Mnożąc Równ. (17) przez gęstość i uśredniając

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \frac{\overline{\rho u_i}}{\overline{\rho}}$$

$$\rho \tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \rho \frac{\overline{\rho u_i}}{\overline{\rho}}$$

$$\overline{\rho \tilde{u}_i} = \overline{\rho \frac{\overline{\rho u_i}}{\overline{\rho}}} = \overline{\rho u_i}$$

„Fluktuacja pędu” (iloczyn gęstości i składowej fluktuacyjnej prędkości u″) jest równa zeru. (Podobnie jak dla klasycznego uśredniania Reynoldsa średnia ze składowej fluktuacyjnej u’ wynosi zero.)

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre - składnik $\rho\xi\psi$

Zastosowanie uśredniania Favre do dowolnego iloczynu funkcji ξ i ψ i gęstości ρ

$$\overline{\rho\xi\psi} = \overline{\rho\left(\tilde{\xi}+\xi''\right)\left(\tilde{\psi}+\psi''\right)} = \overline{\rho\left(\tilde{\xi}\tilde{\psi}\right)} + \underbrace{\cancel{\overline{\rho\psi''}}}_{0}\tilde{\xi} + \underbrace{\cancel{\overline{\rho\xi''}}}_{0}\tilde{\psi} + \overline{\rho\xi''\psi''} \tag{22}$$

Wiedząc, że

$$\tilde{\xi} = \frac{\overline{\rho\xi}}{\overline{\rho}} \qquad \tilde{\psi} = \frac{\overline{\rho\psi}}{\overline{\rho}}$$

Składnik $\overline{\rho\left(\tilde{\xi}\tilde{\psi}\right)}$ w Równ. (22) można zapisać w postaci

$$\overline{\rho\left(\tilde{\xi}\tilde{\psi}\right)} = \overline{\rho\frac{\left(\overline{\rho\xi}\right)}{\overline{\rho}}\frac{\left(\overline{\rho\psi}\right)}{\overline{\rho}}} = \overline{\rho}\frac{\overline{\rho\xi}}{\overline{\rho}}\frac{\overline{\rho\psi}}{\overline{\rho}} = \overline{\rho\xi}\frac{\overline{\rho\psi}}{\overline{\rho}} = \overline{\rho}\tilde{\xi}\frac{\overline{\rho\psi}}{\overline{\rho}} = \tilde{\xi}\overline{\rho}\tilde{\psi} = \overline{\rho}\tilde{\xi}\tilde{\psi}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\overline{\rho\xi\psi} = \overline{\rho}\tilde{\xi}\tilde{\psi} + \overline{\rho\xi'\psi'} \tag{23}$$

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre – równanie pędu

Przyjęcie równania konstytutywnego danego związkiem (4) pozwala zapisać równanie pędu (2) w postaci

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{24}$$

gdzie składnik po prawej stronie Równ. (24) związany jest z siłami powierzchniowymi wywieranymi przez element płynu

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{\mu,ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(S_{ij} - 1/3\delta_{ij}S_{kk})$$

Zastosowanie uśredniania Favre (Równ, 17 i 23) dla prędkości (ciśnienie i gęstość uśredniane są stosując uśrednianie Reynoldsa) pozwala uzyskać równanie zachowania pędu w postaci

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{\mu,ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\rho u''_i u''_j}}{\partial x_j} \tag{25}$$

gdzie $-\overline{\rho u''_i u''_j}$ jest nieznanym tensorem naprężeń turbulentnych (<u>wymaga modelowania</u>)

Hipoteza Boussinesq i uśrednione równania pędu

Tensor naprężeń turbulentnych τ w modelach opartych na lepkości turbulentnej modeluje się wykorzystując hipotezę Boussineq

$$\bar{\rho}\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''} = 2\mu_t \bar{S}_{ij}^c - \frac{2}{3}\bar{\rho} k \delta_{ij}$$

$$\bar{S}_{ij}^c = \bar{S}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kk}\delta_{ij}$$

(26)

Odejmujemy składnik $2/3\rho k^{\delta}_{ij}$ ponieważ musi być spełniona własność $\rho\tau_{ii} = -2\rho k$

gdzie μ_t - współczynnik lepkości turbulentnej,

k=1/2($\overline{u''u'' + v''v'' + w''w''}$) – energia kinetyczna turbulencji.

Równ. (25) można więc zapisać w postaci

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \left(\bar{\rho}\tilde{u}_i \tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\tau}_{\mu,ij} + \bar{\rho}\tau_{ij}\right) \tag{27}$$

Pola energii kinetycznej turbulencji k i współczynnika lepkości turbulentnej μ_t są obliczane (pośrednio lub bezpośrednio) na podstawie rozwiązania kolejnych równań różniczkowych (kolejny wykład).

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre – równanie energii

Pomijając siły zewnętrzne i zewnętrzne źródła energii równanie (3) można zapisać w postaci

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_j H}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i \tau_{\mu,ij}}{\partial x_j}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

lub w postaci

$$\frac{\partial\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}u_i u_i\right)\right]}{\partial t}+\frac{\partial\left[\rho u_j\left(h+\frac{1}{2}u_i u_i\right)\right]}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i \tau_{\mu,ij}}{\partial x_j}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} \qquad (28)$$

Dla gazu idealnego Równ. (28) jest uzupełnione równaniem stanu

$$p=\rho R T \qquad (29)$$

gdzie R – uniwersalna stała gazowa.

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre – równanie energii

Dla gęstości, ciśnienia i strumienia ciepła stosuje się klasyczne uśrednianie w czasie

$$\rho = \overline{\rho} + \rho'$$
$$p = \overline{p} + p' \tag{30}$$
$$q_j = \overline{q_j} + q'_j$$

Pozostałe wielkości uśrednia się stosując metodę Favre

$$u_j = \tilde{u}_j + u''_j$$
$$h = \tilde{h} + h'' \tag{31}$$
$$e = \tilde{e} + e''$$
$$T = \tilde{T} + T''$$

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre – równanie energii

Składnik $1/2\rho u_j u_i u_i$ (pochodna konwekcyjna) można zapisać w postaci

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overline{\rho u_j u_i u_i} &= \frac{1}{2}\overline{\rho\left(\tilde{u}_j + u_j''\right)\left(\tilde{u}_i + u_i''\right)\left(\tilde{u}_i + u_i''\right)} = \\
&= \frac{1}{2}\overline{\rho\tilde{u}_j\tilde{u}_i\tilde{u}_i} + \cancelto{0}{\overline{\rho\tilde{u}_j u_i''\tilde{u}_i}} + \frac{1}{2}\overline{\rho\tilde{u}_j u_i'' u_i''} + \frac{1}{2}\cancelto{0}{\overline{\rho u_j''\tilde{u}_i\tilde{u}_i}} + \overline{\rho u_j'' u_i''\tilde{u}_i} + \frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} = \\
&= \frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_i\tilde{u}_i + 0 + \bar{\rho}\tilde{u}_j\underbrace{\frac{1}{2}\overline{u_i'' u_i''}}_{k} + 0 + \tilde{u}_i\underbrace{\overline{\rho u_i'' u_j''}}_{-\rho\tau_{ij}} + \frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} = \qquad (32) \\
&= \frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_i\tilde{u}_i + \bar{\rho}\tilde{u}_j k - \tilde{u}_i\rho\tau_{ij} + \frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} = \\
&= \underbrace{\tilde{u}_j\left(\frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_i + \bar{\rho}\tilde{u}_j k\right)}_{1^*} \underbrace{- \tilde{u}_i\rho\tau_{ij} + \frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}_{2^*}
\end{aligned}
$$

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre – równanie energii

Równ. (28) przyjmuje postać (uwzględniając Równ. 17, 20, 30-32)

$$
\frac{\partial\left[\bar{\rho}\left(\tilde{e}+\frac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i+k\right)\right]}{\partial t}+\frac{\partial\left[\overbrace{\bar{\rho}\tilde{u}_j\left(\frac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i+k\right)}^{1^*}+\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{h}\right]}{\partial x_j}=
$$

$$
=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\overline{u''_j h''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\underbrace{\rho\tilde{u}_i\tau_{ij}-\frac{1}{2}\overline{\rho u''_j u''_i u''_i}}_{2^*}\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{u}_i\bar{\tau}_{\mu,ij}+\overline{u''_j\tau_{\mu,ij}}\right)-\frac{\partial\bar{q}_j}{\partial x_j}
$$

Po uproszczeniach

$$
\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{E}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{H}\right)}{\partial x_j}=
$$

$$
=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{u}_i\left(\bar{\tau}_{\mu,ij}+\rho\tau_{ij}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{q}_j+\bar{\rho}\overline{u''_j h''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u''_j\tau_{\mu,ij}}-\frac{1}{2}\bar{\rho}\overline{u''_j u''_i u''_i}\right] \qquad (33)
$$

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre – równanie energii

Niedomknięte składniki w Równ. (33) modeluje się jak niżej

$$q_{T,j} = \overline{\bar{\rho} u_j'' h''} \cong -\frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j}$$

$$\overline{u_j'' \tau_{\mu,ij}} - \frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} \cong \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

gdzie Pr_t to turbulentna liczba Prandtla (Pr_t=0.8-0.9),

σ_k to pewna stała (współczynnik dyfuzji ~1)

Strumień ciepła (molekularny) dany jest Równ. (5)

$$q_j = -\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j}$$

Uśrednianie wg. techniki zaproponowanej przez Favre – równanie energii

Równanie energii przyjmuje postać

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{E}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{H}\right)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{u}_i\left(\bar{\tau}_{\mu,ij}+\rho\tau_{ij}\right)+\left(\frac{\mu}{Pr}+\frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial\bar{h}}{\partial x_j}+\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)$$

(34)

Dla gazu idealnego równanie to uzupełnione jest uśrednionym równaniem stanu

$$\bar{p}=\bar{\rho}R\tilde{T} \qquad (35)$$

Pełne równania RANS – dla gazu idealnego

Równania zachowania masy (18), pędu (27) i energii (34) uzupełnione równaniem stanu (35) stanowią więc pełne równania RANS

Uśrednianie Favre pozwala uzyskać prostą postać równań – zmienne u_i, ρ i E mogą być policzone z równ. (36-38) stosując standardowe procedury modelowania. (porównaj równ. 36 i 16.)

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\right) = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\tau}_{\mu,ij} + \rho\tau_{ij}\right) \tag{37}$$

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{E}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{H}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{u}_i\left(\bar{\tau}_{\mu,ij} + \rho\tau_{ij}\right) + \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) \tag{38}$$

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\tilde{T}$$

Tensor naprężeń turbulentnych τ może być modelowany przy pomocy modelu Boussinesq (26). Ciągle brakuje jednak modelu pozwalającego na wyznaczenie nieznanych pól skalarnych k i μ_t (o tym na kolejnym wykładzie)

Równania ciągłości i pędu (RANS) dla płynu nieściśliwego

Dla płynu nieściśliwego równania RANS (klasyczne uśrednianie w czasie) można zapisać w postaci (równ. 13 i 14)

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_i \overline{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho}\tau_{\mu,ij} + \tau_{ij}\right)$$

Tensor naprężeń turbulentnych τ musi być modelowany.

Dla płynu nieściśliwego równanie energii nie jest wymagane celem rozwiązania równań Naviera-Stokesa. Można jednak dodać równanie dla temperatury (równanie konwekcji -dyfuzji) celem modelowania procesu wymiany ciepła.

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{T}\overline{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}\right)$$