Podane wiadomości z aerodynamiki zostaną rozwinięte w dalszych wykładach specjalistycznych, w tym z Zaawansowanej Mechaniki Płynów, Metod Obliczeniowych Mechaniki Płynów, Maszyn Wirnikowych itp.

W dalszym ciągu Mechaniki Płynów III będziemy zajmować się **elementarną dynamiką gazów.**

Przypominamy: gaz to płyn ściśliwy. Ruch gazu i związane z nim zmiany ciśnienia implikują zmiany **stanu termodynamicznego.**(*) **Stan** termodynamiczny gazu określają dwa parametry. Trzeci - wynika z równania stanu (tzw. termicznego). Będziemy posługiwać się **równaniem Clapeyrona**

$$p = \rho R T$$

napisanego dla zmiennych intensywnych. Jak wiemy, $R = \frac{B}{\mu}$ z uniwersalną stałą gazową B ($= 8315\ \mathrm{kJ/kmol\,°K}$), a μ to masa kilomola. Dla powietrza $\mu \approx 29\ \mathrm{kg/kmol}$ i $R_{pow} \approx 287 \frac{m^2}{sek^2\,°K}$.

Stałe gazowe wiążą się z ciepłami właściwymi: $c_v = \frac{1}{k-1} R$, $c_p = k c_v = \frac{k}{k-1} R$. Wykładnik izentropy k to (liczba stopni swobody w cząsteczce + 2)/liczba stopni swobody. Dla gazów dwuatomowych $k \approx 1.4$, dla trójatomowych $\approx 1{,}33$ itd. **Jest:** $R = c_p - c_v$. Przypominamy też, że energia wewnętrzna i entalpia to odpowiednio

$$du = c_v dT, \quad di = c_p dT, \quad di = du + R dT = du + d\left(\frac{p}{\rho}\right).$$

Ważne równanie to równanie Gibbsa:

$$T ds = du + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = di - \frac{1}{\rho} dp$$

Występuje tu entropia. Pamiętamy, że w układzie izolowanym $ds \geq 0$ oraz, że

$$T ds = dq$$

z wymienionym kwazistatycznie ciepłem dq.

W poprzednim semestrze wyprowadziliśmy **równanie energii:**

$$\frac{V^2}{2} + i = const$$

Stałe obowiązuje na linii prądu. Płyn jest **nielepki i nie przewodzi ciepła.** Jest też **ruch ustalony.**
To samo równanie można napisać tak:

$$\frac{V^2}{2} + c_p T = c_p T_0, \quad \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = const, \quad \frac{V^2}{2} + k u = const$$

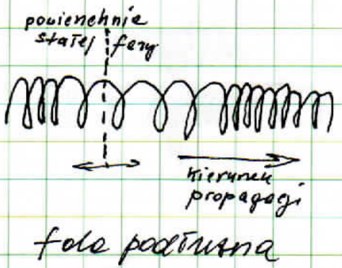
Czytelnik może wymyślić jeszcze inne postacie tego równania.
Równanie Bernoulliego jest **całką równań Eulera.**
Dla stałej entropii - gdy $ds = 0$ - równanie Bernoulliego

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = const$$

jest, z dokładnością do stałej — **tożsame** z równaniem energii. (Łatwo to dostrzec: dla $ds = 0 = di - \frac{1}{\rho} dp$ mamy $i = \int dp/\rho$). Trzeba jednak pamiętać, iż izentropowość $ds = 0$ oznacza odwracalność termodynamiczną i jest, co oczywiste, przybliżeniem.

*) Reguła faz Gibbsa: liczba stopni swobody = liczba składników − liczba faz + 2. Dla gazu: jeden składnik, jedna faza. St. swobody = 2. Ale już para mokra: jeden składnik (H_2O), dwie fazy (gaz + krople) i mamy jeden stopień swobody. (Jeśli jeszcze pojawi się faza stała — lód, to nie ma stopni swobody. Jest punkt potrójny...)

Ściśliwość gazu, przy całkowitym braku zachowania kształtu, powoduje powstawanie fal **podłużnych**.



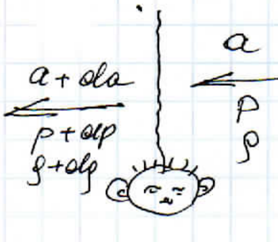
Przypominamy: fala podłużna to fala, w której kierunek rozchodzenia jest taki, jaki ma wektor prostopadły do powierzchni stałej fazy. Powierzchnia stałej fazy – to powierzchnia stałej wartości tej wielkości, która podlega falowaniu. (Fala poprzeczna: wymienione wektory są prostopadłe)

Fale ściśliwości – zmiany gęstości – są oczywiście związane ze zmianami stanu termodynamicznego, a więc zmianami ciśnienia i temperatury.

Fale dźwiękowe to fale o niewielkiej amplitudzie. Dźwięki wytwarzane przez startujący wielki samolot są falami o amplitudzie rzędu Paskala. Wyznaczymy prędkość rozchodzenia się fali ściśliwości o niewielkiej amplitudzie.

Termin "niewielka amplituda" w odniesieniu do dźwięku oznacza, iż **po przejściu fali stan** termodynamiczny **nie uległ zmianie**.

Brak zmiany stanu oznacza, że przemiana była odwracalna. A więc fala **dźwiękowa** jest przemianą **izentropową**.



Rozważmy falę dźwiękową. Umieszczamy **obserwatora** na tej fali. Zmiany w fali są znikome, tzn. **różniczkowe**. Zachowany jest strumień masy. Zachowany jest pęd. (Te założenia i odwracalności – jak pamiętamy – prowadzą do zachowania energii...)
Prędkość, jaką "widzi" obserwator to prędkość dźwięku. Oznaczamy ją a, a po zmianie $a+da$.

Równania są takie:

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da), \quad p + \rho a^2 = p + dp + (\rho + d\rho)(a + da)^2$$

Mnożymy, podnosimy do kwadratu ... itd. **Zaniedbujemy małe** wyższego rzędu.

$$\cancel{\rho a} = \cancel{\rho a} + a\,d\rho + \rho\,da + \cancel{d\rho\,da} \Rightarrow a\,d\rho + \rho\,da = 0$$

$$\cancel{p} + \cancel{\rho a^2} = \cancel{p} + dp + \cancel{\rho a^2} + 2a\rho\,da + \cancel{\rho\,da^2} + d\rho\,a^2 + \cancel{2a\,d\rho\,da} + \cancel{d\rho(da)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 2a\rho\,da + d\rho\,a^2 + dp$$

Zbierzmy równania napisane w sposób poprzedni. Wynik jest taki: $0 = dp - a^2 d\rho$
Wynika więc taki wzór (pamiętamy o odwracalności):

$$a^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s$$

Izentropowość oznacza, że $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$. Logarytmujemy i różniczkujemy: $\ln p = k \ln \rho$ i w wyniku

$$\frac{dp}{p} = k\frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s = k\frac{p}{\rho}$$

Otrzymaliśmy wzór określający prędkość dźwięku w gazie:

$$a^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s = k\frac{p}{\rho} = kRT = (k-1)i = k(k-1)u$$

Równanie energii możemy zapisać następująco:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}$$

a to prędkość dźwięku tam, gdzie prędkość wynosi $V = |\vec{V}|$, natomiast a_0 jest prędkością w gazie nieruchomym. Prędkością **dźwięku**.
Parametr ten nazywamy prędkością dźwięku w bezruchu, bo $\vec{V}$ jest zerem. Odpowiadająca mu temperatura to "**temperatura całkowita**" T_0.

Ściśliwość gazu – przy absolutnym braku zachowania kształtu – implikuje występowanie fal podłużnych.
Przypominamy: fala podłużna to fala, w której kierunek propagacji jest prostopadły do powierzchni stałej fazy.

Powierzchnie stałej fazy to – kolokwialnie – powierzchnie stałej wartości wielkości podlegającej falowaniu

Fala poprzeczna – to fala, w której kierunek propagacji jest

Elementarne przekształcenie (dzielenie przez $\frac{a^2}{k-1}$) prowadzi do równania

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = 1 + \frac{k-1}{2}\left(\frac{V}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$$

Wtedy V/a to **Liczba Macha**. Wyraża prędkość gazu mierzoną lokalną prędkością dźwięku.

Termin "**lokalna**" oznacza, że wielkość ta jest różna – może być różna – w różnych miejscach... (i chwilach...).

Zadanie

Samolot leci z prędkością odpowiadającą $M_\infty = 3$. Temperatura na danej wysokości wynosi 220°K. Do jakiej temperatury może – co najwyżej – nagrzać się zewnętrzna powierzchnia samolotu?

Umieszczony obserwator w samolocie (Pilot już zajęty...)
Na powierzchni samolotu prędkość znika... (dla obserwatora),
a daleko przed nim – liczba Macha = M_∞, a temperatura wynosi T_∞

Piszemy: $\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{k-1}{2}M_\infty^2 \Rightarrow T_0 = 616°K$

Trzeba chłodzić pilota....

SR 71 może lecieć z $M_\infty \approx 3.2 \div 3.4$, MiG 25 też. Obydwa – krótko!

Jeśli przemiana termodynamiczna podczas zatrzymywania gazu (albo rozpędzania..) jest odwracalna (– oznacza izentropowa –) to można wykorzystać znane formuły termodynamiczne:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Ważne są wartości tych stosunków dla **M = 1**.
Mówimy: to "**parametry krytyczne**". Jest:

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{1}{1+\frac{k-1}{2}} = \frac{2}{k+1}$$

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Parametry krytyczne oznaczamy gwiazdkami.
A **p_0 i ρ_0** – wyliczone przy odwracalnym termodynamicznie zatrzymaniu gazu nazywa się "**parametrami spiętrzenia**".

Dla $k = 1.4$ $\frac{T_*}{T_0} \cong 0{,}833$, $\frac{p_*}{p_0} \cong 0{,}528$ i $\frac{\rho_*}{\rho_0} = 0{,}633$

Przydatne będą następujące związki:

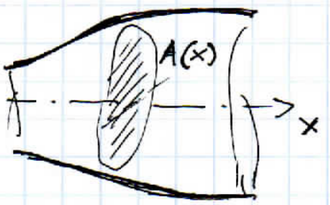
$$\frac{a_*}{a_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/2}, \quad \frac{a_0^2}{k-1} = \frac{V_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{k-1} = \frac{a_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2$$

$$\frac{V^2}{a_*^2} + \frac{2}{k-1}\left(\frac{a}{a_*}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1}$$

$$1 + \frac{2}{k-1}\left(\frac{a}{V}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1}\left(\frac{a_*}{V}\right)^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{k-1}\frac{1}{M^2} = \frac{k+1}{k-1}\left(\frac{a_*}{V}\right)^2$$

Możemy wyznaczyć ruch gazu w przewodzie o **łagodnie zmiennym przekroju.** Przewód jest niezbyt długi, gładki, a różnica ciśnienia w przekrojach początkowym i końcowym jest znaczna. Siła wynikająca ze zmian ciśnienia istotnie przekracza tarcie. Można więc użyć równania Eulera. Wobec łagodnej zmienności przekroju można założyć, iż w wektorze prędkości składowa wzdłużna jest wielokrotnie większa od pozostałych składowych. Niewiadomymi są: ciśnienie p, masa właściwa ρ i niepominięta jedyna wzdłużna składowa prędkości u.
Ruch jest ustalony.
Piszemy przybliżone równania niezmienności wydatku, równanie ruchu (dla składowej wzdłużnej) i równanie przemiany termodynamicznej.



Przemiana – przy odrzuceniu tarcia, przewodzenia, założeniu ciągłości pól – **jest izentropą:**

$$\rho u A = const \qquad \text{stałość wydatku}$$
$$u\frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{równanie ruchu}$$
$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = const. \qquad \text{izentropowości.}$$

Pierwsze i trzecie równanie przekształcamy do postaci różniczkowej. W tym celu logarytmujemy i bierzemy różniczki. Drugie równanie dzielimy przez u^2 i piszemy z użyciem różniczek. Oto wynik

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + 0 = -\frac{dA}{A}$$
$$0 + \frac{du}{u} + \frac{p}{\rho u^2}\frac{dp}{p} = 0$$
$$\kappa\frac{d\rho}{\rho} + 0 - \frac{dp}{p} = 0$$

Trzy niewiadome: $\frac{d\rho}{\rho}, \frac{dp}{p}, \frac{du}{u}$

$\frac{dA}{A}$ wielkość zadana, wynika z geometrii.

Czynnik $\frac{p}{\rho u^2}$ można przepisać tak: $\frac{p}{\rho}\frac{1}{u^2} = \frac{a^2}{\kappa}\frac{1}{u^2} = \frac{1}{\kappa M^2}$. Końcowa postać równań jest taka:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} &= -\frac{dA}{A} \\ \frac{du}{u} + \frac{1}{\kappa M^2}\frac{dp}{p} &= 0 \\ \kappa\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{p} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{1}{M^2-1}\frac{dA}{A} \qquad \frac{dp}{p} = \ldots\ldots \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \ldots\ldots$$

Przepiszemy równanie określające prędkość: $(M^2-1)\frac{du}{u} = \frac{dA}{A}$
Jak widać, dla $M=1$ przekrój musi mieć ekstremum.
Jeśli gaz zwiększa prędkość od powolnej – bo zaczyna od $M<1$ – wówczas $dA<0$. A więc przy rozpędzaniu gazu płynącego z liczbą Macha mniejszą od jedności trzeba, by $dA<0$
Sytuacja dla $M>1$ jest odwrotna: rozpędzanie gazu następuje przy $dA>0$.
Ekstremum przekroju **przy $M=1$ to minimum.**

	$M<1$	$M>1$
$dA>0$	$du<0$	$du>0$
$dA<0$	$du>0$	$du<0$

Tabelka zawiera wyniki przeprowadzonego rozumowania i rozumowań podobnych.
Napiszmy równanie wyrażające stałość wydatku:

$$\rho u A = const = \rho_* u_* A_*$$

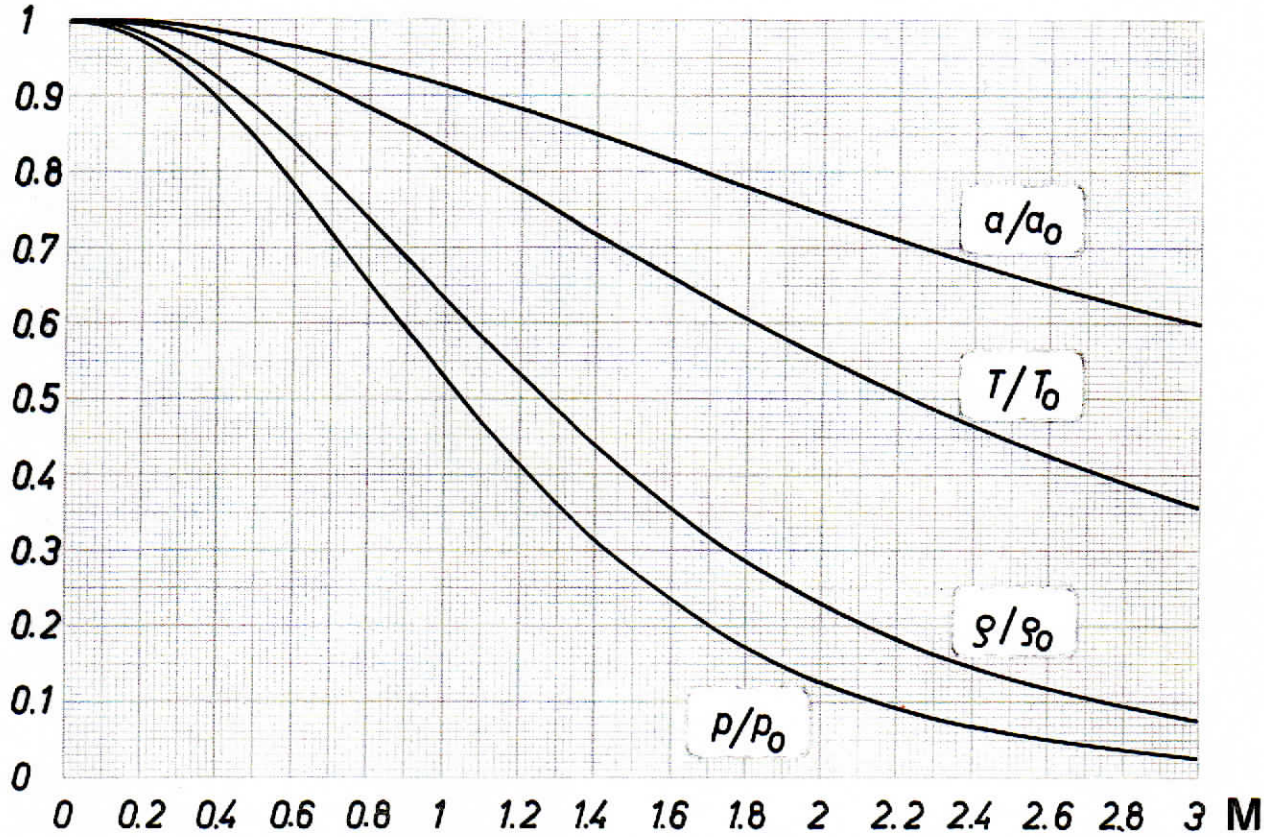
Otrzymamy ułamek:

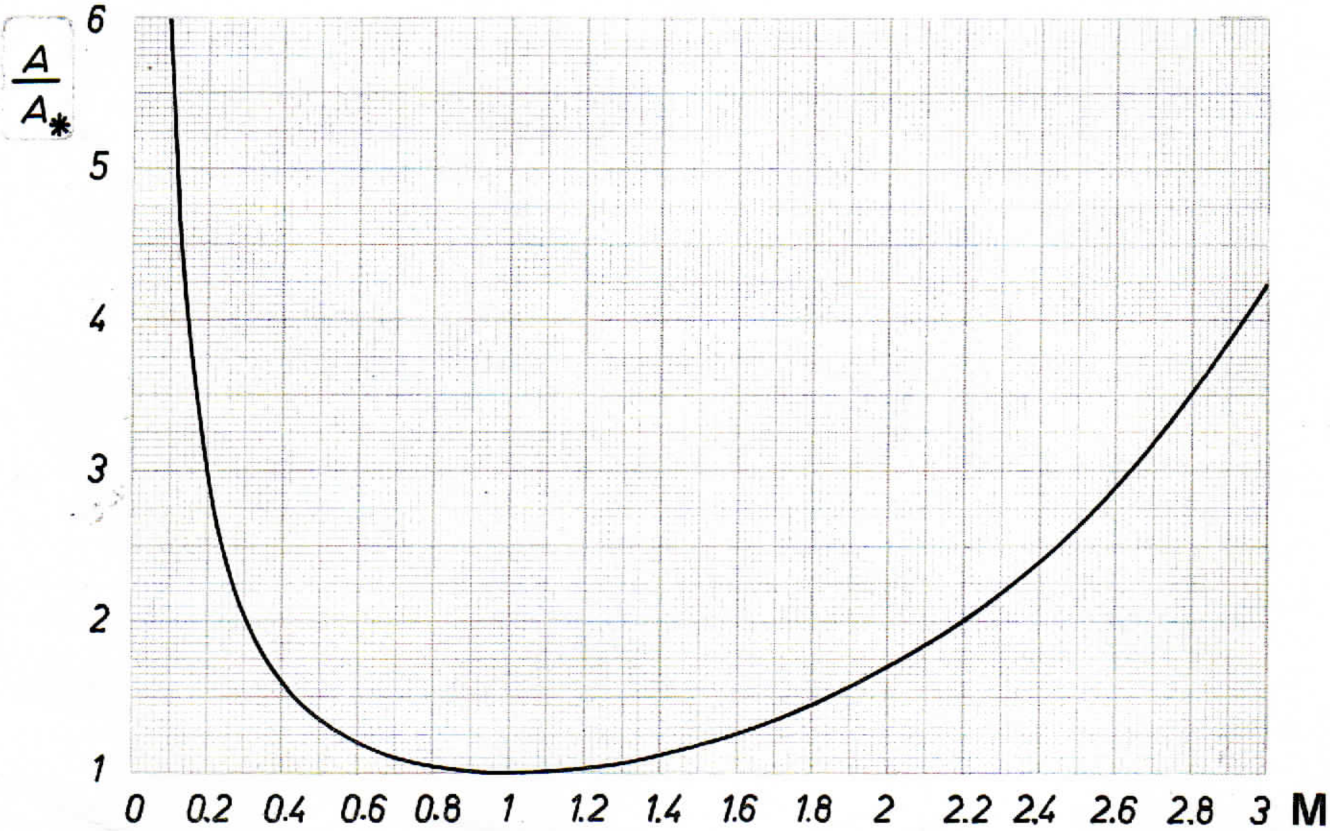
$$\frac{A}{A_*} = \frac{\rho_*}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\cdot\frac{u_*}{a_0}\,\frac{a_0}{a}\cdot\frac{a}{u} = \frac{\rho_*}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{a_*}{a_0}\,\frac{a_0}{a}\,\frac{1}{M}$$

Ułamki $\frac{\rho_*}{\rho_0}$ i $\frac{a_*}{a_0} = \frac{u_*}{a_0}$ to liczby. Inne ułamki, $\frac{a}{a_0}$ $\frac{\rho}{\rho_0}$ są znanymi (str. 22) liczby Macha.
Możemy więc napisać:

$$\frac{A}{A_*} = \mathcal{F}(M)$$

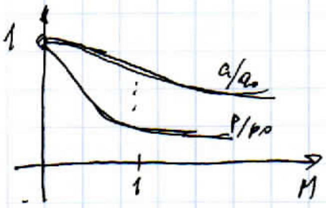
Przepływ izentropowy , k = 1,4





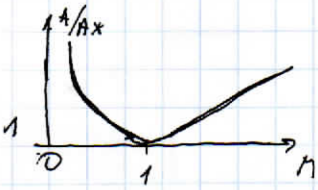
Zadanie: podaj rozwinięte wyrażenie określające $\frac{A}{A_*} = \mathcal{F}(M)$ i udowodnij, że minimum funkcji $\mathcal{F}$ jest dla $M = 1$.

Omawiane ostatnio zależności, jak też związki $\frac{T}{T_0}$, $\frac{p}{p_0}$, $\frac{\rho}{\rho_0}$ i $\frac{a}{a_0}$ w funkcji M, choć są niezbyt skomplikowane, przedstawione są na wykresach (dla $k=1.4$). Wykresy te ułatwiają fizyczne odczytanie.



Jeśli trzeba używać tych formuł w złożonych, rozwiązywanych numerycznie problemach dynamiki gazów – to oczywiście nadajemy im formy właściwe dla danego programowania...

Na wykresach można odczytać sposób rozwiązywania prostych przykładów w przejrzysty sposób.



Przykłady.

(I) W dwu przekrojach przewodu o zmiennym kształcie liczby Macha wynoszą 0.2 i 0.6. Wyznaczyć stosunki prędkości i temperatury.

Używamy wykresu. Mamy: $M_1 = 0,2$, $M_2 = 0.6$ i $\frac{T_1}{T_0} \cong 0.99$ oraz $\frac{T_2}{T_0} \cong 0.94$

Prosty rachunek: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1/T_0}{T_2/T_0} \approx 1.05$. Dalej: $\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 1.025$. $\frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 a_1}{M_2 a_2} = \frac{M_1}{M_2}\cdot\frac{a_1}{a_2} \cong 0,34$

Bez wykresu: z równania energii $\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{1+\frac{k-1}{2}M^2} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2} \approx 1.06$. Mała różnica związana z odczytem na wykresie.

Dalej: $\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = const \Rightarrow u_1^2\left(1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{M_1^2}\right) = u_2^2\left(1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{M_2^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 =$ policz...

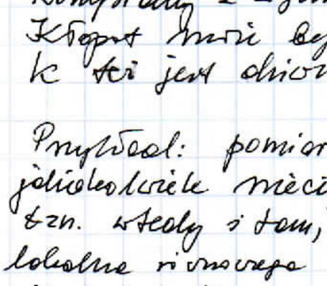
(II) Wyznacz A_2/A_1 dla danych z przykładu (I).
Mamy: $A_2/A_* = \mathcal{F}(M_2)$, $A_1/A_* = \mathcal{F}(M_1)$. Odczyty wykresu: 1,2 i 3,8.
Rezultat: $A_2/A_1 \cong 0.315$.

Nie powiedzieliśmy wyraźnie, że jest to gaz płynący przez tę samą, szczelną, krótką, izolowaną rurę...
I że wykładnik izentropy wynosi 1.4.

Podobnych (mało kłopotliwych) zadań można spotkać wiele w tzw. "zbiorach zadań". Na przykład: temperatura gazu wynosi T, a jego prędkość u. Jaka jest temperatura w zbiorniku, z którego gaz wypływa? Znamy przecież prędkość dźwięku: $a^2 = kRT$ i prędkość, a więc liczba Macha to $M = u/a$. Temperatura w pełni nie zmieniona to temperatura całkowita: $T_0 = T(1+\frac{k-1}{2}M^2)$ albo $T_0 = T\cdot\frac{T_0}{T} = \frac{T}{\frac{T}{T_0}(M)}$! Korzystamy z wykresu (jeśli $k=1.4$). Kłopot może być z wartością R jeśli gaz jest egzotyczny. Wtedy k też jest dziwne...

Przykład: pomiar prędkości. Dla $M \le 1$ w płynącym gazie nie występują jakiekolwiek nieciągłości. Pojawiają się w ruchach naddźwiękowych, tzn. wtedy i tam, gdzie $M > 1$. Przy braku nieciągłości wszędzie zachodzi lokalna równowaga termodynamiczna i można założyć, że zmiany ciśnienia związane ze zmianą liczby Macha są opisane wyrażeniem ze str. (22).

$\frac{p}{p_0} = (1+\frac{k-1}{2}M^2)^{-k/k-1}$ albo $\frac{p_0}{p} = \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$ Pomiary $p_0 = p + \Delta p$ i p (Δp mierzy manometr różnicowy, a p – to ciśnienie absolutne. Trzeba je zmierzyć) umożliwia określenie liczby Macha. Aby wyznaczyć prędkość mierzymy też temperaturę po to, aby użyć prędkości dźwięku $a^2 = kRT$.



Prędkość: $u^2 = M^2\cdot kRT$, $M^2 = \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]\cdot\frac{2}{k-1}$, $(u = +\sqrt{u^2})$

Jeśli termometr mierzy temperaturę T_0 (bo gaz zatrzymuje się na jego czujniku) to – znając liczbę Macha – określa się temperaturę gazu płynącego, bo $\frac{T_0}{T} = 1+\frac{k-1}{2}M^2$. Oczywiście, rozwiązując liczbowo przykład można skorzystać z wykresów! Jest: $T_0 = 400 K$, $p_0/p = 1.6$. Powietrze. Znajdź u!

Przeanalizujemy ruch gazu w prostym urządzeniu złożonym ze zbiornika i przewodu o zmniejszającym się przekroju.

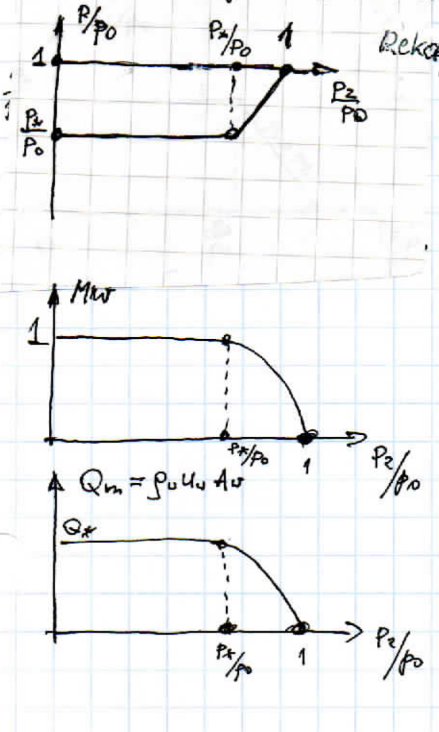
Taki przewód to **dysza zbieżna**.
Zadane są: p_0, T_0 – ciśnienie i temperatura w zbiorniku. Panuje tam znikoma prędkość – (– bliska zeru – tak, iż można przyjąć $u=0$).
Na zewnątrz jest ciśnienie p_z. Znana jest geometria dyszy.
Gaz wypływa, gdy $p_z/p_0 < 1$ lub, słowami, ciśnienie zewnętrzne jest mniejsze, niż ciśnienie w zbiorniku.
Dla $p_z/p_0 = 1$ nie obserwujemy ruchu. Ponieważ w zbiorniku $M \simeq 0$, to wzdłuż przewodu zwężającego się $(dA<0)$ liczba Macha M wzrasta od małych wartości do – conajwyżej – jedności.
Ponieważ $dA<0$ w każdym punkcie przekroju, a więc prędkość wszędzie wzrasta, to największą wartość osiąga w przekroju końcowym.
Oznaczmy tę prędkość u_w. Odpowiada jej liczba Macha M_w.
Jest:

$$a_w \geq u_w \quad i \quad M_w \leq 1.$$

Przypuśćmy teraz, że ułamek $\frac{p_z}{p_0}$ maleje od jedności do wartości, przy której $M_w = 1$.
Dla wypływu z prędkością mniejszą od prędkości dźwięku ciśnienie w przekroju wylotowym jest takie, jak ciśnienie zewnętrzne. A więc:

$$M_w < 1 \Leftrightarrow p_w = p_z.$$

Jeśli $M_w = 1$, to jest to największa wartość liczby Macha w dyszy zbieżnej. Może być uzyskana tylko w przekroju wylotowym. Ciśnienie w tym przekroju – to ciśnienie krytyczne p_*
Niższe ciśnienie w tym przekroju nie może wystąpić, bo liczba Macha nie może przekroczyć jedności...
A jeśli ciśnienie zewnętrzne będzie niższe niż p_*?
(Wiemy, że $p_* = p_0\left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/k-1}$ zależy tylko od p_0 i k...)
W przekroju wylotowym nadal utrzyma się p_* i $M_w = 1$..)



Rekapitulujemy: jeśli $p_z < p_*$ to $M_w < 1$
$p_z = p_w$. Na podstawie ułamka p_z/p_0 określamy M_w.

Dla $p_z \geq p_*$ $\quad M_w = 1 \quad i \quad p_w = p_*$.

Wydatek masowy Q_m wyznacza się tak:

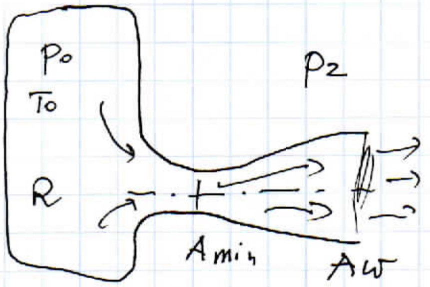
$$Q_m = \rho_w u_w A_w = \frac{\rho}{\rho_0}(M_w)\cdot\rho_0\cdot\frac{a}{a_0}(M_w)a_0\cdot M_w\cdot A_w$$

Jak widać, kluczową wielkością jest M_w.
Jasne, że $\rho_0 = p_0/RT_0$ i $a_0 = \sqrt{kRT_0}$, a ułamki $\frac{\rho}{\rho_0}$ i $\frac{a}{a_0}$ wyznaczamy za pomocą wzorów podanych na stronie 23 lub, gdy $k=1.4$, używając wykresów.
Maksimum wydatku to Q_*, odpowiadający $M_w = 1$.

Zadanie: sporządź analogiczne wykresy dla zmiennej niezależnej p_0/p_z uważając, iż p_z jest stałą.

Kolejne proste urządzenie służące tym razem do uzyskania prędkości naddźwiękowej to **dysza zbieżno-rozbieżna** albo **dysza Lavala**. Schemat urządzenia jest pokazany na szkicu.

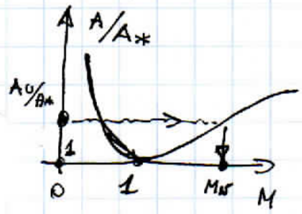
Gaz płynący przez taką dyszę **MOŻE** uzyskać prędkość naddźwiękową.



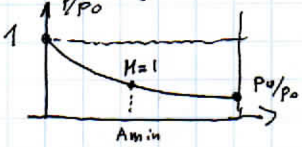
Aby tak było, w części zbieżnej należy rozpędzić gaz tak, by w przekroju minimalnym A_{min} uzyskana została liczba Macha równa jedności:

$$M|_{A_{min}} = 1$$

Wtedy, w części rozbieżnej dyszy $(dA > 0)$ gaz będzie przyspieszał, bo gdy $M > 1$ i $dA > 0$, to $du > 0$ (str. 23).

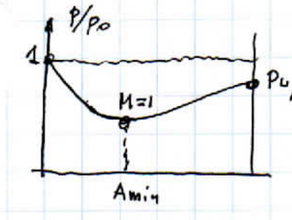


Znamy z geometrii dyszy ułamek A_w/A_{min}.
Ponieważ w przewężeniu (A_{min}) $M = 1$, to $A_{min} = A_*$.
Posługując się wykresem $A/A_* = F(M)$ znajdujemy M_w to znaczy liczbę Macha w przekroju wylotowym.
Ciśnienie w tym przekroju wynika z relacji $\frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_0}(M_w)$.
Ciśnienie zewnętrzne może być niższe od właściwego dla danych założeń, tzn. od $p_w = \frac{p}{p_0}(M_w) \cdot p_0$...
Wtedy wypływający strumień rozpręży się w zewnątrz dyszy...



Szkic przedstawia rozkład ciśnienia w dyszy. Taki przypadek nazywany projektowym...

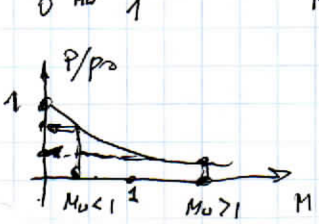
Może zaistnieć inna sytuacja: w przekroju minimalnym jest **$M = 1$**. Ale – w części rozszerzającej się gaz ***nie zwiększa* prędkości**. Pozostaje w ruchu z prędkością niższą od prędkości dźwięku i $M < 1$. Rozszerzanie się dyszy $(dA > 0)$ przy takiej liczbie Macha powoduje malenie prędkości $(du < 0$, str. 23.)



Liczba Macha w przekroju wylotowym jest mniejsza od jedności. Jej wartość wynika ze związku $\frac{A_{wyl}}{A_*} = F(M)$ dla poddźwiękowej gałęzi funkcji odwrotnej...

(Czytelnik widzi, że odwrócenie związku $\frac{A_w}{A_*} = F(M)$ nie jest jednoznaczne. Dla dwóch różnych liczb Macha otrzymuje się tę samą wartość A_w/A_*.)

Wybór właściwego rozwiązania wynika z informacji o ciśnieniu na zewnątrz dyszy.
Jak wynika z zależności $\frac{p}{p}(M)$ ciśnienie "wylotowe" w przypadku wypływu poddźwiękowego jest znacząco niższe od sytuacji, w której wypływ jest naddźwiękowy.



Jasne, że dla wypływu poddźwiękowego $p_w = p_z$.

To zasadniczy postulat: gdy w przekroju wylotowym $M_w < 1$, to $p_{wyl} = p_{zew}$.

Jeśli $M_w \geq 1$ to **ciśnienie** w przekroju wylotowym spełnia warunek:

$$p_w \geq p_{zew}.$$

W tej sytuacji o wartości M_w decyduje ułamek $\frac{A_w}{A_*}$. W poprzedniej – inny ułamek, bo $\frac{p_z}{p_0}$.