WYKŁAD1
KINEMATYKA PŁYNU

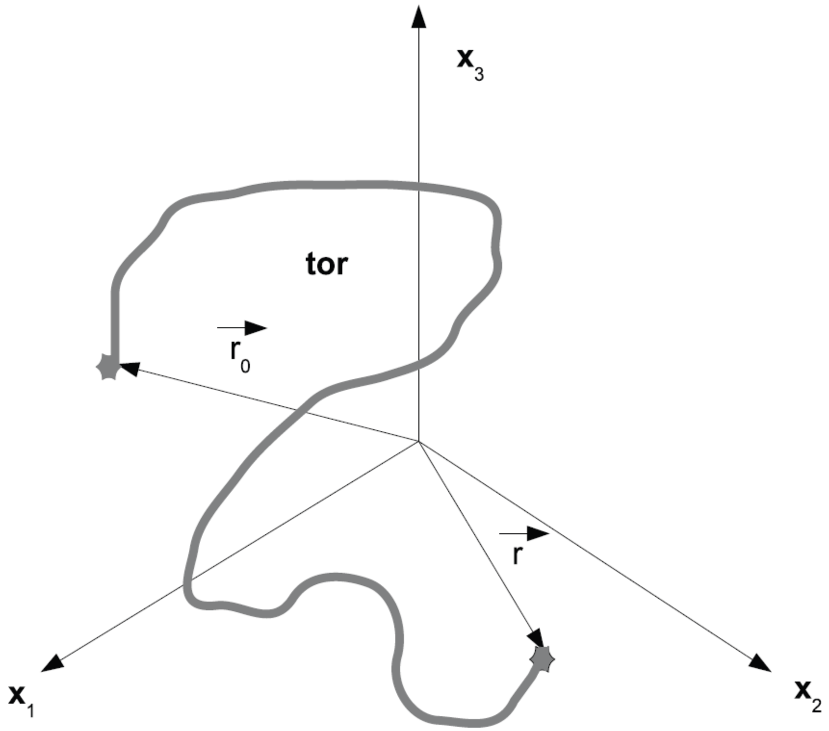
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

"Gallery of Fluid Motion"-M. Samimy, K.S. Breuer

RUCH OŚRODKA CIĄGŁEGO

Ośrodek ciągły jest utworzony przez ciągły zbiór punktów materialnych – w każdym punkcie przestrzeni znajduje się punkt materialny ośrodka



Wybrany punkt materialny porusza się, więc zmienia się jego położenie

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_o)$$

TOR – linia zakreślona przez poruszający się punkt materialny.
Początek toru określa:

$$\vec{r}(0, \vec{r}_o) = \vec{r}_o$$

Prędkość poruszającego się punktu:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}(t, \vec{r}_o)}{\partial t} = \vec{v}(t, \vec{r}_o)$$

Przyspieszenie punktu materialnego:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}(t, \vec{r}_o)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}(t, \vec{r}_o)}{\partial t^2} = \vec{a}(t, \vec{r}_o)$$

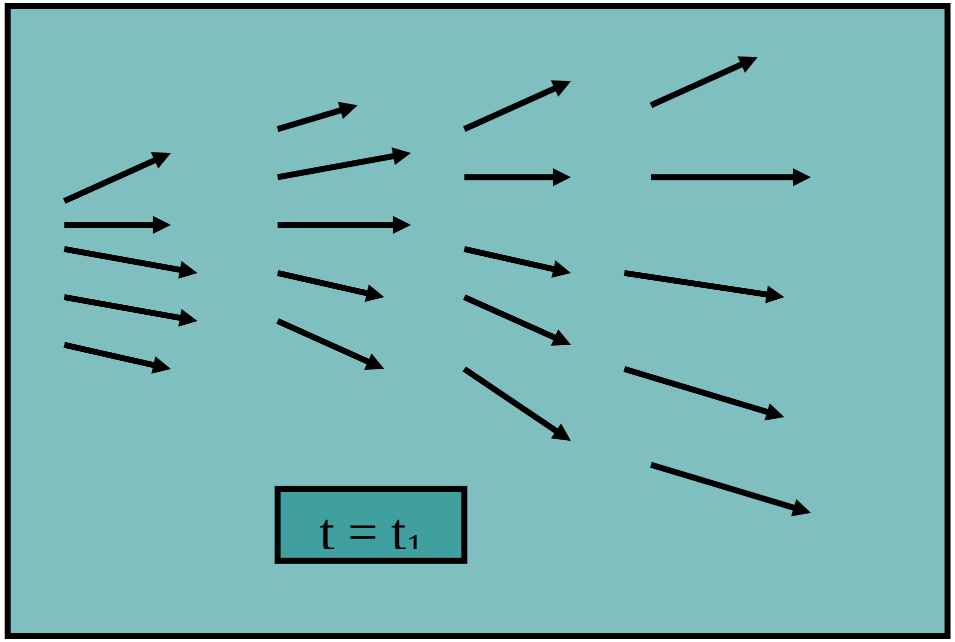
Warunek: wiadomo gdzie punkt materialny znajdował się w chwili początkowej

Eliminacja niedogodności:

$\vec{r}_o = \vec{r}_o(t, \vec{r})$ **wstawiamy do** $\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r}_o) = \vec{v}(t, \vec{r}_o(t, r))$ ⇦ prędkości wybranego punktu

Złożenie daje $\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r})$ ⇦ prędkość dowolnego punktu

czyli pole wektorowe zależne od czasu i położenia (wektorowa funkcja miejsca)



DWA OPISY RUCHU PŁYNU

Zmienne Lagrange'a

Zmienne $t, \vec{r}_o(x_o, y_o, z_o)$ **czyli czas oraz współrzędne miejsca, w którym rozważany punkt znajdował się w chwili początkowej**

Zmienne Eulera

Zmienne $t, \vec{r}(x, y, z)$ **czyli czas oraz współrzędne miejsca, w którym jest w danej chwili poruszający się punkt**

Załóżmy, że w każdym miejscu przestrzeni i w każdym czasie znamy wektory prędkości $\vec{v}(t,\vec{r})$. Linie, do których w wybranej chwili wektory te będą styczne nazywamy <u>LINIAMI PRĄDU</u>

Cosinusy kierunkowe LINII PRĄDU:

$$\boxed{\frac{dx_1}{ds} = \frac{v_1}{v}} \quad \boxed{\frac{dx_2}{ds} = \frac{v_2}{v}} \quad \boxed{\frac{dx_3}{ds} = \frac{v_3}{v}} \Rightarrow$$

Równania parametryczne

ds – długość elementarnego odcinka linii

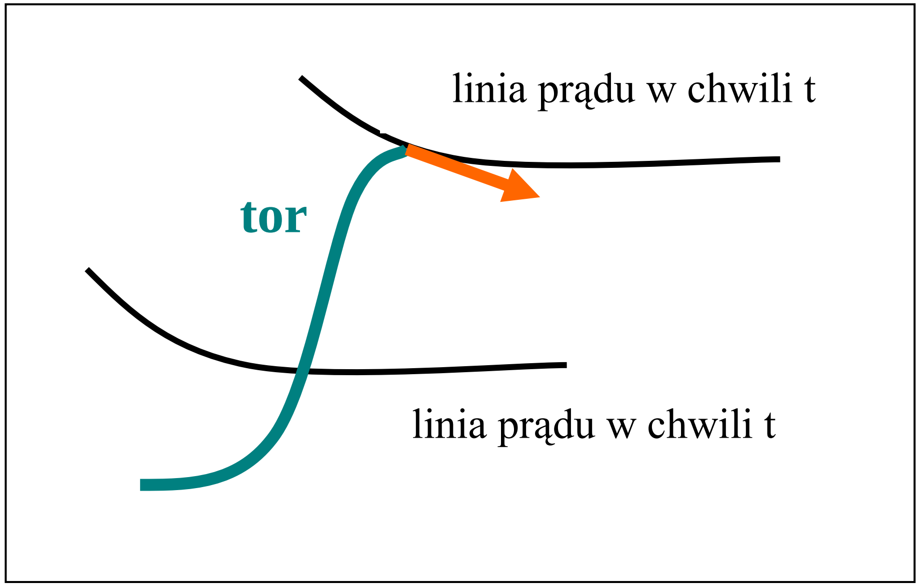
v – moduł (długość) wektora $\vec{v}$

$$\boxed{\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}} \Rightarrow$$

Równanie linii prądu (krawędziowe)
po wyrugowaniu długości łuku i modułu

Gdy pole prędkości nie zmienia się w czasie linie prądu są niezmienne. Zatem jeśli $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ **niezależna od czasu TORY i LINIE PRĄDU SĄ NIEROZRÓŻNIALNE**

Gdy pole prędkości zależy od czasu $\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r})$ **TOR jest na swym końcu zawsze styczny do LINII PRĄDU (jest obwiednią chwilowych linii prądu).**



Niech $f = f(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ **będzie funkcją określająca wielkość fizykalną opisującą poruszający się ośrodek ciągły. Pochodna względem czasu takiej funkcji nosi nazwę** **POCHODNEJ SUBSTANCJALNEJ lub MATERIALNEJ**

$$\frac{df}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{pochodna lokalna}} + \underbrace{v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}}_{\text{pochodna konwekcyjna}}$$

pochodna lokalna - **określa zmianę funkcji** f **wynikającą z upływu czasu**

pochodna konwekcyjna – **opisuje zmianę funkcji** f **wynikającą z ruchu ośrodka ciągłego**

POCHODNA SUBSTANCJALNA zapisana przy użyciu konwencji sumacyjnej

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad \text{dla } k=1,2,3$$

Zdefiniujmy operator różniczkowania zwany nablą. Oznacza się go symbolem ∇.

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \text{grad}$$

Zapiszmy POCHODNĄ SUBSTANCJALNĄ używając operatora ∇.

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f}$$

PRZYSPIESZENIE W ZMIENNYCH EULERA

Przyspieszenie $\vec{a}$ **jest polem wektorowym zależnym od czasu i położenia. Otrzymujemy go licząc pochodną substancjalną z pola prędkości**

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}} \qquad \text{dla } k=1,2,3$$

Część konwekcyjną można zapisać przy użyciu iloczynu skalarnego prędkości i operatora nabla.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}}$$

Aby policzyć składową przyspieszenia a_i **korzystamy ze wzoru**

$$\boxed{a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}$$

dla i=1,2 ,3

pamiętając o konwencji sumacyjnej po k.

KRÓTKIE UZUPEŁNIENIE:

Iloczyn skalarny prędkości $\vec{v}$ i wektora nabla ∇

$$(\vec{v} \cdot \nabla) = v_1 \cdot \nabla_1 + v_2 \cdot \nabla_2 + v_3 \cdot \nabla_3$$

gdzie

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Iloczyn skalarny zawierający nablę ∇ nie jest przemienny!

$$(\nabla \cdot \vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \neq (\vec{v} \cdot \nabla)$$

Iloczyn wektorowy ∇ i $\vec{v}$ nosi nazwę rotacji wektora $\vec{v}$

$$\nabla \times \vec{v} = \mathrm{grad} \times \vec{v} = \mathrm{rot}\ \vec{v}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Wektor - $\vec{A} = A_i \vec{e}_i$

A_i - **składowe wektora,**

$\vec{e}_i$ - **wersory kartezjańskiego układu współrzędnych.**

Tensor - $\mathbb{T} = T_{ik} \vec{e}_i \vec{e}_k$

T_{ik} - **składowe tensora,**

$\vec{e}_i, \vec{e}_k$ - **wersory**

Uwaga $\vec{e}_i$ **nie mnożymy przez** $\vec{e}_k$ **!**