



## Wykład 6

# Funkcja ściany

**Sławomir Kubacki**

`slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl`

**Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej,  
Politechnika Warszawska**

**lipiec, 2013**

## Równania zachowania masy i pędu (płyn nieściśliwy)

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$$
$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right)$$

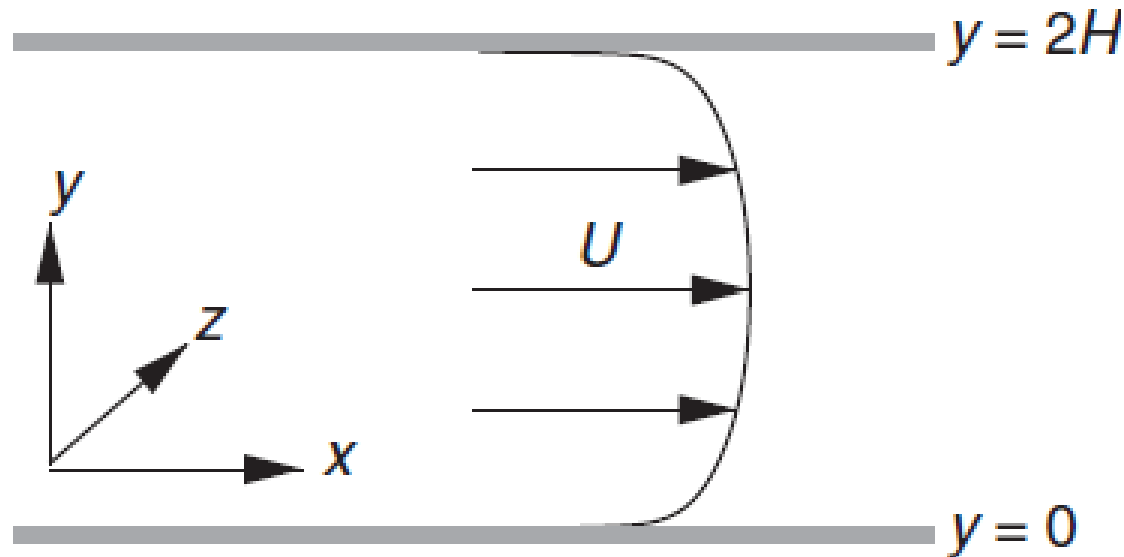
gdzie

$\nu$ - współczynnik lepkości kinematycznej płynu,

$-\overline{u'_i u'_j}$  - składowe tensora naprężeń turbulentnych (Reynoldsa)

Przyjęto oznaczenia  $U_i = \overline{u_i}$ ,  $P = \overline{p}$

## W pełni rozwinięty przepływ turbulentny w kanale



- Periodyczne warunki brzegowe w kierunkach  $x$  i  $z$  - przepływ jest niejednorodny tylko w kierunku  $y$
- Niezerowy gradient ciśnienia w kierunku  $x$
- Pochodne prędkości średniej i pochodne wszystkich składowych tensora naprężeń lepkich i turbulentnych w kierunkach  $x$  i  $z$  wynoszą zero
- Przepływ jest stacjonarny

# Równania zachowania pędu

## – w pełni rozwinięty przepływ w kanale

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right)$$

Równania upraszczają się jak dla przepływu dwuwymiarowego

- składowa U wektora prędkości zależy tylko od y,
- V=W=0.

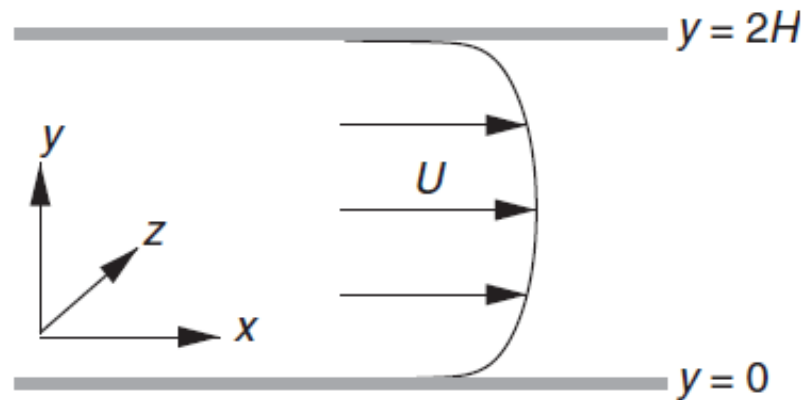
~~$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u'u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{u'w'} \right)$$~~

~~$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(VU)}{\partial x} + \frac{\partial(VV)}{\partial y} + \frac{\partial(VW)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial V}{\partial x} - \overline{v'u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial V}{\partial y} - \overline{v'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial V}{\partial z} - \overline{v'w'} \right)$$~~

# Turbulentny przepływ w kanale

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{u'v'} - \nu \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'v'}) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'v'}) \right) = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \text{const.} \quad (2)$$



- Profil prędkości jest symetryczny względem płaszczyzny  $y=H$  ( $U(y)=U(2H-y)$ )
- Naprężenia lepkie i turbulentne

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y}(y) = -\nu \frac{\partial U}{\partial y}(2H-y) \quad \overline{u'v'}(y) = -\overline{u'v'}(2H-y)$$

- Naprężenia turbulentne na ścianie wynoszą zero

$$\overline{u'v'}(0) = \overline{u'v'}(2H) = 0$$

# Prędkość tarcia $u_\tau$ i naprężenia całkowite

Całkując Równ. (1)

$$-\frac{1}{\rho} \int_0^{2H} \frac{\partial P}{\partial x} dy = \int_0^{2H} \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{u'v'} - \nu \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy$$
$$-\frac{2H}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -\nu \frac{\partial U}{\partial y}(2H) + \nu \frac{\partial U}{\partial y}(0) = 2\nu \frac{\partial U}{\partial y}(0) = 2 \frac{\tau_w}{\rho} = 2u_\tau^2 \quad (3)$$

Wstawiając Równ. (3) do (1)

$$\int u_\tau^2 dy = H \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{u'v'} - \nu \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \quad (4)$$

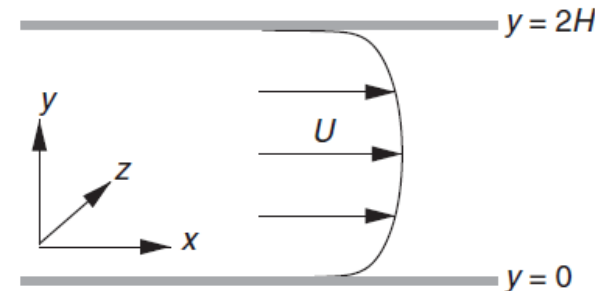
$$u_\tau^2 y = H \left( \overline{u'v'}(y) - \nu \frac{\partial U}{\partial y}(y) \right) + C \quad (5)$$

Stałą C można wyznaczyć z warunku brzegowego na dolnej ścianie ( $y=0$ )

$$C = H\nu \frac{\partial U}{\partial y}(0)$$

otrzymujemy

$$\left( \nu \frac{\partial U}{\partial y}(y) - \overline{u'v'}(y) \right) = \nu \frac{\partial U}{\partial y}(0) - \frac{u_\tau^2 y}{H}$$



## Naprężenia całkowite jako funkcja współrzędnej $y$

$$\left( \nu \frac{\partial U}{\partial y}(y) - \overline{u'v'}(y) \right) = \nu \frac{\partial U}{\partial y}(0) - \frac{u_\tau^2 y}{H} \quad (6)$$

na podstawie (3)  $u_\tau^2 = \nu \frac{\partial U}{\partial y}(0)$

Równ. (6) przyjmuje postać:

$$\rightarrow \left( \nu \frac{\partial U}{\partial y}(y) - \overline{u'v'}(y) \right) = u_\tau^2 \left( 1 - \frac{y}{H} \right) \quad (7)$$

Naprężenia całkowite zależą w sposób liniowy od współrzędnej  $y$

Zależność (7) można przedstawić w postaci bezwymiarowej. Przyjmujemy

$$\begin{array}{ll} 1. \overline{u'v'}^+ = \overline{u'v'} / u_\tau^2 & 3. U^+ = \frac{U}{u_\tau H} \\ 2. y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} & 4. Re_\tau = \frac{u_\tau H}{\nu} \end{array} \quad (8)$$

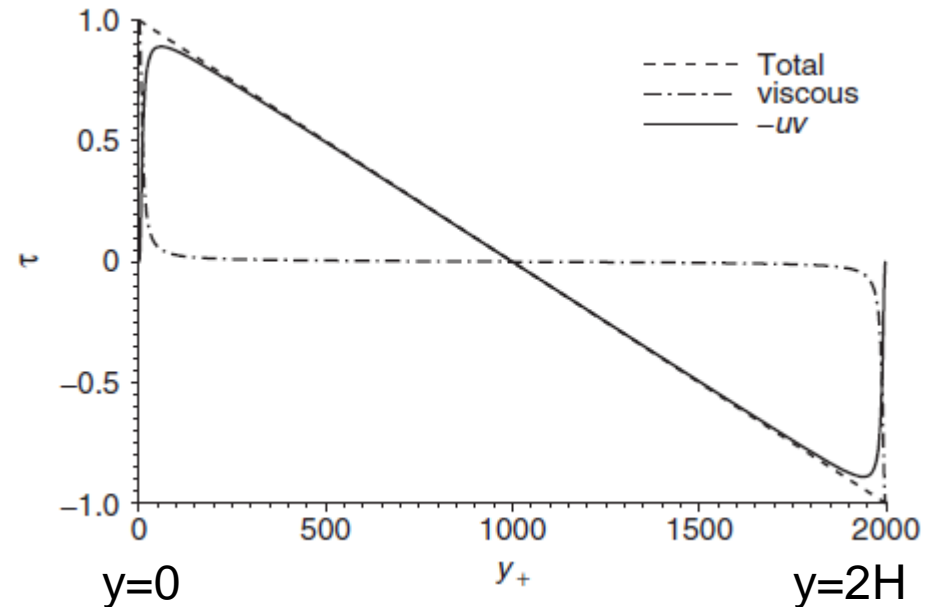
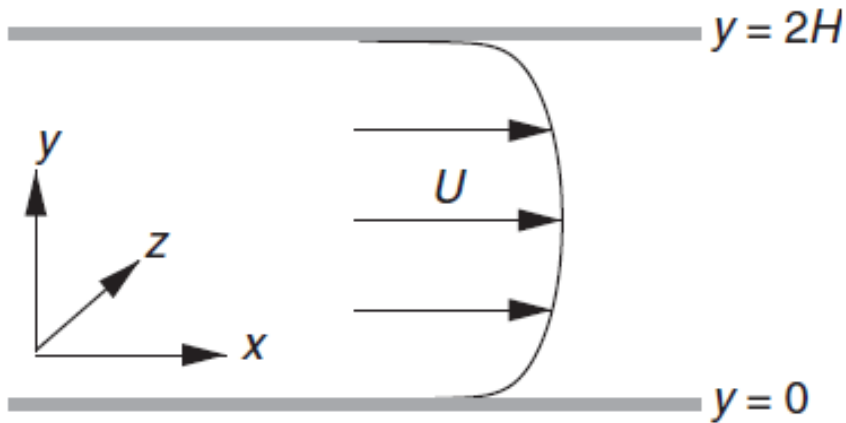
po przekształceniach otrzymuje się

$$\left( \frac{dU^+}{dy^+} - \overline{u'v'}^+ \right) = \left( 1 - \frac{y^+}{Re_\tau} \right) = \left( 1 - \frac{y^+}{y^+(H)} \right) \quad (9)$$

# Naprężenia całkowite jako funkcja współrzędnej $y$

$$\left( \frac{dU^+}{dy^+} - \overline{u'v'^+} \right) = \left( 1 - \frac{y^+}{\text{Re}_\tau} \right) = \left( 1 - \frac{y^+}{y^+(H)} \right)$$

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad \text{Re}_\tau = \frac{Hu_\tau}{\nu}$$



- Naprężenia lepkie istotne tylko w pobliżu ścian (dolna ściana dla  $y^+ < 30$ )
- Naprężenia turbulentne osiągają wartości maksymalne w pewnej odległości od ścian (na dolnej ścianie dla  $30 < y^+ < 300$ )
- Dla dużej liczby Reynoldsa ( $\text{Re}_\tau \gg 1$ ) naprężenia całkowite w pobliżu ścian można traktować jako „stałe”

$$\left( \frac{dU^+}{dy^+} - \overline{u'v'^+} \right) \Big|_{\text{wall}} \cong 1$$

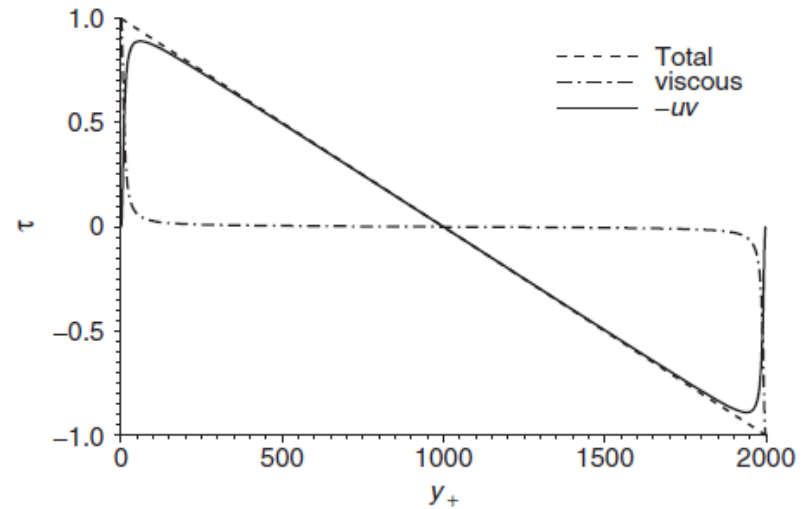


# Naprężenia całkowite i prędkość $U$

$$\left( \nu \frac{\partial U}{\partial y}(y) - \overline{u'v'}(y) \right) = u_\tau^2 \left( 1 - \frac{y}{H} \right)$$

$$\text{dla } y \rightarrow 0 \quad \left( \nu \frac{\partial U}{\partial y}(0) - \underbrace{\overline{u'v'}(0)}_0 \right) \cong u_\tau^2$$

$$\text{lub } \left( \frac{dU^+}{dy^+}(0) - \underbrace{\overline{u'v'}^+(0)}_0 \right) \cong 1$$



Prędkość tarcia  $u_\tau$  jest więc stała w pobliżu ścian

- Naprężenia całkowite są funkcją  $y^+$
- Prędkość średnia  $U^+$  również powinna zależeć tylko od  $y^+$

$$U^+ = f(y^+)$$

$$\frac{U}{u_\tau} = f\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right)$$

(10)

## Analiza asymptotyczna dla $y \rightarrow 0$

$$\left( \frac{dU^+}{dy^+} - \overline{u'v'^+} \right) = \left( 1 - \frac{y^+}{\text{Re}_\tau} \right) \quad (11)$$

Dla  $y \rightarrow 0$  składowe fluktuacyjne prędkości  $u'$  i  $w'$  uśrednione w czasie

$$\overline{u'} \rightarrow O(y)$$

$$\overline{w'} \rightarrow O(y)$$

Równanie ciągłości dla składowych fluktuacyjnych prędkości na ścianie

$$\frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} = - \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} \quad \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x}(0) = 0, \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z}(0) = 0 \rightarrow \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y}(0) = 0$$

Składowa prostopadła do ściany (rozwiniecie w szereg Taylora)

$$\overline{v'}(y) = A_1 \underbrace{\frac{\partial \overline{v'}}{\partial y}}_0(0)y + A_2 \frac{\partial^2 \overline{v'}}{\partial y^2}(0)y^2 + \dots \quad \overline{v'} \rightarrow O(y_+^2)$$

Tak więc

$$\overline{u'v'} \rightarrow O(y^3) \quad \overline{u'v'} \rightarrow O(y_+^3)$$

## Analiza asymptotyczna dla $y \rightarrow 0$

Równ. (11) można więc zapisać w postaci

$$\frac{dU^+}{dy^+} - O(y_+^3) = 1 - \frac{y^+}{\text{Re}_\tau}$$

$$\int dU^+ = \int O(y_+^3) dy^+ + \int dy^+ - \frac{1}{\text{Re}_\tau} \int y^+ dy^+$$

Po scałkowaniu

$$U^+ = O(y_+^4) + y^+ - \frac{1}{\text{Re}_\tau} O(y_+^2)$$

$$U^+ = y^+$$

(12)

## Analiza dla $y \gg 0$

Przyjmujemy hipotezę Boussinesq

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} \rightarrow -\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (13)$$

Zakładamy że współczynnik lepkości turbulentnej jest iloczynem pewnej charakterystycznej skali długości  $y$  i charakterystycznej skali prędkości  $u_\tau$

$$\nu_t = \chi y u_\tau$$

Naprężenia całkowite mogą być wyznaczone z Równ. (7)

$$\left( \nu \frac{\partial U}{\partial y}(y) - \overline{u'v'}(y) \right) = u_\tau^2 \left( 1 - \frac{y}{H} \right)$$

W pewnej odległości od ściany ( $y \gg 0$ , duża liczba Reynoldsa  $Re_\tau \gg 1$ ) dominującą rolę odgrywają naprężenia turbulentne

$$\left( \cancel{\nu \frac{\partial U}{\partial y}}(y) - \overline{u'v'}(y) \right) = u_\tau^2 \left( 1 - \cancel{\frac{y}{H}} \right) \quad -\overline{u'v'} \cong u_\tau^2 \quad (15)$$

## Funkcja ściany

Wstawiając Równ. (15) do (13) i uwzględniając (14) otrzymuje się

$$-\overline{u'v'} = u_\tau^2 = \kappa y u_\tau \frac{dU}{dy} \quad (16)$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad (17)$$

stała von Karmana  $\kappa=0.41$  (patrz wykład dotyczący modelu k- $\epsilon$ ).

$$dU = \frac{u_\tau}{\kappa} \frac{dy}{y}$$

$$y = \frac{y^+}{y^+} y^+ \quad dy = \frac{y^+}{y^+} dy^+ \quad dU = dU^+ u_\tau$$

$$\int dU^+ = \frac{1}{\kappa} \int \frac{dy^+}{y^+}$$

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

lub

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(B_2 y^+) \quad (18)$$

stałe  $B=5.1$ ,  $B_2=\exp(B\kappa)=8.093$  (badania eksperymentalne i symulacje DNS).

# Funkcja ściany

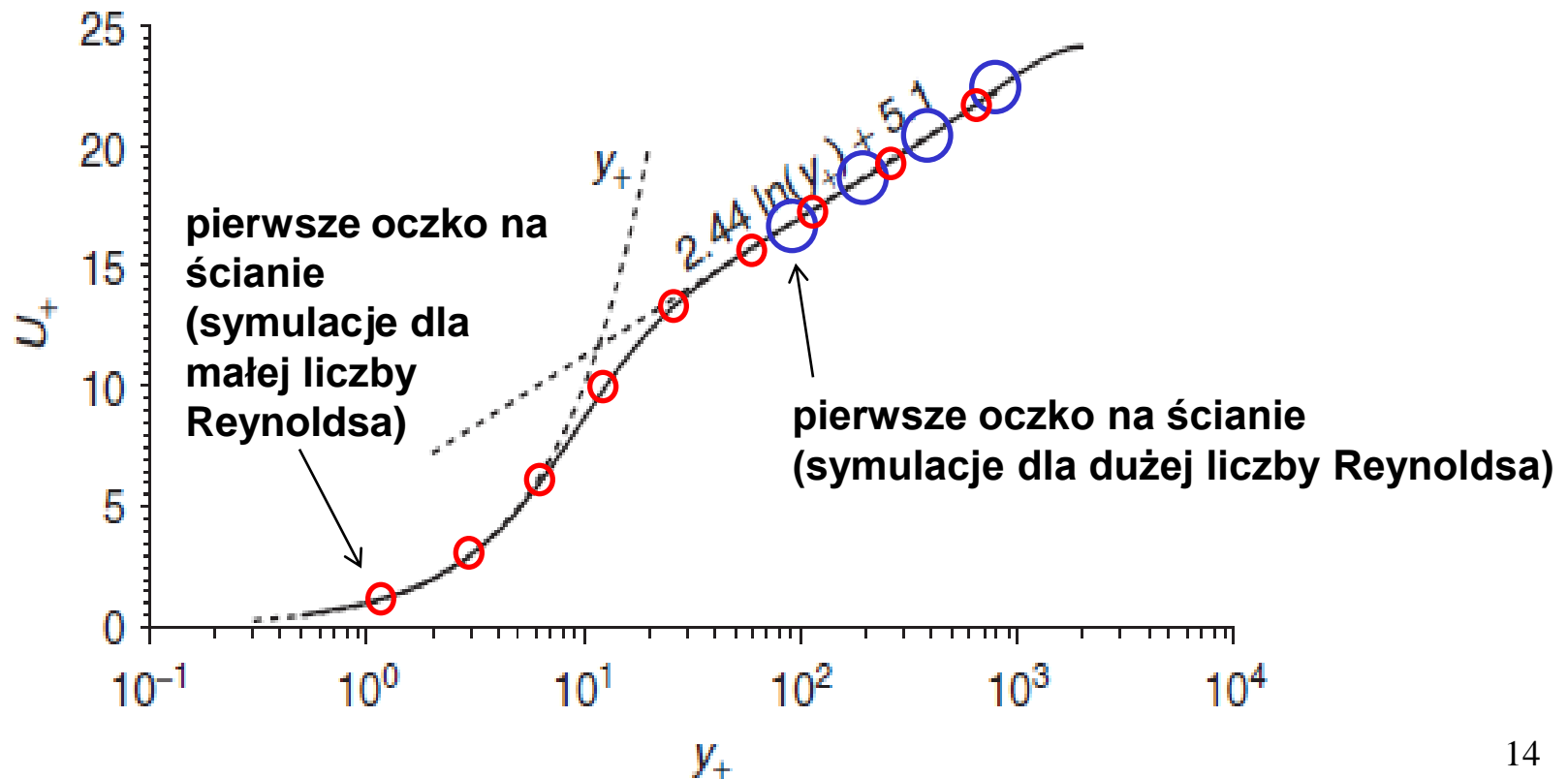
Dla  $y^+ < 5$ ,

$$U^+ = y^+$$

$30 < y^+ < 300$

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

$$\chi = 0.41, B = 5.1$$



## **Funkcja ściany (subwarstwa lepka i wewnętrzny obszar warstwy przyściennej)**

Pochodną prędkości w pobliżu ścian można wyznaczyć z poniższej zależności :

$$\begin{aligned}U^+ &= f(y^+) \\ \frac{U}{u_\tau} &= f\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= u_\tau \frac{\partial f}{\partial y^+} \frac{dy^+}{dy} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \frac{\partial f}{\partial y^+} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \frac{dU^+}{dy^+}\end{aligned}\quad (19)$$

Subwarstwa lepka ( $y^+ \rightarrow 0$ )

Na podstawie Równ. (3)

$$\frac{\partial U}{\partial y}(0) = \frac{u_\tau^2}{\nu}$$

Tak więc  $\frac{\partial f}{\partial y^+} = \frac{dU^+}{dy^+} = 1$  w Równ. (19)

(patrz Równ. 12)

Wewnętrzny obszar warstwy ( $y^+=30:300$ )

Na podstawie Równ.(17)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

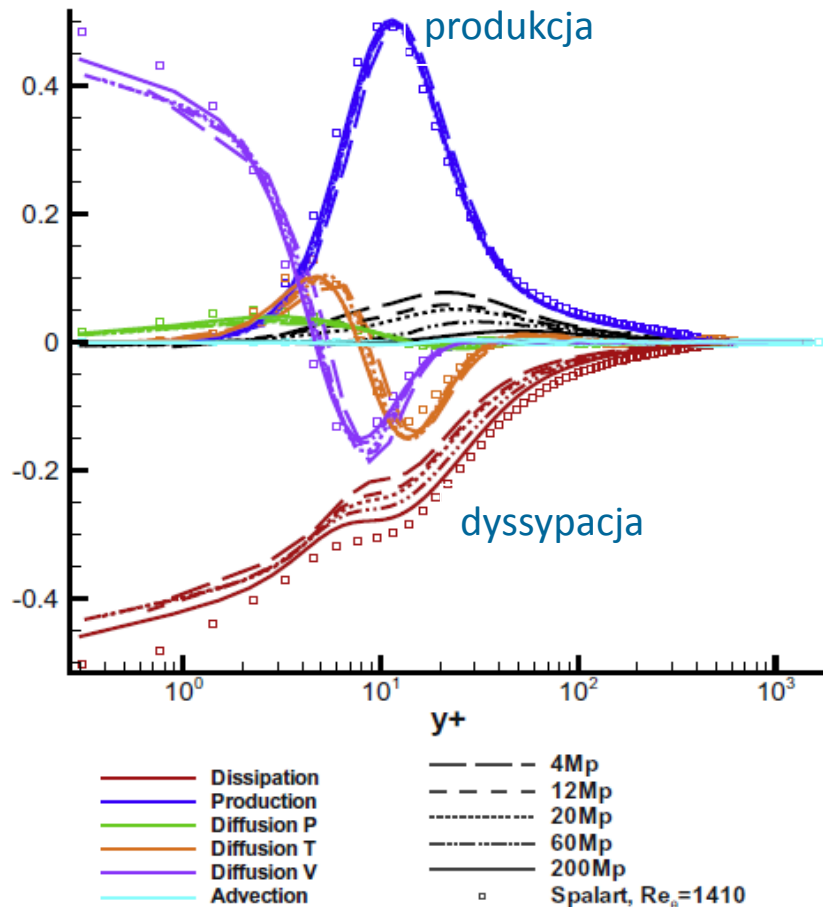
Dla pochodnej prędkości danej Równ. (19)

$$\frac{\partial f}{\partial y^+} = \frac{\nu}{\kappa u_\tau y} = \frac{1}{\kappa y^+} = \frac{dU^+}{dy^+}$$

(patrz Równ. 18)

# Bilans składników w równaniu transportu energii kinetycznej turbulencji: produkcja = dyssypacji

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \boxed{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} - \boxed{\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \cancel{\nu \frac{\partial k}{\partial x_j}} - \frac{1}{2} \cancel{\overline{u'_i u'_i} u'_j} - \frac{1}{\rho} \cancel{\overline{p' u'_j}} \right) \quad (20)$$



Przepływ w turbulentnej warstwie przyściennej



# Prędkość dyssypacji $\varepsilon$ dla wewnętrznego podobozaru turbulentnej warstwy przyściennej ( $y^+=30:300$ )

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} \rightarrow -\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

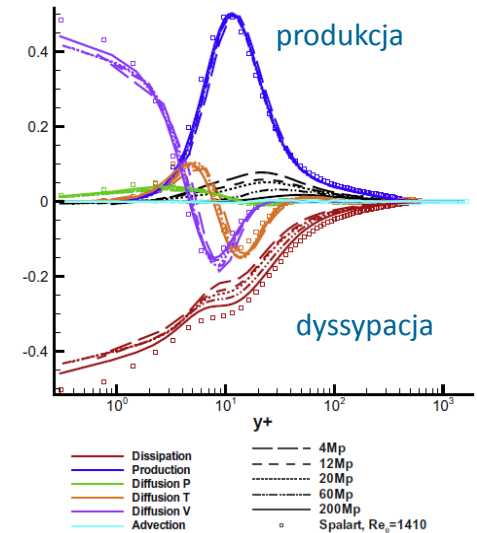
Równ. (20) upraszcza się do postaci (produkcja = dyssypacji)

$$0 = \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon$$

Przyjmując  $\nu_t = \kappa y u_\tau$  i uwzględniając  $\frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y}$

otrzymuje się równanie dla dyssypacji  $\varepsilon$  ( $l^2/t^3$ )

$$\varepsilon = \kappa y u_\tau \left( \frac{u_\tau}{\kappa y} \right)^2 = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (21)$$



Na podstawie Równ. (13) i (15) otrzymuje się:

$$-\overline{u'v'} = u_\tau^2 = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$u_\tau^2 = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{u_\tau}{\kappa y}$$

## ***k* i $\omega$ dla wewnętrznego podobszaru turbulentnej warstwy przyściennej ( $y^+ = 30:300$ )**

Wstawiając  $\varepsilon$  z Równ (21) do powyższej zależności otrzymujemy wzór na energię kinetyczną turbulencji ( $l^2/t^2$ )

$$u_\tau^2 = C_\mu \frac{k^2}{u_\tau^2}$$

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

(22)

W przypadku modelu  $k$ - $\omega$  założenie lokalnej równowagi między produkcją i dyssypacją w równ. dla  $k$  pozwala oszacować częstotliwość fluktuacji turbulentnych  $\omega$  ( $1/t$ ) jak niżej:

$$\varepsilon = C_\mu k \omega = \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \frac{k}{\omega} \left( \frac{u_\tau}{\kappa y} \right)^2$$

$$\omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{C_\mu} \kappa y}$$

(23)

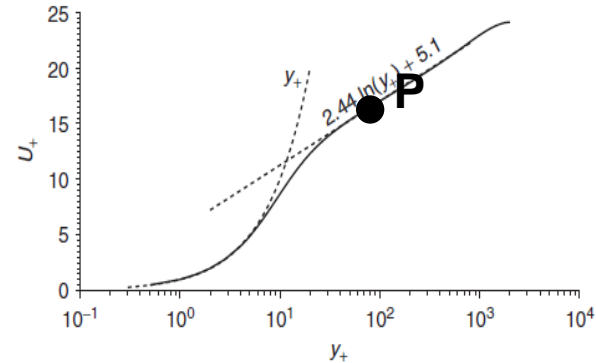
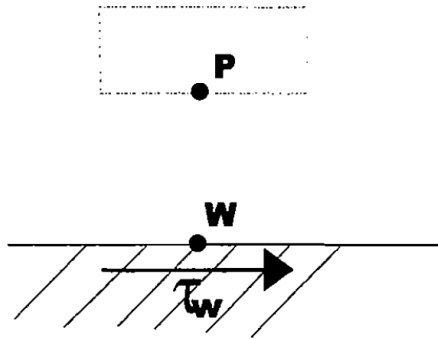
## **$\varepsilon$ dla wewnętrznego podobszaru turbulentnej warstwy przyściennej ( $y^+=30:300$ )**

Podstawienie Równ. (22) do Równ. (21) pozwala wyrugować prędkość tarcia z wzoru na prędkość dyssypacji  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (24)$$

# Symulacje przepływu w warstwie przyściennej dla dużej liczby Reynoldsa (model $k-\varepsilon$ ) – zagadnienie 2D

## I. Klasyczny model funkcji ściany



W praktyce warunki brzegowe definiowane są dla punktu P (środek oczka siatki obliczeniowej znajduje się w wewnętrznym podobszarze warstwy)

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_P \cong \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{\text{wall}} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \frac{dU^+}{dy^+}$$

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y_P^+} \quad y_P^+ = \frac{|u_\tau| y_P}{\nu}$$

gdzie  $u_\tau$  otrzymuje się na podstawie Równ. (18)

$$u_\tau = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{B_2 u_\tau y_P}{\nu}\right)} U_P \quad (25) \quad 20$$

# Symulacje przepływu w warstwie przyściennej dla dużej liczby Reynoldsa (model $k-\varepsilon$ )

- I. Klasyczne sformułowanie c.d.:  $u_\tau$  w Równ. (25) można uzyskać stosując jedną z metod rozwiązywania równań nieliniowych (np. metoda Newtona), przyjmując prędkość  $U_p$  z poprzedniego kroku iteracyjnego lub czasowego

Pozostałe warunki brzegowe i modyfikacja członu produkcyjnego w równaniu dla  $k$

$$k_P = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (26)$$

$$\varepsilon_P = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (27)$$

$$P_k = \tau_P \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_P \quad \tau_P = \tau_w = \rho u_\tau^2 \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_P = \frac{u_\tau}{\kappa y_P} \quad (28)$$

Stosowanie Równ. (25) problematyczne w obszarach oderwania warstwy przyściennej: gdy  $u_\tau \rightarrow 0$  Równ. (25) i (27) tracą sens

~~$$u_\tau = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{E_2 u_\tau y_P}{\nu}\right)} U_P$$~~

~~$$\varepsilon_P = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}$$~~

# Symulacje przepływu w warstwie przyściennej dla dużej liczby Reynoldsa (model $k$ - $\varepsilon$ )

$u_\tau$  można wyrazić w funkcji  $k$  korzystając z Równ. (22)

$$u_\tau = \sqrt{k} C_\mu^{1/4}$$

Równ. (18) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{U_p}{u_\tau} \frac{u_\tau}{u_\tau} &= \frac{U_p u_\tau}{u_\tau^2} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( B_2 \frac{u_\tau y_P}{\nu} \right) \\ \frac{U_p \sqrt{k} C_\mu^{1/4}}{u_\tau^2} &= \frac{1}{\kappa} \ln \left( B_2 \frac{\sqrt{k} C_\mu^{1/4} y_P}{\nu} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Naprężenia  $\tau_w$  wyznacza się z zależności

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 = \frac{\rho \kappa \sqrt{k_P} C_\mu^{1/4}}{\ln(B_2 y_P^+)} U_p \quad y_P^+ = \frac{\sqrt{k} C_\mu^{1/4} y_P}{\nu} \quad (30)$$

Natomiast równanie dla  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_P = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \cong \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa y_P} \quad (31) \quad 22$$

# Symulacje przepływu w warstwie przyściennej dla dużej i niskiej (lokalnie) liczby Reynoldsa (model k-ε)

II. Metoda pozwalająca na uwzględnienie efektów lepkich w tych obszarach przepływu w których zastosowano lokalne zagęszczenie siatki obliczeniowej ( $y_+ \rightarrow 0$ ), (two-layer technique)

$$y_P^+ = \frac{\sqrt{k} C_\mu^{1/4} y_P}{\nu} \quad y_{P,crit}^+ = 11.3$$

Jeżeli  $y_P^+ \leq y_{P,crit}^+$

Podejście dla niskiej liczby Reynoldsa

$$\tau_w = \mu \frac{\partial U}{\partial y}(0) \cong \mu \frac{U_P}{y_P}$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} \frac{\tau_w}{|\tau_w|}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu} \frac{dU^+}{dy^+} \quad \frac{dU^+}{dy^+} = 1$$

$$P_k = \tau_w \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu}$$

$$\varepsilon = \frac{2\nu k}{y^2}, \quad k = 0$$

Jeżeli  $y_P^+ > y_{P,crit}^+$

Podejście dla dużej liczby Reynoldsa

$$\tau_w = \frac{\rho \kappa \sqrt{k_P} C_\mu^{1/4}}{\ln(B_2 y_P^+)} U_P$$

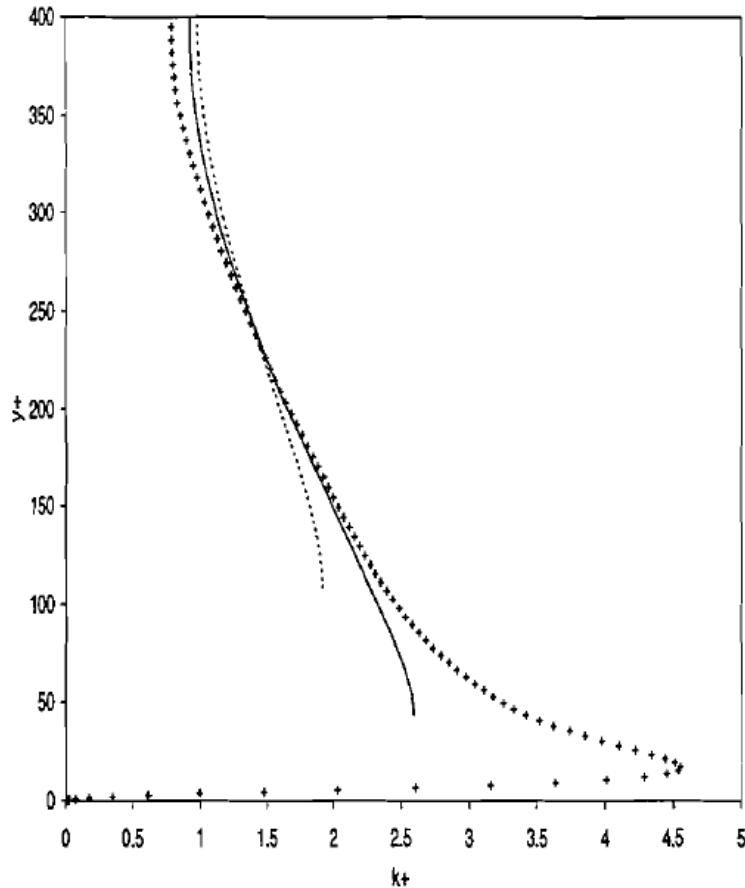
$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} \frac{\tau_w}{|\tau_w|}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu} \frac{dU^+}{dy^+} \quad \frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y_P^+}$$

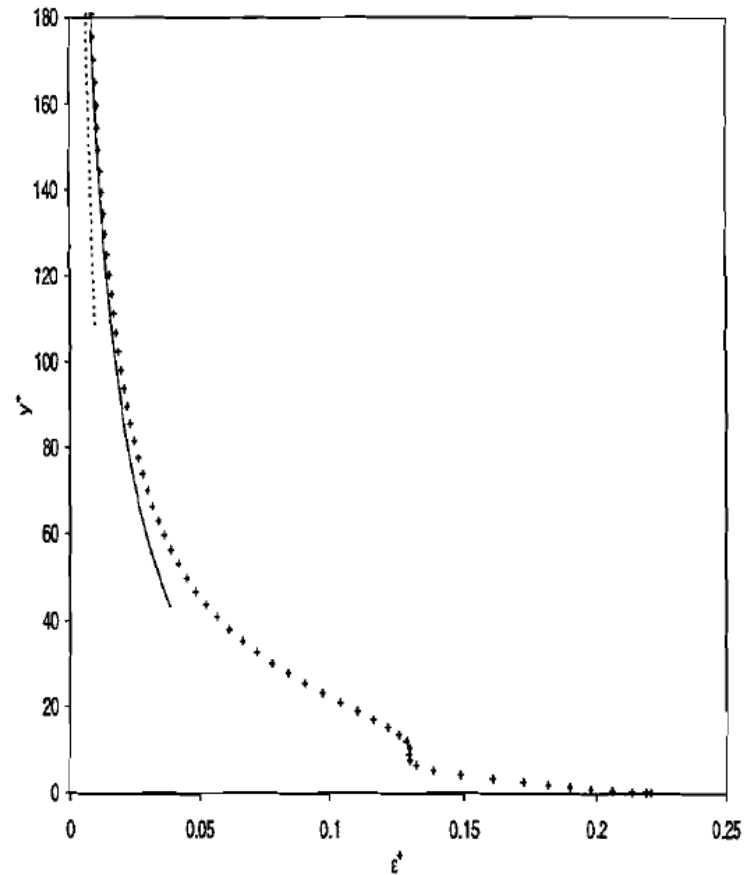
$$P_k = \tau_w \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y}$$

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y}, \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0$$

# Symulacje przepływu w kanale (2D) model $k-\varepsilon$ – przykładowe wyniki (symbole: DNS, Kim et al. 1987)



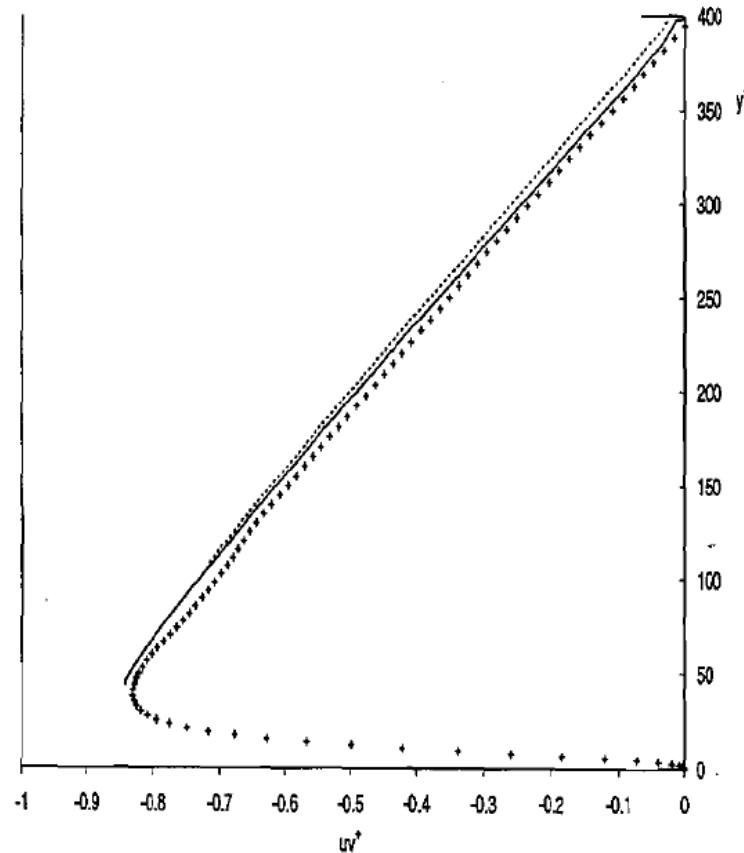
Energia kinetyczna turbulencji  $k^+ = k / u_\tau^2$



Prędkość dyssypacji  $\varepsilon^+ = \varepsilon \nu / u_\tau^4$



# Symulacje przepływu w kanale (2D) model $k-\varepsilon$ – przykładowe wyniki (symbole: DNS, Kim et al. 1987)



Naprężenia styczne Reynoldsa  $uv^+ = uv / u_\tau^2$