

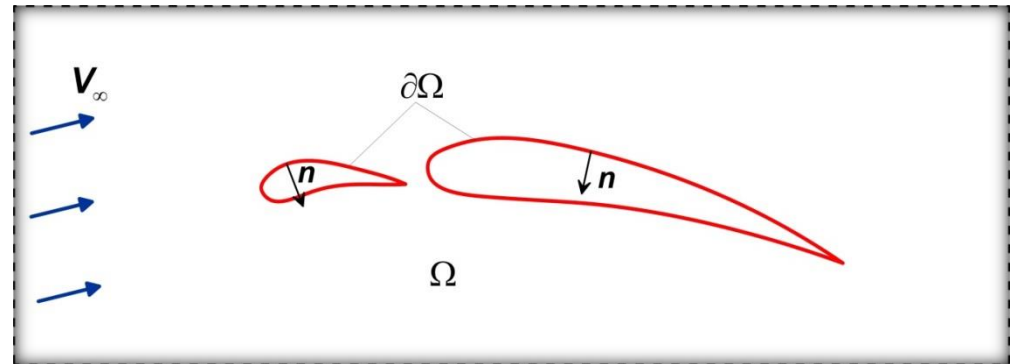
AERODYNAMIKA I

WYKŁAD 2

PRZEPIŁYWY POTENCJALNE CZĘŚĆ 2

Ogólne sformułowanie zagadnienia przepływu potencjalnego

Klasyczny problem aerodynamiki (zewnętrznej) polega na wyznaczeniu stacjonarnego opływu ciała (w 2D – konturu) lub układu ciał płynem nielepkiem o stałej gęstości (nieściśliwym). Zakłada się, że przepływ daleko od ciała jest strumieniem jednorodnym o zadanej prędkości.



Rozwiązanie w/w zadania polega na wyznaczeniu w obszarze na zewnątrz ciała (układu ciał) Ω potencjału skalarnego φ takiego, że:

- $\nabla^2 \varphi = 0$ w Ω
- Spełniony jest warunek brzegowy na brzegu materialnym $\partial\Omega$ (nieprzenikalność brzegu)

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

- Spełniony jest warunek „dalekiego pola”

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \mathbf{v} = \mathbf{V}_\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \mathbf{V}_\infty$$

W dalszej części wykładu skoncentrujemy się na przypadku dwuwymiarowym.

Zaczniemy od przygotowania matematycznego. Rozważmy następującą całkę krzywoliniową obliczaną wzdłuż okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R_∞

$$J_\alpha := \oint_{K_\infty} \frac{f(\theta)}{r^\alpha} ds$$

Problem: Załóżmy, że $R_\infty \rightarrow \infty$. Dla jakich wartości wykładnika α granica całki J_α istnieje i jest różna od zera?

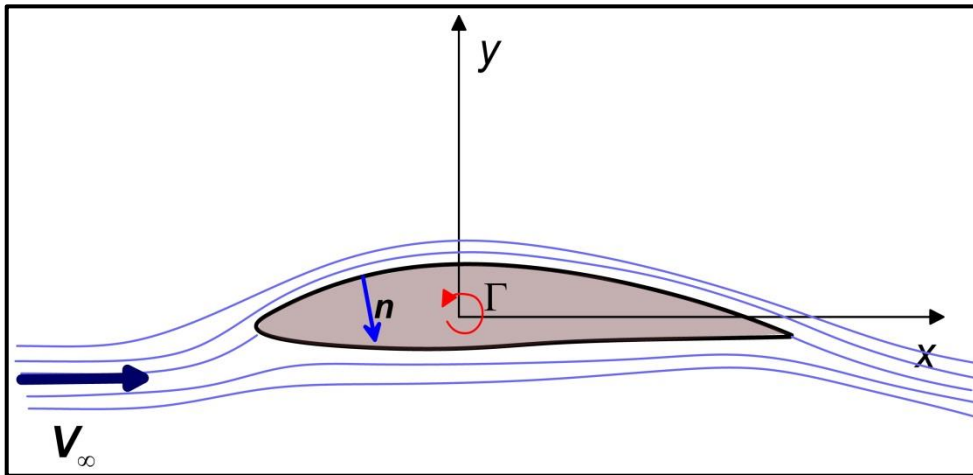
Mamy oczywistą równość

$$\oint_{K_\infty} \frac{f(\theta)}{r^\alpha} ds = \frac{1}{R_\infty^{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

Rozwiązanie problemu jest proste – muszą jednocześnie zachodzić dwa warunki

$$\alpha = 1 \quad , \quad \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \neq 0.$$

Istotnie, w przeciwnym razie, albo $\alpha > 1$ czyli $\lim_{R_\infty \rightarrow \infty} \frac{1}{R_\infty^{\alpha-1}} = 0$ i w granicy całka J_α znika, albo $\alpha < 1$ i wówczas $\lim_{R_\infty \rightarrow \infty} \frac{1}{R_\infty^{\alpha-1}} = \infty$. W tym ostatnim przypadku, granica całki J_α istnieje jedynie wówczas, gdy $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \equiv 0$ co oznacza, że całka J_α jest tożsamościowo równa zeru dla dowolnie wielkiej wartości promienia R_∞ .



Skonstruujemy potencjał prędkości opływu profilu metodą superpozycji, a mianowicie niech

$$\varphi(x, y) = U_\infty x + V_\infty y + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta(x, y) + \hat{\varphi}(x, y)$$

Zakładamy, że pole prędkości odpowiadające składnikowi $\hat{\varphi}(x, y)$ znika z odległością szybciej niż r^{-1} (i z tego powodu nie daje wkładu do całkowitej cyrkulacji w przepływie)

$$\hat{v} = \nabla \hat{\varphi} \sim O\left(\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right) \quad , \quad \alpha > 1$$

Oczywiście, składnik $\hat{\phi}$ jest funkcją harmoniczną w obszarze przepływu Ω , tj.

$$\nabla^2 \hat{\phi} \equiv \partial_{xx} \hat{\phi} + \partial_{yy} \hat{\phi} = 0$$

Ponadto przyjmujemy warunek brzegowy i warunek asymptotyczny

$$v_n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n} \phi|_{\partial\Omega} = 0 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \phi = U_\infty \mathbf{e}_x + V_\infty \mathbf{e}_y$$

Dodatkowym stopniem swobody jest cyrkulacja Γ wiry związanego z profilem. Jak dobrać tę wielkość?

Typowy profil lotniczy ma ostre zakończenie. W punkcie tym krzywizna konturu jest (w teorii) nieskończona, a kierunek (wersor) normalny nie jest określony. Ogólnie, można rozróżnić przypadek ostrza o kącie większym lub równym zero (ang. cusp).

Jeśli cyrkulacja wiru związanego z profilem dobrana jest dowolnie, to prędkość przepływu w ostrzu jest nieskończona, co jest – oczywiście – fizycznym nonsensem. Sensowne fizycznie rozwiązanie opływu potencjalnego uzyskamy przyjmując tzw. **warunek Kutty-Żukowskiego**.

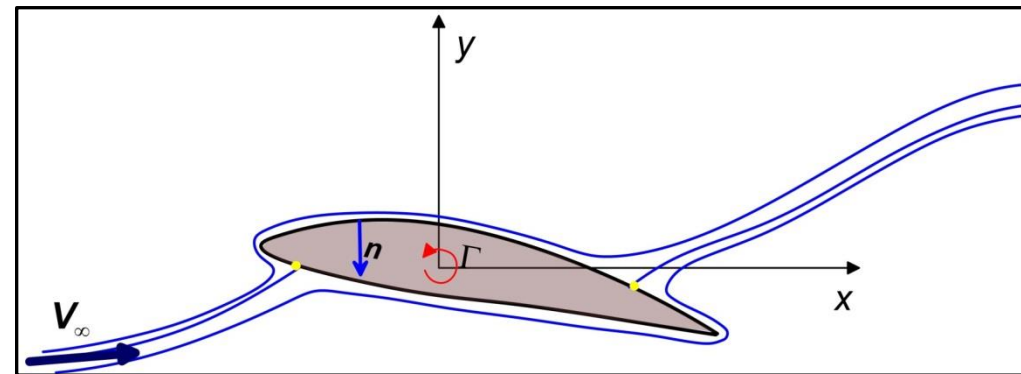
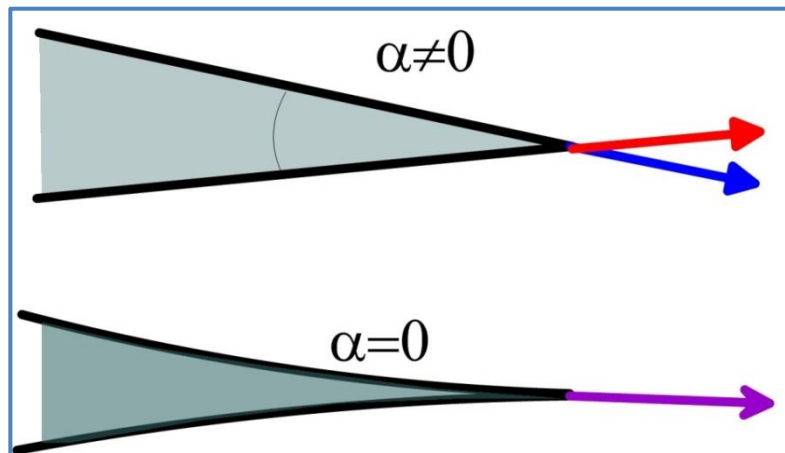
Warunek Kutty-Żukowskiego

Cyrkulacja wiru związanego z profilem powinna być dobrana tak, aby:

- Jeżeli kąt ostrza jest większy od zera – punkt ostrza jest punktem spiętrzenia (stagnacji) tj. prędkość przepływu w tym punkcie równa jest zeru.
- Jeżeli kąt ostrza jest równy zeru – graniczne wartości prędkości stycznej obliczone w punkcie ostrza dla dolnej i górnej części konturu profilu powinny być sobie równe.

Komentarz:

Zerowanie prędkości w punkcie ostrza o kącie większym od zera wynika z wymogu jednoznaczności wektora prędkości w tym punkcie (**niejednoznaczność wektora stycznego**). W przypadku ostrza o kącie zerowym oba kierunki styczne pokrywają się, zatem wystarczy założyć równość prędkości stycznych.



Efekt pogwałcenia warunku K-Ż

Wprowadźmy na profilu naturalną krzywoliniową współrzędną s (długość łuku) w taki sposób, że $s = 0$ i $s = L$ odpowiadają punktowi ostrza.

Matematyczna postać warunku Kutty-Żukowskiego to:

- w przypadku ostrza o kącie niezerowym

$$\nabla \varphi|_{s=0} = \mathbf{0}$$

- w przypadku ostrza typu *cusp* ($\boldsymbol{\tau}$ - wektor styczny do profilu)

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = \lim_{s \rightarrow L^-} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Wyznaczenie opływu potencjalnego z warunkiem Kutty-Żukowskiego

Zapiszmy potencjał $\hat{\phi}$ jako następującą sumę

$$\hat{\phi}(x, y) = \Gamma \hat{\phi}_1(x, y) + \hat{\phi}_2(x, y)$$

Pole skalarne $\hat{\phi}_1$ jest rozwiązaniem następującego zagadnienia brzegowego

$$\begin{cases} \nabla^2 \hat{\phi}_1 = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \hat{\phi}_1 \Big|_{\partial\Omega} = -(u_1 n_x + v_1 n_y) \Big|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{v}_1 = u_1 \mathbf{e}_x + v_1 \mathbf{e}_y$ to prędkość indukowana przez wir związany z profilem o jednostkowej cyrkulacji ($\Gamma = 1$). Oczywiście, środek tego wiru znajduje się wewnątrz profilu.

Zauważmy, że pole $\hat{\phi}_1$ jest zależne wyłącznie od kształtu profilu i położenia środka wiru związanego z profilem.

Pole skalarne $\hat{\phi}_2$ jest rozwiązaniem następującego zagadnienia brzegowego

$$\begin{cases} \nabla^2 \hat{\phi}_2 = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \hat{\phi}_2 \Big|_{\partial\Omega} = -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = -(U_\infty n_x + V_\infty n_y) \Big|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

Pole $\hat{\phi}_2$ zależy od geometrii profilu oraz – de facto – od orientacji strumienia jednorodnego względem profilu (od kąta natarcie). Wartość prędkości w strumieniu jednorodnym pełni w istocie rolę skalarne czynnika skalującego pole $\hat{\phi}_2$.

Całkowite pole prędkości dane jest wzorem

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_\infty + \Gamma(\mathbf{v}_1 + \nabla \hat{\phi}_1) + \nabla \hat{\phi}_2$$

Nakładamy warunek K-Ż (założmy, że kąt ostrza jest większy od zera). Ponieważ na mocy konstrukcji pola prędkości

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \lim_{s \rightarrow L^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

to warunek ten jest równoważny

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (\mathbf{V}_\infty + \nabla \hat{\phi}_2) \cdot \boldsymbol{\tau} + \Gamma \lim_{s \rightarrow 0^+} (\mathbf{v}_1 + \nabla \hat{\phi}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

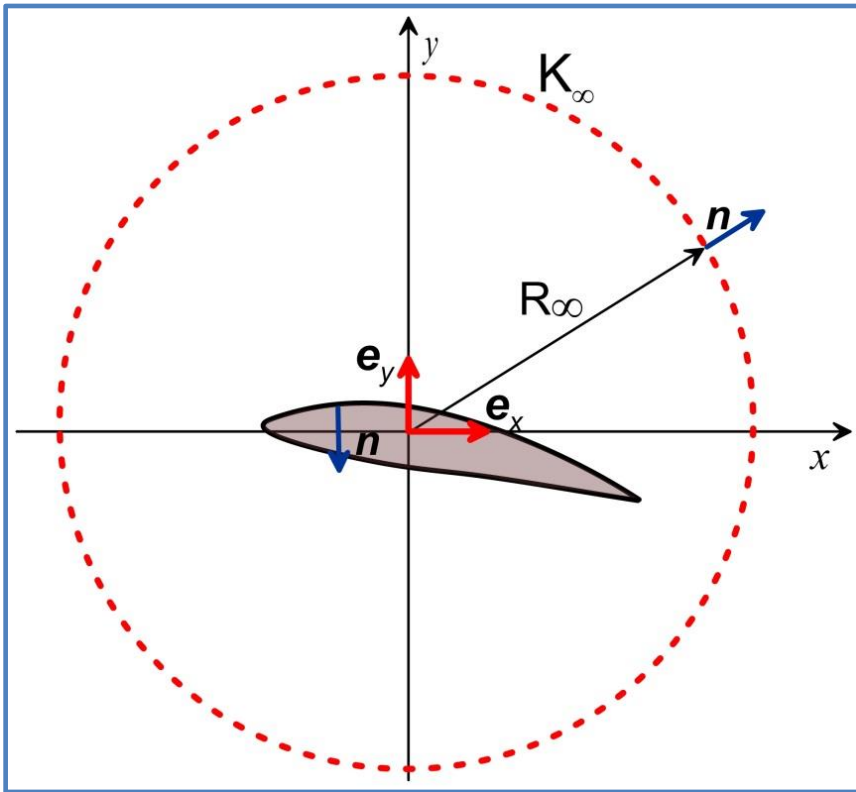
Otrzymujemy wzór na **cyrkulację wiru związanego**

$$\Gamma = - \frac{(\mathbf{V}_\infty + \nabla \hat{\phi}_2) \cdot \boldsymbol{\tau}}{(\mathbf{v}_1 + \nabla \hat{\phi}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}} \Big|_{s=0}$$

Komentarz:

Rozwiązanie sformułowanych wyżej pomocniczych problemów brzegowych otrzymuje się zwykle na drodze obliczeń numerycznych. Zagadnienia te są istotnie przypadkami szczególnymi problemu ogólniejszego, polegającego na wyznaczeniu funkcji harmoniczej w zewnątrz zadanego konturu (profilu), na podstawie znanego rozkładu brzegowego pochodnej normalnej tej funkcji (problem Neumanna). Problem też można rozwiązać stosując metody typowe dla zagadnień zewnętrznych w teorii potencjału, np. metodą **brzegowego równania całkowego**.

Siła aerodynamiczna



Posługując się metodą całkowitego bilansu pędu wyprowadzimy teraz formułę dla siły aerodynamicznej w przepływie potencjalnym.

Bez utraty ogólności założymy, że przepływ w nieskończoności jest równoległy do osi $0x$, tj.

$$\mathbf{V}_\infty = U_\infty \mathbf{e}_x \quad , \quad V_\infty = 0$$

Wprowadźmy obszar kontrolny położony pomiędzy konturem profilu i okręgiem K_∞ o środku w początku układu współrzędnych i wielkim promieniu R_∞ .

Zgodnie ze znaną z kursu Mechanika Płynów I formułą, siła działająca na profil wyraża się wzorem

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y = - \int_{K_\infty} \rho v_n v ds - \int_{K_\infty} (p - p_\infty) \mathbf{n} ds = -\mathbf{J}_V - \mathbf{J}_P$$

Zauważmy, że – zgodnie z założonym kierunkiem przepływu w nieskończoności – składową F_x nazwiemy oporem aerodynamicznym, a składową F_y – siłą nośną.

Obliczymy teraz kolejno całki \mathbf{J}_V i \mathbf{J}_P . Zgodnie z opisaną wyżej procedurą, pole prędkości wyraża się wzorem (cyrkulacja Γ dobrana jest zgodnie z warunkiem K-Ż)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_\infty + \Gamma \mathbf{v}_1 + \nabla \hat{\phi} \approx (U_\infty + \Gamma u_1) \mathbf{e}_x + \Gamma v_1 \mathbf{e}_y + \mathbf{O}\left(\frac{1}{R_\infty^{1+\alpha}}\right)$$

Ostatni symbol oznacza składniki znikające szybciej niż $1/R_\infty$.

W powyższej formule pojawiły się składowe kartezjańskie prędkości indukowanej przez wir związany o jednostkowej cyrkulacji.

Na okręgu K_∞ są one równe

$$u_1|_{K_\infty} = -\frac{1}{2\pi R_\infty} \sin \theta \quad , \quad v_1|_{K_\infty} = \frac{1}{2\pi R_\infty} \cos \theta$$

Wobec tego, całkowita prędkość na okręgu K_∞ wyraża się wzorem

$$\mathbf{v}|_{K_\infty} = \left[U_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi R_\infty} \sin \theta \right] \mathbf{e}_x + \frac{\Gamma}{2\pi R_\infty} \cos \theta \mathbf{e}_y + \mathbf{O}\left(\frac{1}{R_\infty^{1+\alpha}}\right)$$

Zewnętrzny wersor normalny na K_∞ to: $\mathbf{n}|_{K_\infty} = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$

Obliczamy prędkość normalną do konturu K_∞ ...

$$\begin{aligned} v_n|_{K_\infty} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{K_\infty} = U_\infty \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R_\infty} \sin \theta \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R_\infty} \cos \theta \sin \theta + \mathbf{O}\left(\frac{1}{R_\infty^{1+\alpha}}\right) = \\ &= U_\infty \cos \theta + \mathbf{O}\left(\frac{1}{R_\infty^{1+\alpha}}\right) \end{aligned}$$

Potrzebujemy również ...

$$v_n \mathbf{v}|_{K_\infty} = \left[U_\infty^2 \cos \theta - \frac{\Gamma U_\infty}{2\pi R_\infty} \sin \theta \cos \theta \right] \mathbf{e}_x + \frac{\Gamma U_\infty}{2\pi R_\infty} \cos^2 \theta \mathbf{e}_y + \mathbf{O}\left(\frac{1}{R_\infty^{1+\alpha}}\right)$$

Całkujemy ...

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_V &= \rho \int_{K_\infty} v_n \mathbf{v} ds = \left[\rho R_\infty \int_0^{2\pi} (U_\infty^2 \cos \theta - \frac{\Gamma U_\infty}{2\pi R_\infty} \sin \theta \cos \theta) d\theta \right] \mathbf{e}_x + \\ &+ \left[\rho R_\infty \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma U_\infty}{2\pi R_\infty} \cos^2 \theta d\theta \right] \mathbf{e}_y + \mathbf{O}(R_\infty^{-\alpha}) = \frac{1}{2} \rho U_\infty \Gamma \mathbf{e}_y + \mathbf{O}(R_\infty^{-\alpha}) \xrightarrow{R_\infty \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \rho U_\infty \Gamma \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Całkę ciśnieniową \mathbf{J}_P obliczymy posługując się równaniem Bernoulliego ...

$$\mathbf{J}_P = \int_{K_\infty} (p - p_\infty) \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \rho \int_{K_\infty} (U_\infty^2 - V^2) \mathbf{n} ds$$

Bernoulli

Potrzebujemy kwadrat prędkości przepływu ...

$$\begin{aligned} V^2 &= \left[U_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi R_\infty} \sin \theta + \mathbf{O}\left(\frac{1}{R_\infty^{1+\alpha}}\right) \right]^2 + \left[\frac{\Gamma}{2\pi R_\infty} \cos \theta + \mathbf{O}\left(\frac{1}{R_\infty^{1+\alpha}}\right) \right]^2 = \\ &= U_\infty^2 - \frac{U_\infty \Gamma}{\pi R_\infty} \sin \theta + \mathbf{O}\left(\frac{1}{R_\infty^{1+\alpha}}\right) \end{aligned}$$

Całkujemy ...

$$J_P = \frac{1}{2} \rho \int_{K_\infty} (U_\infty^2 - V^2) \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \rho \left[R_\infty \int_0^{2\pi} \frac{U_\infty \Gamma}{\pi R_\infty} \sin \theta \cos \theta d\theta \right] \mathbf{e}_x + \\ + \frac{1}{2} \rho \left[R_\infty \int_0^{2\pi} \frac{U_\infty \Gamma}{\pi R_\infty} \sin^2 \theta d\theta \right] \mathbf{e}_y + \mathbf{O}(R_\infty^{-\alpha}) \xrightarrow{R_\infty \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \rho U_\infty \Gamma \mathbf{e}_y$$

Ostateczna formuła dla siły aerodynamicznej to (nazywamy ją wzorem Kutty-Żukowskiego)

$$\mathbf{F} = -\mathbf{J}_V - \mathbf{J}_P = -\rho U_\infty \Gamma \mathbf{e}_y$$

Zauważmy, że:

- $F_x \equiv 0$ - brak oporu (paradoks d'Alemberta) !!!
- $F_y = -\rho U_\infty \Gamma$ - siła nośna istnieje i jest proporcjonalna do cyrkulacji wiry związanego z profilem.

Zastosowanie funkcji zmiennej zespolonej w aerodynamice klasycznej

Mamy dany nieściśliwy przepływ potencjalny – potencjał prędkości i funkcja prądu to odpowiednio

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad , \quad \psi = \psi(x, y)$$

Wprowadźmy formalnie zespoloną transformację współrzędnych wzorami

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases} , \quad i = \sqrt{-1}$$

Zdefiniujmy funkcję

$$W(z, \bar{z}) = \varphi\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right] + i\psi\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right]$$

Obliczmy pochodną cząstkową

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} W(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \partial_x \varphi(..) - \frac{1}{2i} \partial_y \varphi(..) + \frac{i}{2} \partial_x \psi(..) + i\left(-\frac{1}{2i}\right) \partial_y \psi(..) = \\ &= \frac{1}{2} [\partial_x \varphi(..) - \partial_y \psi(..)] + \frac{1}{2} i [\partial_y \varphi(..) + \partial_x \psi(..)] \end{aligned}$$

Mają miejsce równości (war. Riemanna) $\partial_x \varphi = \partial_y \psi = u$, $\partial_y \varphi = -\partial_x \psi = v$

skąd wynika, że

$$\partial_{\bar{z}} W(z, \bar{z}) \equiv 0$$

Funkcja W jest zatem funkcją jednej zmiennej zespolonej, tj. $W = W(z)$. Obliczmy jej pochodną (zwyczajną!)

$$\begin{aligned} W'(z) &= \frac{1}{2} \partial_x \varphi(..) + \frac{1}{2i} \partial_y \varphi(..) + \frac{i}{2} \partial_x \psi(..) + i \frac{1}{2i} \partial_y \psi(..) = \\ &= \frac{1}{2} [\underbrace{\partial_x \varphi(..) + \partial_y \psi(..)}_{=2\partial_x \varphi=2u}] - \frac{1}{2} i [\underbrace{\partial_y \varphi(..) - \partial_x \psi(..)}_{=2\partial_y \varphi=2v}] = u - iv \end{aligned}$$

Wielkość

$$V(z) \equiv W'(z) = (u - iv)(x, y) \quad , \quad z = x + iy$$

nazywamy **prędkością zespoloną**. Funkcja W nosi nazwę **zespolonego potencjału** (prędkości).

Przykłady:

1. Strumień jednorodny $W(z) = V_\infty z$, $V_\infty = u_\infty - i v_\infty$

2. Źródło/upust o środku w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Ln}(z - z_0) \quad , \quad V(z) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$$

3. Wir potencjalny o środku w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - z_0) \quad , \quad V(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0}$$

4. Dipol w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$

$$W(z) = \frac{D}{z - z_0} \quad , \quad V(z) = -\frac{D}{(z - z_0)^2}$$

5. Symetryczny opływ cylindra o środku w początku układu współrzędnych i promieniu a

$$W(z) = V_{\infty}z + \frac{\bar{V}_{\infty}a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln}(z)$$

$$V(z) = V_{\infty} - \frac{\bar{V}_{\infty}a^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$$

Objaśnienie: Logarytm naturalny zmiennej zespolonej to funkcja postaci ($z = |z|e^{i \arg z} = re^{i\theta}$)

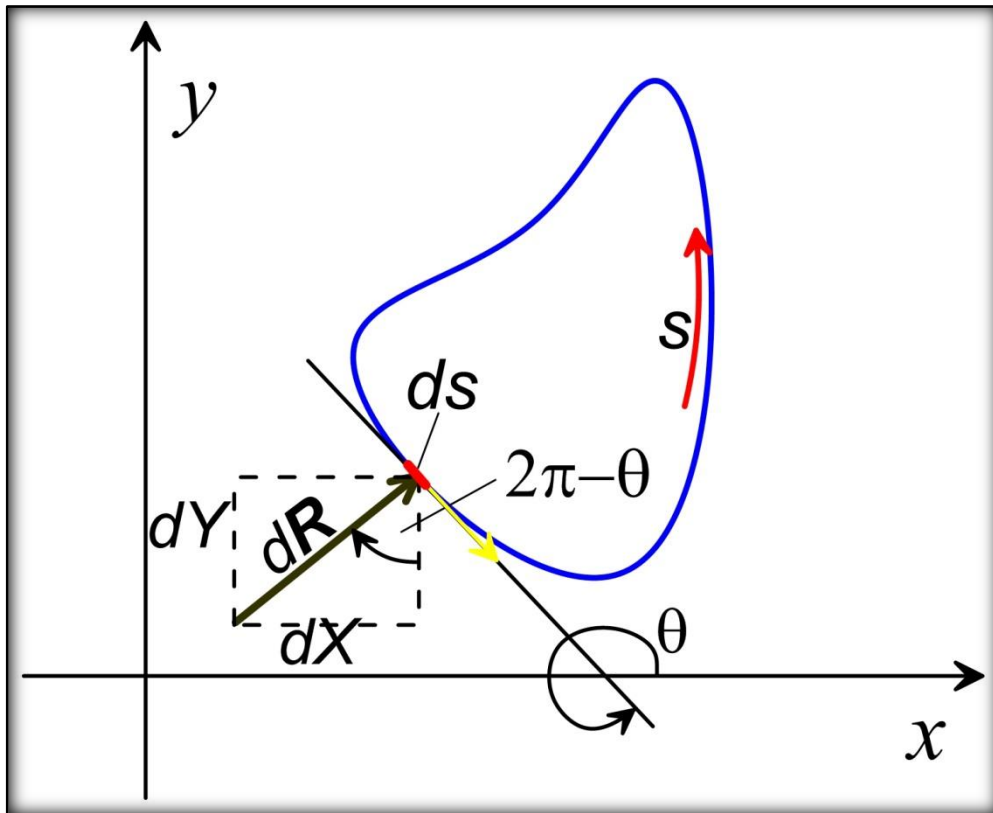
$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \arg z = \ln r + i\theta$$

Zauważmy, że część urojona jest funkcją wielowartościową!

Ćwiczenie:

1. Podaj wzory na potencjał (rzeczywisty) prędkości i funkcje prądu, a następnie na składowe prędkości w kartezjańskim układzie współrzędnych
2. Stosując rachunek zespolony pokaż, że w przykładzie nr 5 linia $z\bar{z} = a^2$ jest istotnie linią prądu.

Siła i moment aerodynamiczny. Wzory Blasiusa



$$dX = dR \sin(2\pi - \theta) = -p(s) \sin \theta ds$$

$$dY = dR \cos(2\pi - \theta) = p(s) \cos \theta ds$$

$$dz = e^{i\theta} ds$$

⇓

$$dx = \cos \theta ds, \quad dy = \sin \theta ds$$

Definiujemy ...

$$d\bar{R} = dX - i dY, \quad d\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times d\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & 0 \\ dX & dY & 0 \end{vmatrix} = (x dY - y dX) \mathbf{e}_z$$

$$d\bar{R} = -p \sin \theta ds - i p \cos \theta ds = -i p (\cos \theta - i \sin \theta) ds = -i p e^{-i\theta} ds = -i p(z) d\bar{z}$$

$$dM_0 = xp \underbrace{\cos \theta ds}_{dx} + yp \underbrace{\sin \theta ds}_{dy} = p(xdx + ydy) = p \Re(zd\bar{z})$$

Z równania Bernoulliego mamy

$$B \equiv p_\infty + \frac{1}{2} \rho (u_\infty^2 + v_\infty^2) = p(z) + \frac{1}{2} \rho |V(z)|^2$$

Stąd

$$p(z) = B - \frac{1}{2} \rho |V(z)|^2 = B - \frac{1}{2} \rho |W'(z)|^2$$

Zauważmy, że na konturze ciała istnieje tylko składowa styczna prędkości czyli moduł prędkości równy jest (modulo znak) prędkości stycznej. Obliczmy liczbę zespoloną postaci (liczba zespolona z należy do konturu ciała)

$$\begin{aligned} W'(z)e^{i\theta} &= (u - iv)(\cos \theta + i \sin \theta) = u \cos \theta + v \sin \theta + i(u \sin \theta - v \cos \theta) = \\ &= u \cos \theta + v \sin \theta + \underbrace{i(u \sin \theta - v \cos \theta)}_{= \vec{V} \cdot \vec{n} = 0} = \\ &= u \cos \theta + v \sin \theta \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy spostrzeżenie, że wektor normalny (zewnątrzny) do konturu ciała ma postać $\mathbf{n} = [-\sin \theta, \cos \theta]$.

Z przeprowadzonego rachunku wynika zatem, że wielkość $W'(z)e^{i\theta}$ jest na konturze ciała liczbą rzeczywistą oraz $|W'(z)e^{i\theta}| = |W'(z)|$. Wobec tego, rozkład ciśnienia na konturze można zapisać wzorem

$$p(z) = B - \frac{1}{2} \rho [W'(z)]^2 e^{2i\theta}$$

Aerodynamiczna „siła sprzężona” i moment wyrażają się całkami krzywoliniowymi (po konturze ciała) postaci

$$\bar{R} = -\oint i p(z) d\bar{z} \quad , \quad M_0 = -\Re \oint p(z) z d\bar{z}$$

Podstawiamy z równania Bernoulliego. Obliczamy wartość siły

$$\bar{R} = -i \oint \left\{ B - \frac{1}{2} \rho [W'(z)]^2 e^{2i\theta} \right\} d\bar{z} = -iB \oint d\bar{z} + \frac{1}{2} i \rho \oint [W'(s)]^2 \underbrace{e^{2i\theta} e^{-i\theta} ds}_{e^{i\theta} ds=dz} = \frac{i\rho}{2} \oint [W'(z)]^2 dz$$

Otrzymaliśmy (pierwszy) **wzór Blasiusa**

$$X - iY = i \frac{\rho}{2} \oint [W'(z)]^2 dz$$

Obliczamy wartość momentu aerodynamicznego

$$\begin{aligned} M_0 &= \Re \oint \left\{ B - \frac{1}{2} \rho [W'(z)]^2 e^{2i\theta} \right\} z d\bar{z} = \underbrace{B \Re \oint z d\bar{z}}_0 - \frac{\rho}{2} \Re \oint [W'(s)]^2 z \underbrace{e^{2i\theta} e^{-i\theta} ds}_{e^{i\theta} ds=dz} = \\ &= -\frac{\rho}{2} \Re \oint [W'(z)]^2 z dz \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zwięzłą formułę (**drugi wzór Blasiusa**)

$$M_0 = -\frac{\rho}{2} \Re \oint [W'(z)]^2 z dz$$

Ciekawa (i ważna praktycznie) cecha całkowania po konturze funkcji zespolonych polega na tym, że **jeśli zmiana konturu całkowania nie zmienia zbioru osobliwości funkcji całkowanej znajdujących się w obszarze otoczonym konturem, to wartość całki również nie ulega zmianie.**

Jeśli wszystkie osobliwości znajdują się we wnętrzu konturu ciała to siłę i/lub moment aerodynamiczny można obliczyć całkując po wygodnie dobranej linii – takim wyborem może być kontur okręgu K_∞ o wielkim promieniu R_∞ , obejmujący kontur ciała.

Ponieważ wszystkie osobliwości (wiry, źródła, dipole - punktowe lub rozłożone) zwarte są wewnątrz konturu ciała to prędkość zespolona daleko od ciała może być zapisana wzorem

$$W'(z) = V_\infty + \frac{Q_{total}}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{\Gamma_{total}}{2\pi i} \frac{1}{z} + o(z^{-1})$$

gdzie symbole Q_{total} i Γ_{total} oznaczają – odpowiednio – sumaryczny wydatek wszystkich źródeł/upustów w przepływie oraz całkowity ładunek cyrkulacji. Ostatni człon wzoru zawiera wszystkie składniki znikające wraz z powiększaniem odległości od ciała szybciej niż $1/|z|$.

Założmy, że $Q_{total} = 0$ i obliczmy kwadrat $W'(z)$...

$$[W'(z)]^2 = V_\infty^2 + \frac{V_\infty \Gamma_{total}}{\pi i} \frac{1}{z} + o(z^{-1})$$

Obliczamy siłę ze wzoru Blasiusa ...

$$X - iY = i \frac{\rho}{2} \oint [W'(z)]^2 dz = i \frac{\rho}{2} \frac{V_\infty \Gamma_{total}}{\pi i} \oint \frac{dz}{z} = i \rho \Gamma V_\infty$$

$= 2\pi i$

Biorąc pod uwagę, że $V_\infty = u_\infty - iv_\infty$ mamy

$$X = \rho\Gamma v_\infty \quad , \quad Y = -\rho\Gamma u_\infty$$

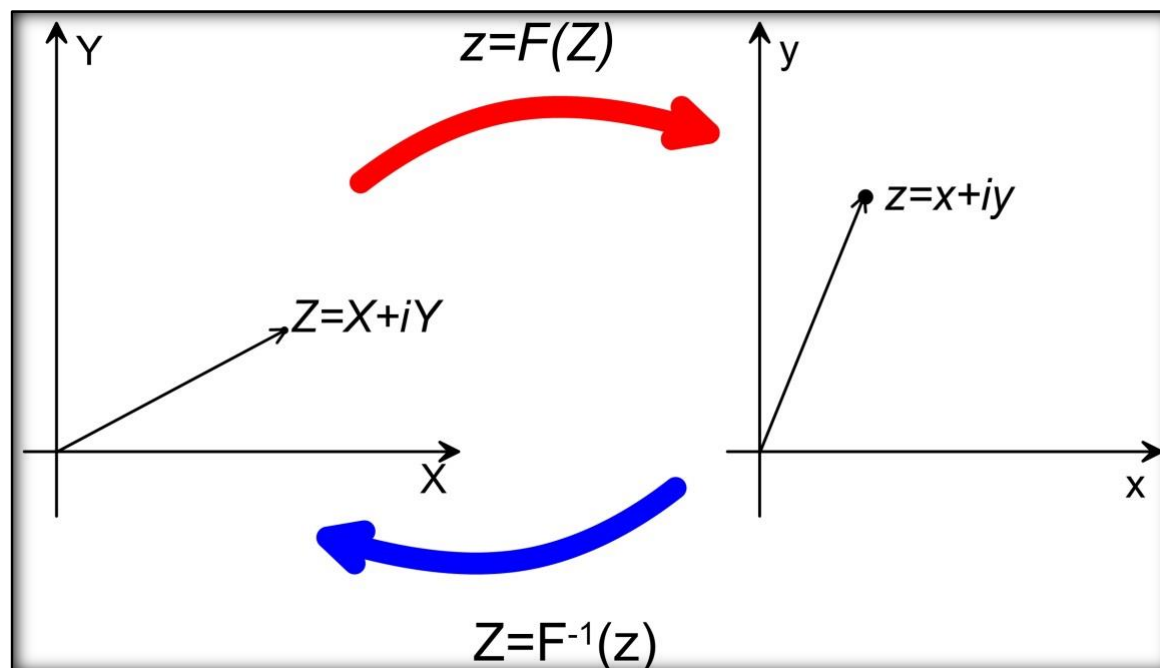
Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, wektor siły aerodynamicznej jest skierowany prostopadle to kierunku prędkości strumienia niezaburzonego. Istotnie,

$$\vec{R} \cdot \vec{V}_\infty = Xu_\infty + Yv_\infty = \rho\Gamma(v_\infty u_\infty - u_\infty v_\infty) = 0$$

Nie występuje zatem opór aerodynamiczny (paradoks d'Alemberta). Siła nośna równa jest zatem długości wektora \vec{R} i jest co do modułu równa

$$L = \rho|\Gamma|\sqrt{u_\infty^2 + v_\infty^2}$$

Wykorzystanie transformacji konforemnych



Transformacja konforemna

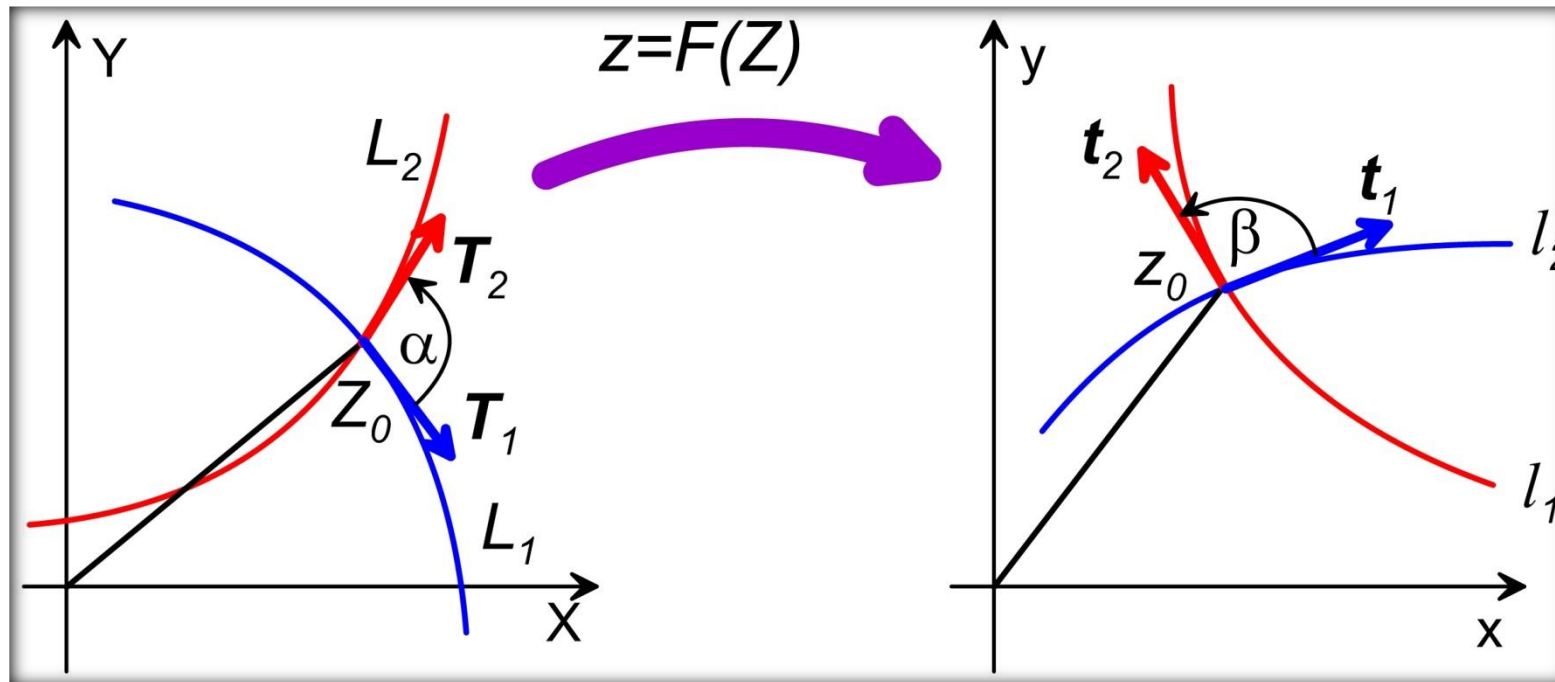
$$z = F(Z)$$

W zapisie rzeczywistym:

$$x = f(X, Y) \quad , \quad y = g(X, Y)$$

$$f = \Re F \quad , \quad g = \Im F$$

Funkcje f i g spełniają warunki Cauchy-Riemanna: $\partial_X f = \partial_Y g$, $\partial_Y f = -\partial_X g$



O co chodzi z tą konforemnością? Rozważmy transformację pary linii (opisanych funkcjami różniczkowalnymi w sposób ciągły) – vide powyższy rysunek. Pokażemy, że **kąt pomiędzy tymi liniami w punkcie ich przecięcia zachowuje swoją wartość** (tj. $\alpha = \beta$), o ile tylko pochodna zespolona $0 < |F'(Z_0)| < \infty$ (tj. Z_0 jest punktem regularnym transformacji).

Jasnym jest, że kąt pomiędzy krzywymi to kąt pomiędzy wektorami stycznymi do nich w punkcie przecięcia tych krzywych. Zatem – **jak transformują się wektory styczne?**

W przypadku ogólnym, wektory styczne do zadanej krzywej transformują się wg przekształcenia liniowego danego przez lokalną wartość macierzy Jacobiego transformacji. W aktualnym przypadku macierz ta ma postać

$$J_F = \begin{bmatrix} \partial_X f & \partial_Y f \\ \partial_X g & \partial_Y g \end{bmatrix} \stackrel{\substack{\text{warunki} \\ C-R}}{=} \begin{bmatrix} \partial_X f & \partial_Y f \\ -\partial_Y f & \partial_X f \end{bmatrix} \stackrel{\substack{\text{warunki} \\ C-R}}{=} \begin{bmatrix} \partial_Y g & -\partial_X g \\ \partial_X g & \partial_Y g \end{bmatrix}$$

Wobec tego wzory transformacyjne dla wektora stycznego mają postać:

$$t_x = \partial_X f T_X + \partial_Y f T_Y \quad , \quad t_y = -\partial_Y f T_X + \partial_X f T_Y$$

Wprowadźmy teraz zespolone „wektory styczne”

$$T = T_X + iT_Y \quad , \quad t = t_x + it_y$$

Z wcześniejszych rozważań wnioskujemy, że jedną z postaci pochodnej zespolonej transformacji F jest

$$F'(Z) = \partial_X f(X, Y) - i\partial_Y f(X, Y)$$

Zauważmy, że wzory transformacyjne dla wektorów stycznych otrzymamy wykonując mnożenie zespolone

$$t(z) = F'(Z)T(Z) \quad , \quad z = F(Z)$$

Oznacza to, że w przypadku przedstawionym na rysunku mamy równości

$$t_1(z_0) = F'(Z_0)T_1(Z_0) \quad , \quad t_2(z_0) = F'(Z_0)T_2(Z_0)$$

Dalej, zauważmy, że iloczyn skalarny wektorów można otrzymać z wyniku mnożenia ich zespolonych odpowiedników, a mianowicie

$$\begin{aligned} t_1 \bar{t}_2 &= [(t_1)_x + i(t_1)_y][(t_2)_x - i(t_2)_y] = (t_1)_x(t_2)_x + (t_1)_y(t_2)_y - i[(t_1)_x(t_2)_y - (t_1)_y(t_2)_x] = \\ &= \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 - i(\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2)_z \end{aligned}$$

czyli $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = \Re(t_1 \bar{t}_2)$.

Po tym przygotowaniu możemy wykazać równość kątów. Obliczmy iloczyn

$$t_1(z_0)\bar{t}_2(z_0) = F'(Z_0)T_1(Z_0)\bar{F}'(Z_0)\bar{T}_2(Z_0) = |F'(Z_0)|^2 T_1(Z_0)\bar{T}_2(Z_0)$$

Jednocześnie długości wektorów stycznych transformują się następująco:

$$\|\mathbf{t}_1\|_2 = \sqrt{\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_1} = \sqrt{t_1 \bar{t}_1}(z_0) = \sqrt{|F'(Z_0)|^2 T_1 \bar{T}_1} = |F'(Z_0)| \sqrt{T_1 \bar{T}_1} = |F'(Z_0)| \|\mathbf{T}_1\|_2$$

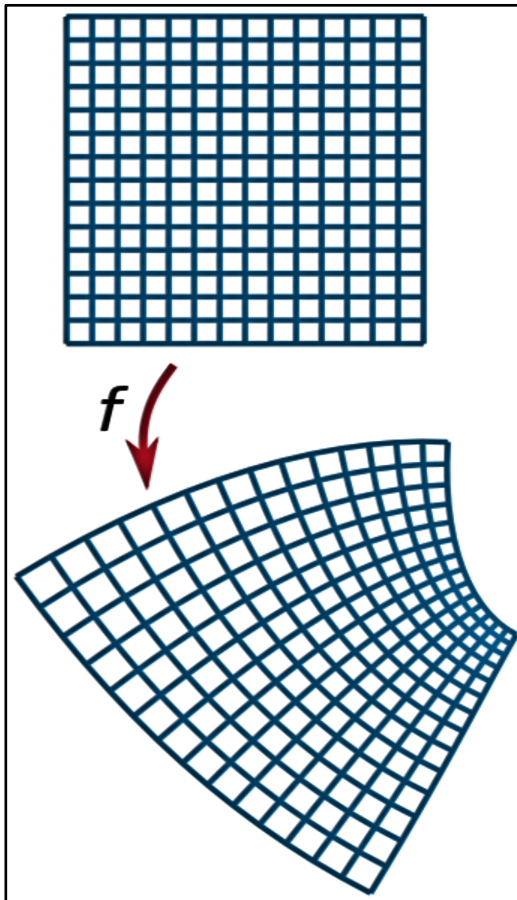
i analogicznie

$$\|\mathbf{t}_2\|_2 = |F'(Z_0)| \|\mathbf{T}_2\|_2$$

Z otrzymanych formuł wynika, że

$$\frac{t_1(z_0)\bar{t}_2(z_0)}{\|t_1\|_2\|t_2\|_2} = \frac{|F'(Z_0)|^2 T_1(Z_0)\bar{T}_2(Z_0)}{|F'(Z_0)|\|T_1\|_2|F'(Z_0)|\|T_2\|_2} = \frac{T_1(Z_0)\bar{T}_2(Z_0)}{\|T_1\|_2\|T_2\|_2}$$

co z kolei implikuje jednoczesną równość funkcji cosinus i sinus kątów α i β , a więc równość tych kątów. Koniec dowodu.



Z powyższego wynika, że jeśli na płaszczyźnie (X, Y) mamy zadaną ortogonalną siatkę linii (vide) obrazek to po przekształceniu siatki transformacją konforemą pozostaje ona ortogonalna (we wszystkich regularnych punktach transformacji). Własność tę wykorzystuje się w Obliczeniowej Mechanice Płynów (ang. Computational Fluid Dynamics – CFD) do generacji numerycznej siatek.

Ważną własnością transformacji konforemnej jest również **zachowanie cyrkulacji transformowanego przepływu potencjalnego**.

Niech $W = W(Z)$ będzie potencjałem zespolonym przepływu określonego na płaszczyźnie (zwykle – w pewnym jej podzbiorze) (X, Y) . Transformacja konforemna $z = F(Z)$ przekształca ten przepływ w nowy przepływ potencjalny na płaszczyźnie (x, y) o potencjale zespolonym $w = w(z)$ takim, że:

$$W(Z) = w[F(Z)] \quad \text{i} \quad w(z) = W[F^{-1}(z)]$$

Z podanych wzorów wynikają następujące formuły transformacji prędkości zespolonej

$$W'(Z) = w'[F(Z)]F'(Z) \quad \text{i} \quad w'(z) = W'[F^{-1}(z)](F^{-1})'(z) = \frac{W'[F^{-1}(z)]}{F'[F^{-1}(z)]}$$

Cyrkulacja pola prędkości wzdłuż linii L na płaszczyźnie (X, Y) dana jest wzorem

$$\Gamma = \int_L U_X dX + U_Y dY = \Re \int_L (U_X - iU_Y)(dX + idY) = \Re \int_L W'(Z) dZ$$

Zauważmy, że

$$\int_L W'(Z) dZ = \int_L w'[F(Z)] F'(Z) dZ = \int_l w'(z) dz$$

gdzie symbolem l oznaczyliśmy obraz krzywej L w transformacji F . Otrzymana równość dowodzi faktu zachowania cyrkulacji w transformacji konforemnej.

Ważny (dość ...) przykład – transformacja Żukowskiego

Rozważmy transformację konforemną postaci

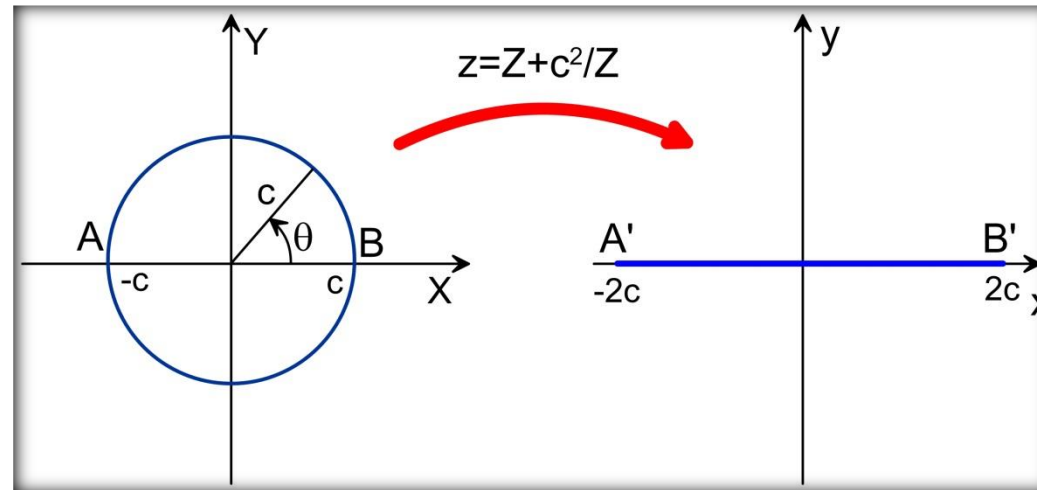
$$z = F(Z) = Z + \frac{c^2}{Z}, \quad c \in R, \quad c > 0$$

Pochodna transformacji ma postać

$$F'(Z) = 1 - \frac{c^2}{Z^2}$$

Punkty osobliwe: $(0,0)$, $(\pm c,0)$.

PRZYPADEK 1: Transformacja Żukowskiego okręgu o równaniu $|Z|=c$.



Obrazem okręgu jest odcinek („płaska płytką”) położona symetrycznie na osi Ox

$$z(\theta) = ce^{i\theta} + ce^{-i\theta} = 2c \cos \theta$$

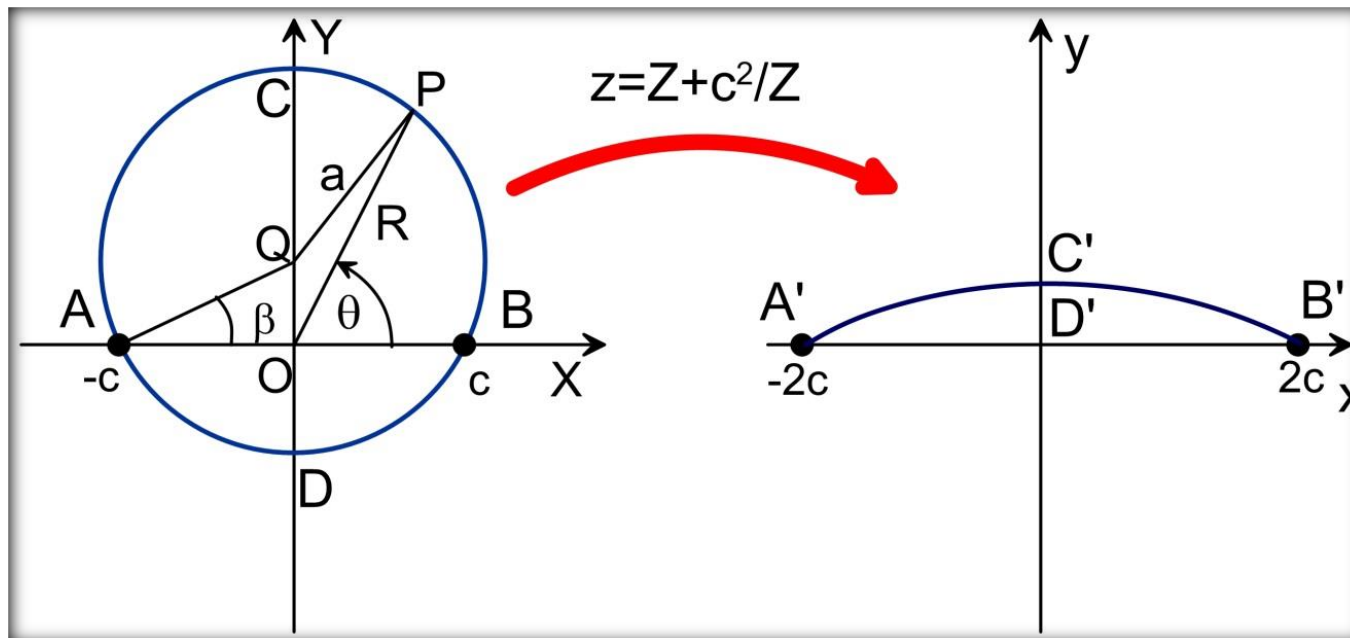
Zauważmy, że punkty osobliwe transformacji położone są na okręgu.

Zadanie 1: Skonstruuj przepływ wokół okręgu na płaszczyźnie (X, Y) w taki sposób, aby punkty spiętrzenia zajęły pozycję kątową $\theta = 0$ i $\theta = \pi + 2\alpha$ (potrzebny jest właściwy dobór $V_\infty = u_\infty - iv_\infty$ oraz cyrkulacji Γ). Następnie dokonaj transformacji pola prędkości i oblicz rozkład prędkości na płytce. Oblicz współczynniki siły nośnej na płytce

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho |V_\infty|^2 4c} = \frac{\Gamma}{2c |V_\infty|}$$

Zadanie 2: Napisz program komputerowy (dowolny język), który stabilizuje funkcję prądu przepływu z Zadania 1 w obszarze prostokątnym $[-6c, 6c] \times [-4c, 4c]$. Przyjmij $c = 1$ i $\alpha = 15^\circ$.

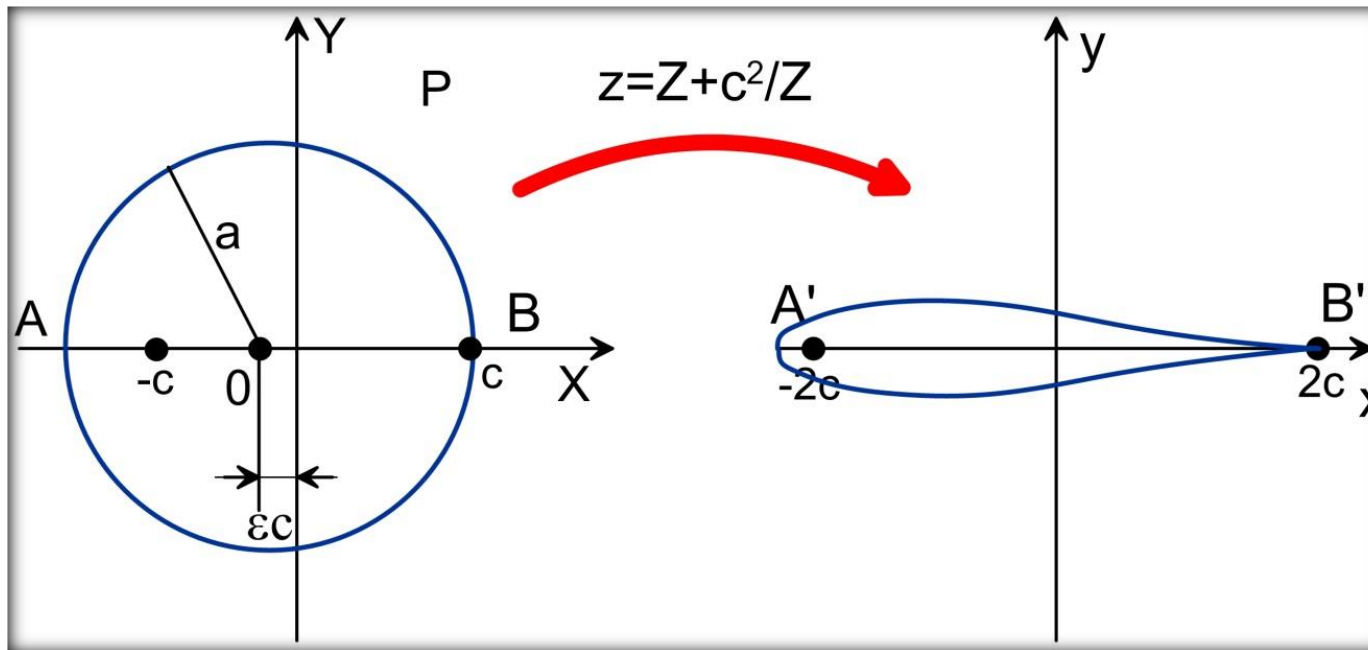
PRZYPADEK 2: Transformacja Żukowskiego okręgu $|Z - a \sin \beta| = a$, $a = \frac{b}{\cos \beta}$.



Okrąg transformowany jest w łuk okręgu o równaniu (wyprowadzenie – np. w „Fluid Mechanics” 5th Ed., autorzy P.K. Kundu, I.M. Cohen, D.R. Dowling)

$$x^2 + (y + 2c \operatorname{ctg} 2\beta)^2 = (2c / \sin 2\beta)^2$$

PRZYPADK 3: Transformacja okręgu $|Z + \varepsilon c| = c(1 + \varepsilon) \equiv a$

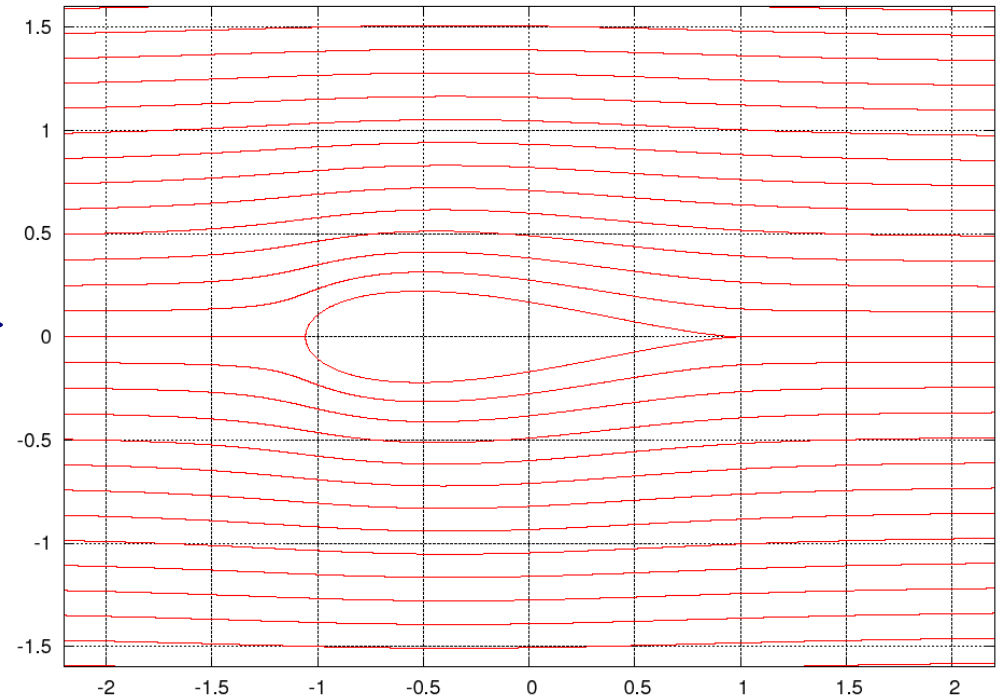
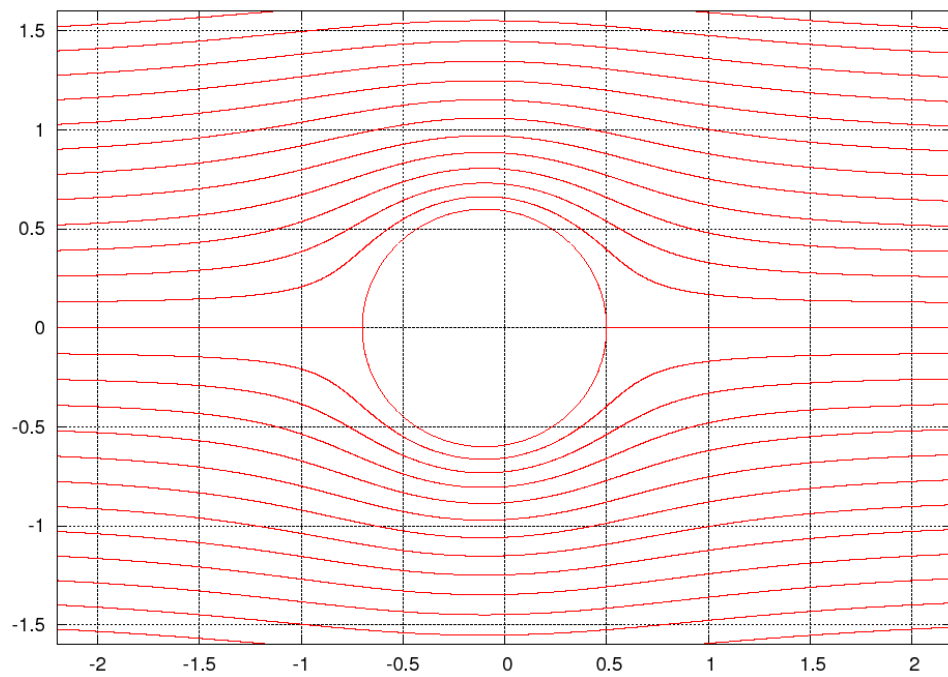


Obraz – symetryczny profil Żukowskiego (dla małych wartości parametru ε , grubość maksymalna profilu $\approx 1.3 \varepsilon \cdot 4c$ osiągnięta jest w pobliżu $\frac{1}{4}$ cięciwy).

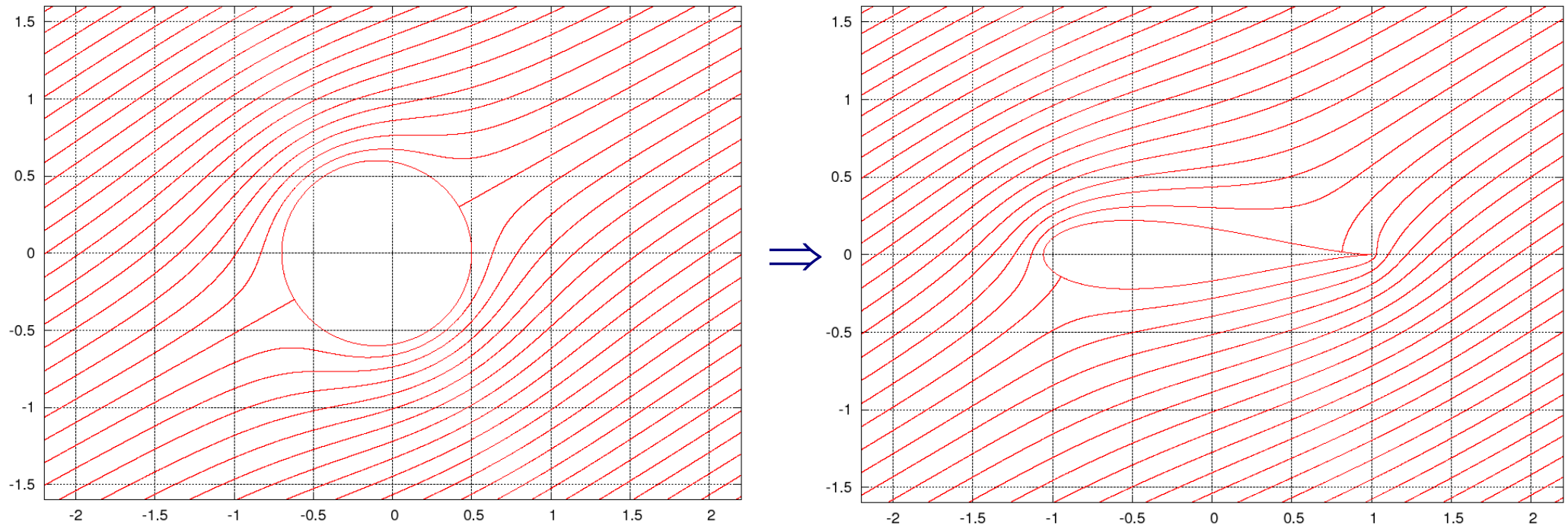
Warunek Kutty-Żukowskiego - w przepływie na płaszczyźnie (X, Y) punkt B jest punktem o zerowej prędkości (punktem spiętrzenia). Wówczas w punkcie B' prędkość sływu jest określona jednoznacznie i jest skończona (ale nierówna zero – ostrze o zerowym kącie)

Trochę obrazków ...

Symetryczny opływ symetrycznego profilu Żukowskiego

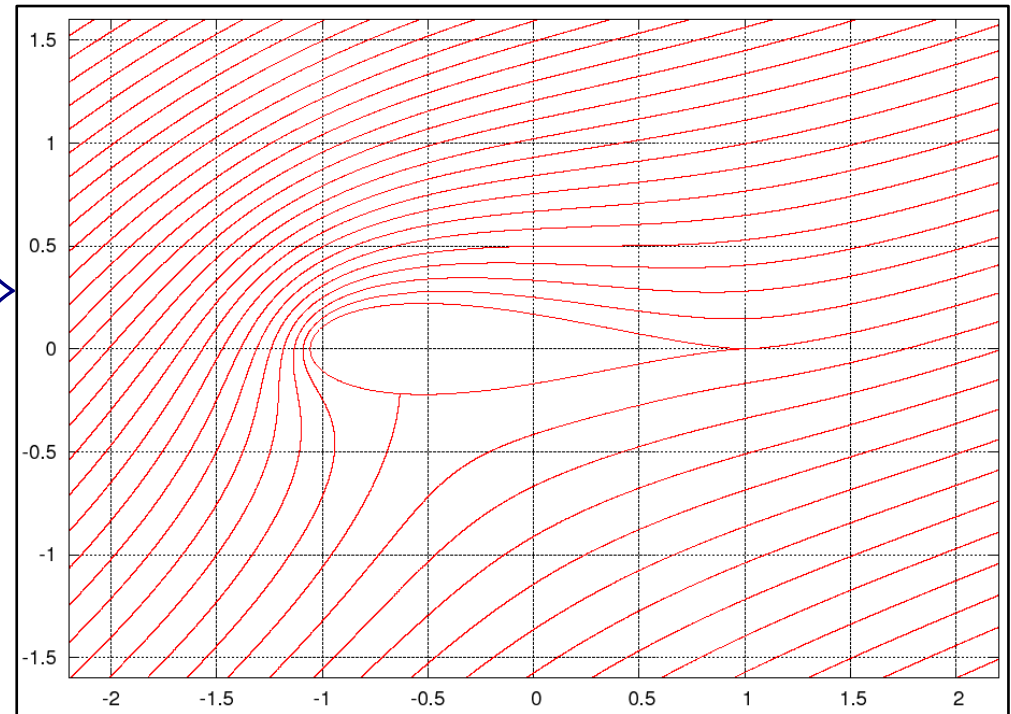
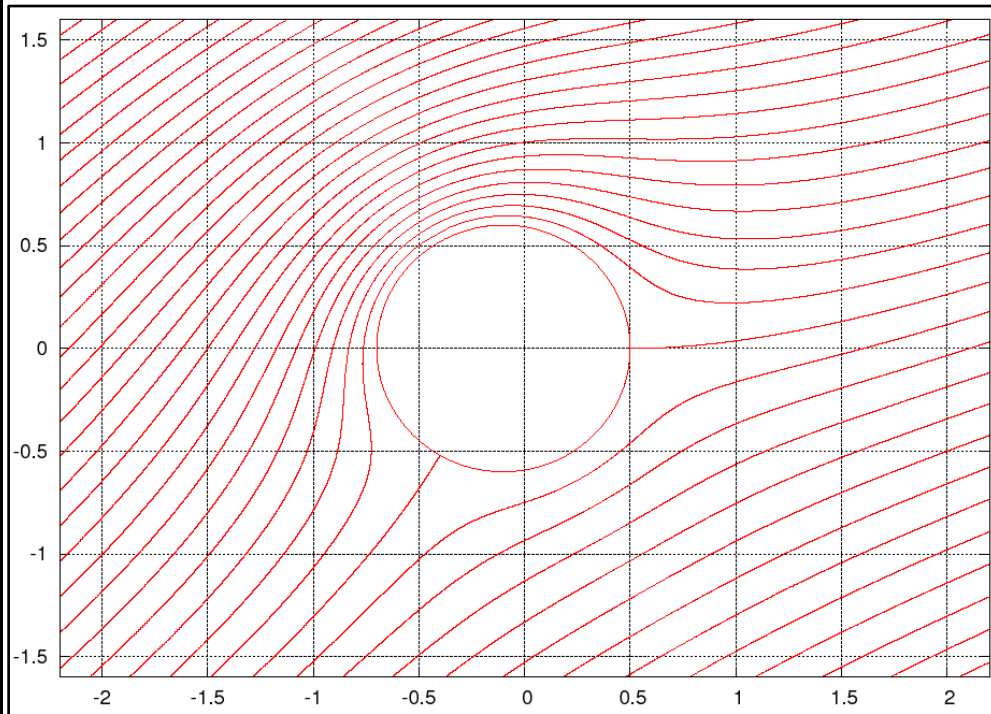


Optyw symetrycznego profilu Żukowskiego pod niezerowym kątem natarcia



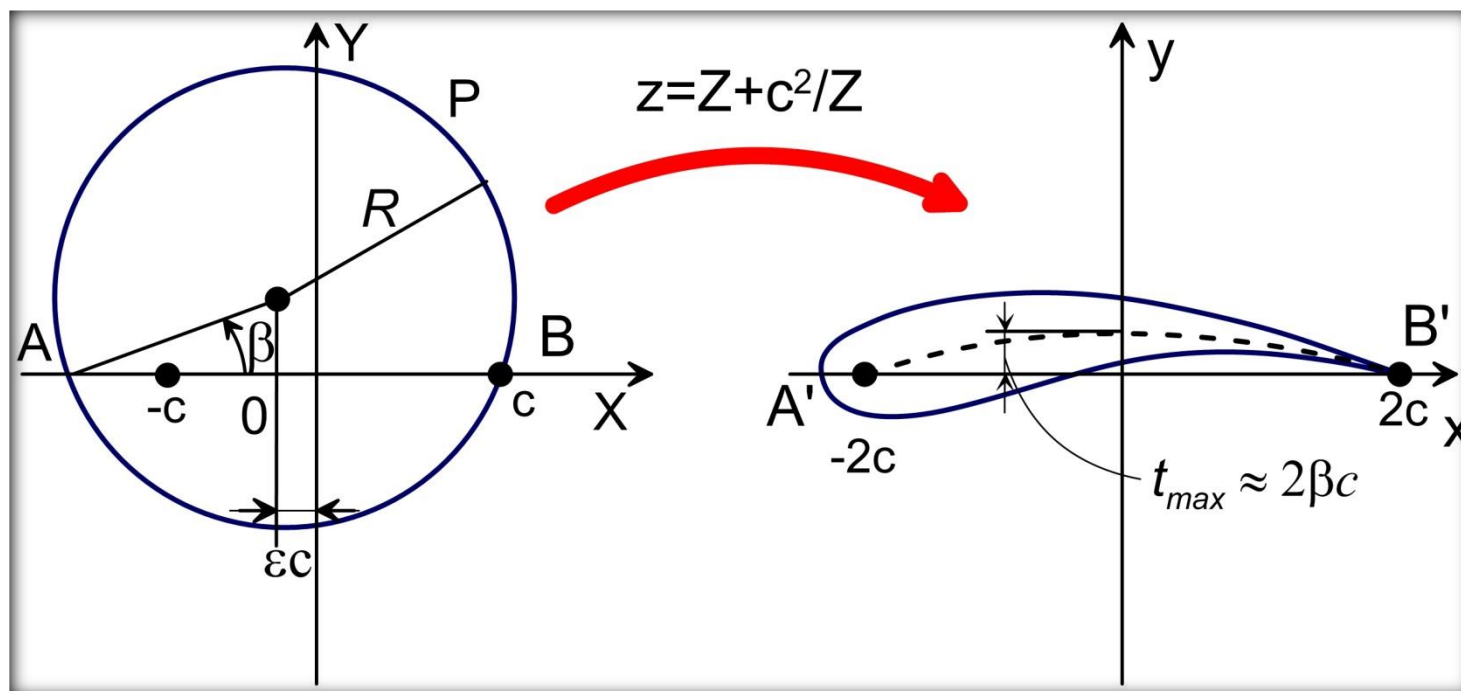
Przepływ z zerową cyrkulacją (i siłą nośną), kąt natarcia $\alpha = 30^\circ$ – warunek Kutty-Żukowskiego pogwałcony

Optyw symetrycznego profilu Żukowskiego pod niezerowym kątem natarcia (c.d.)



Przepływ w cyrkulacją Γ dobraną tak, aby warunek Kutty-Żukowskiego był spełniony. Na profilu wytwarzana jest siła nośna $L = \rho |\Gamma| V_\infty$. Kąt natarcia $\alpha = 30^\circ$

PRZYPADEK 3: Transformacja okręgu $|Z - (-\varepsilon c + ia \operatorname{tg} \beta)| = (a / \cos \beta)^2$, $a = c(1 + \varepsilon)$

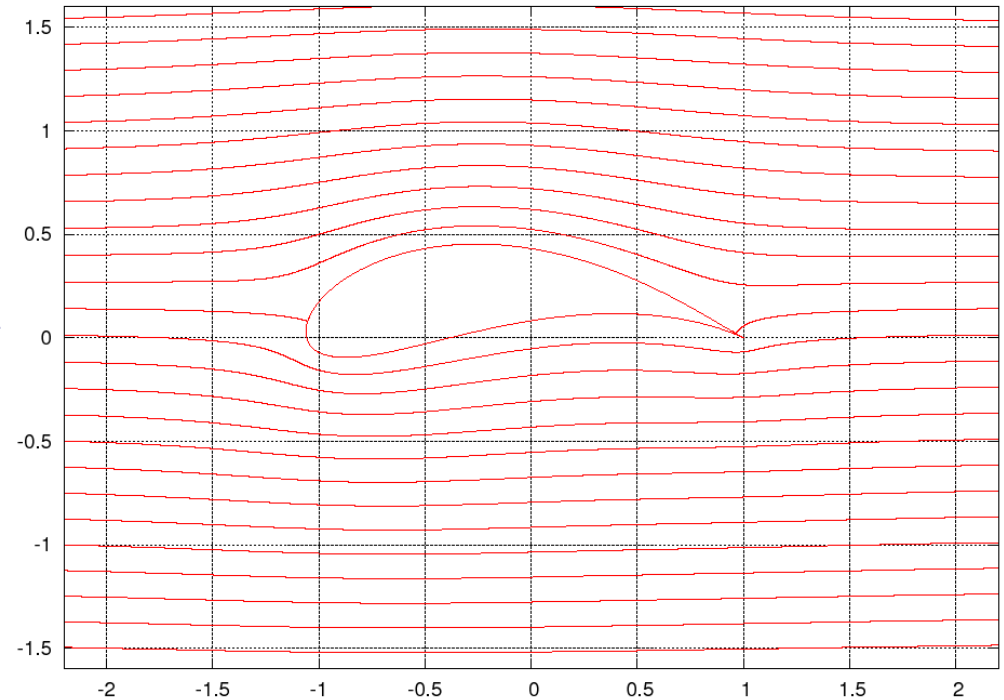
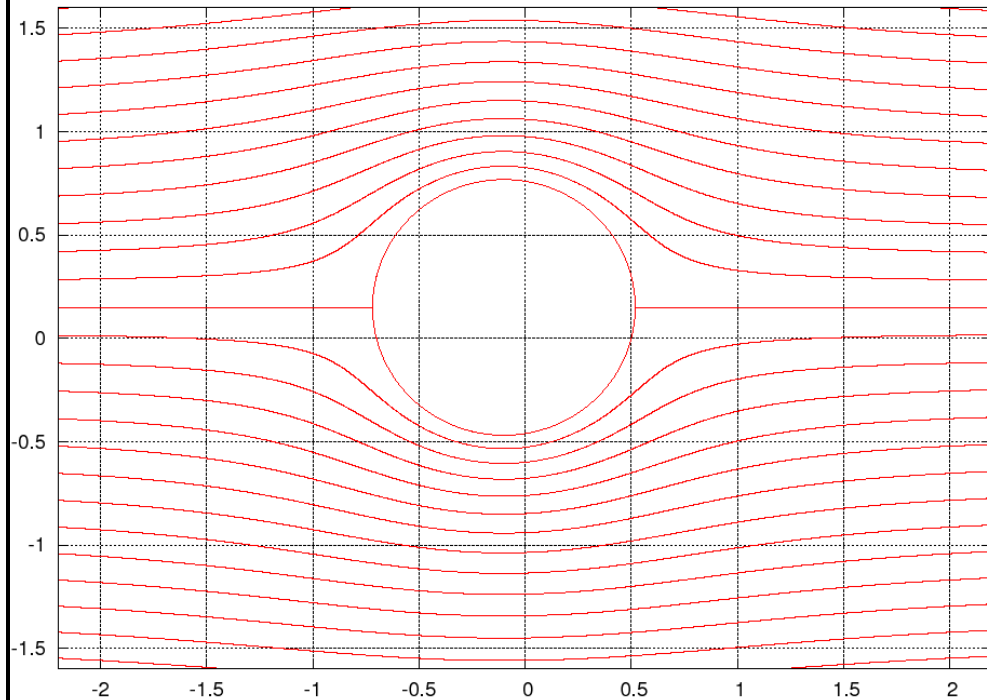


Dla $\varepsilon \ll 1$ i małych kątów β mamy:

- cięciwa profilu $\approx 4c$,
- wygięcie linii szkieletowej $\approx 2c\beta$,
- maksymalna grubość profilu $t_{max} / 4c \approx 1.3\varepsilon$ (osiągana ok. $\frac{1}{4}$ cięciwy od noska czyli dla $x \approx -c$)

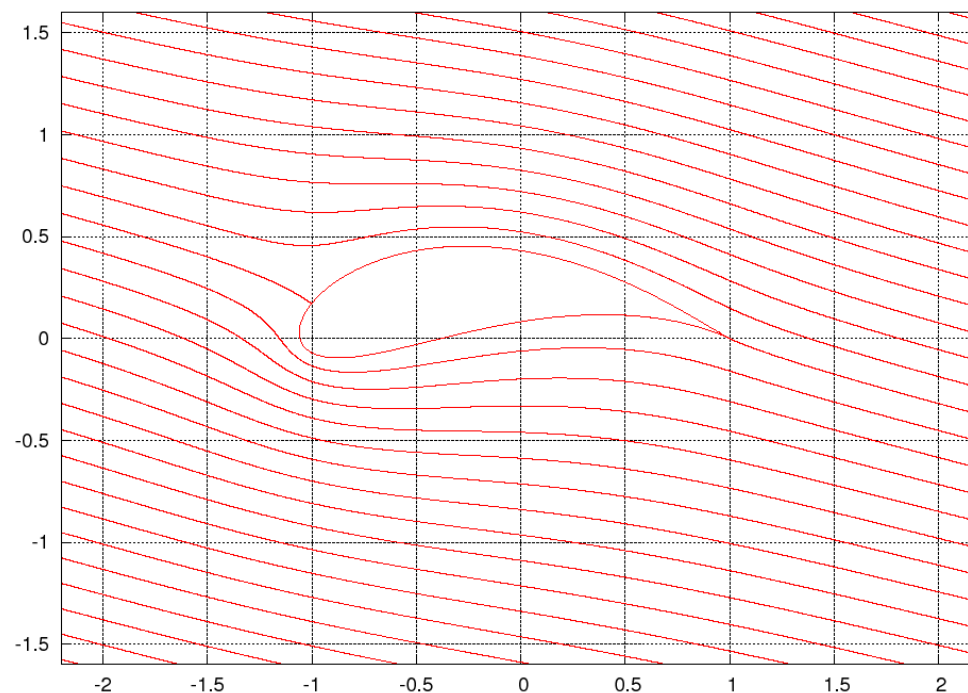
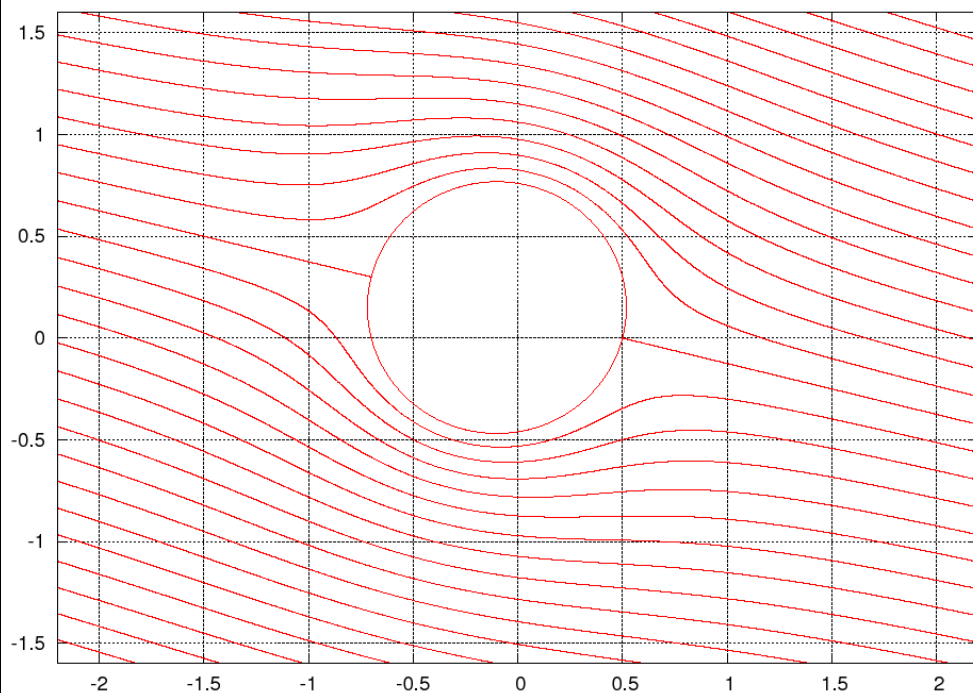
Ponownie, trochę obrazków ...

Optyw niesymetrycznego profilu Żukowskiego pod zerowym kątem natarcia

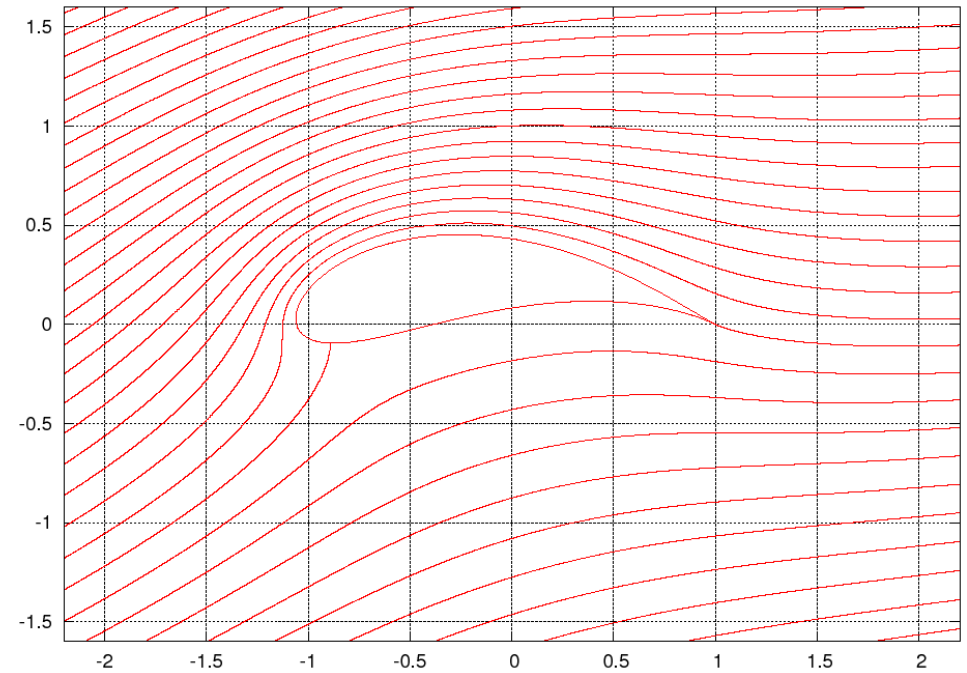
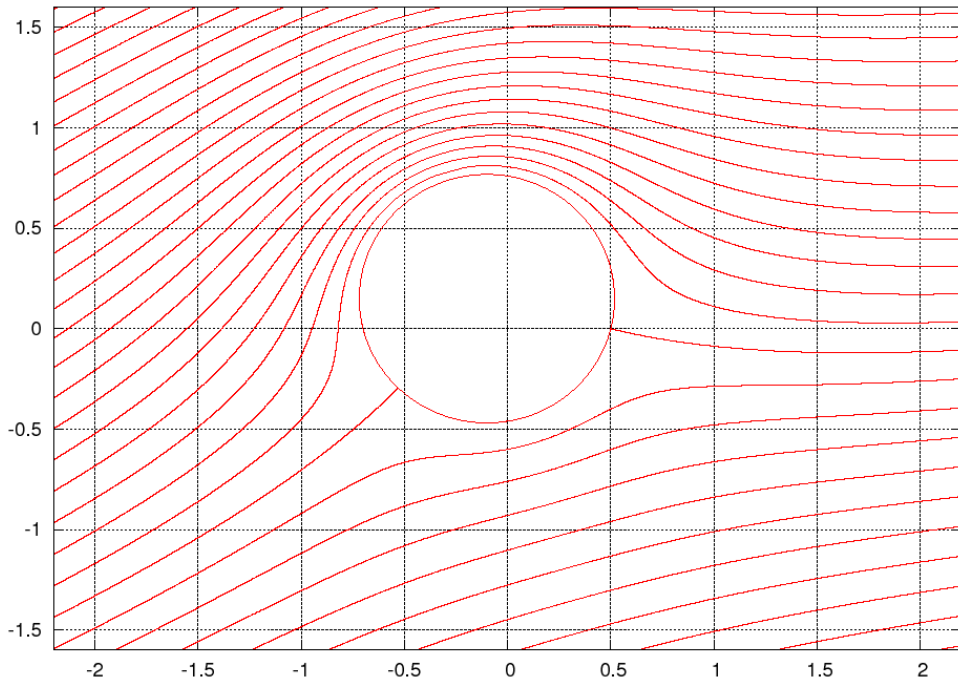


Przepływ w zerową cyrkulacją – warunek K-Ż nie jest spełniony. Niesymetryczny profil Żukowskiego ustawiony pod zerowym kątem natarcia musi wytwarzać siłę nośną!

Opływ niesymetrycznego profilu Żukowskiego pod niezerowym kątem natarcia

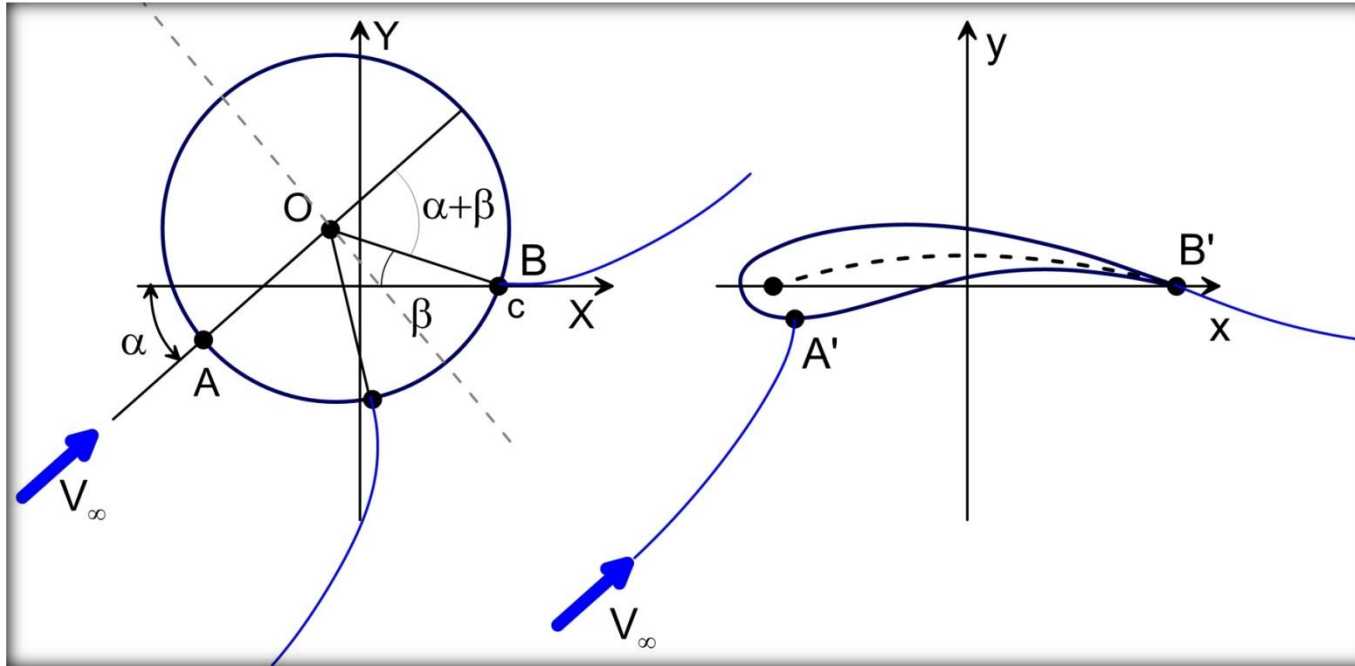


Poprawny, tj. spełniający warunek Kutty-Żukowskiego przepływ wokół tego samego profilu ustawionego pod ujemnym kątem natarcia $\alpha \approx -13.7^\circ$. Cyrkulacja w przepływie jest równa zero, tj. profil nie wytwarza siły nośnej.



Poprawny, tj. spełniający warunek Kutty-Żukowskiego przepływ wokół tego samego profilu ustawionego pod dodatnim kątem natarcia $\alpha = 16^\circ$.

Siła nośna na profilu Żukowskiego



Warunek K-Ż wymaga, aby punkt B na okręgu był punktem spiętrzenia. Z teorii potencjalnego opływu konturu kołowego wynika, że cyrkulacja wiru związanego z profilem musi być równa

$$\Gamma = 4\pi V_\infty R \sin(\alpha + \beta) \quad (R - \text{promień koła})$$

Współczynnik siły nośnej jest zatem równy (*ciężciwa* $\approx 4R$)

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot \text{ciężciwa}} = \frac{2\Gamma}{V_\infty \cdot \text{ciężciwa}} \approx 2\pi \sin(\alpha + \beta) \approx 2\pi(\alpha + \beta)$$

Wnioski:

- dla małych ugięć linii szkieletowej (pamiętamy, że względne wygięcie tej linii jest równe $\frac{1}{2}\beta$) pochodna $\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi$,
- wygięcie powoduje przesunięcie pionowe charakterystyki $C_L = C_L(\alpha)$,
- zerowa siła nośna występuje dla ujemnego kąta natarcia $\alpha = -\beta$

Zadania (zaawansowane):

1. Na podstawie analizy opływu symetrycznego profilu Żukowskiego wykaż, że - dla małych wartości ε - pochodna

$$\frac{1}{2\pi} \frac{dC_L}{d\alpha} \approx 1 + \varepsilon$$

Jak – wobec tego – zależy nachylenie charakterystyki siły nośnej od grubości profilu?

Wskazówka: Oblicz jak zmienia się cięciwa profilu dla małych wartości ε .

2. Przeprowadź dokładniejszą analizę wpływu wygięcia linii szkieletowej na wartość pochodnej $\frac{dC_L}{d\alpha}$ (dla uproszczenia rozważ przypadek wygiętego profilu o zerowej grubości, tj. niech $\varepsilon = 0$) i pokaż, że dla małych ugięć ma miejsce przybliżona zależność

$$\frac{dC_L}{d\alpha} \approx 2\pi(1 + 2\bar{f}^2)$$

gdzie symbol \bar{f} oznacza względną strzałkę ugięcia linii szkieletowej profilu, czyli stosunek maksymalnego ugięcia tej linii do cięciwy profilu.