Wytrzymałość konstrukcji 1

Wykład 4

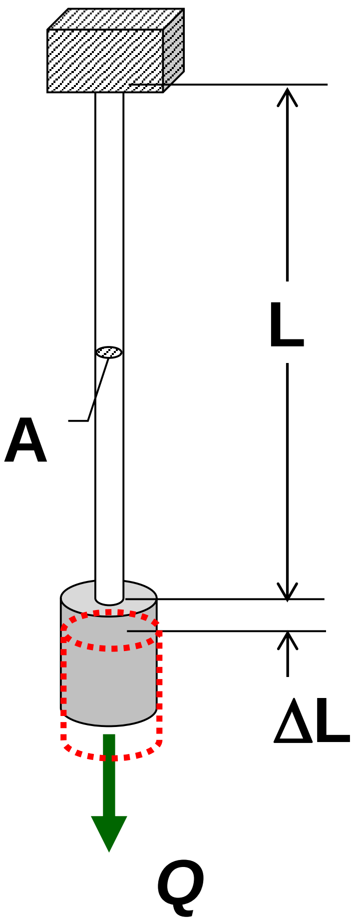
Prawa konstytutywne

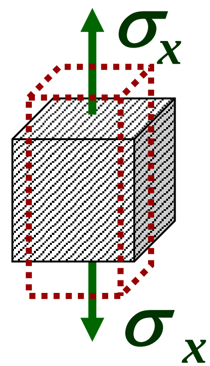
Uogólnione prawo Hooke'a

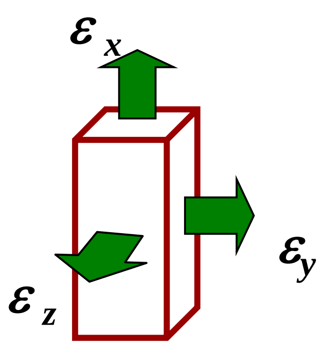
Dr hab. inż. Piotr Marek

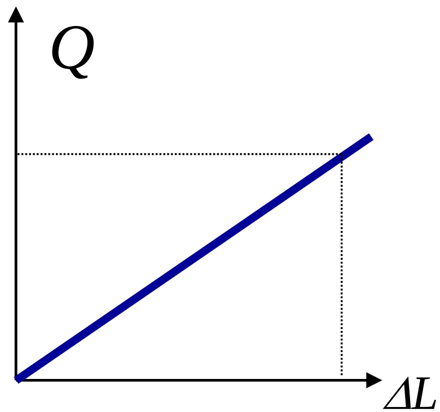
Prawo Hooke'a

Metalowy pręt o długości **L** i polu przekroju poprzecznego **A**, obciążony siłą **Q** pochodzącą od ciężarka zawieszonego na jego końcu, doznaje wydłużenia o **ΔL**









$$\Delta L \sim \frac{Q \cdot L}{A}$$

$$\frac{\Delta L}{L} \sim \frac{Q}{A} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x \sim \sigma_x$$

$$\rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

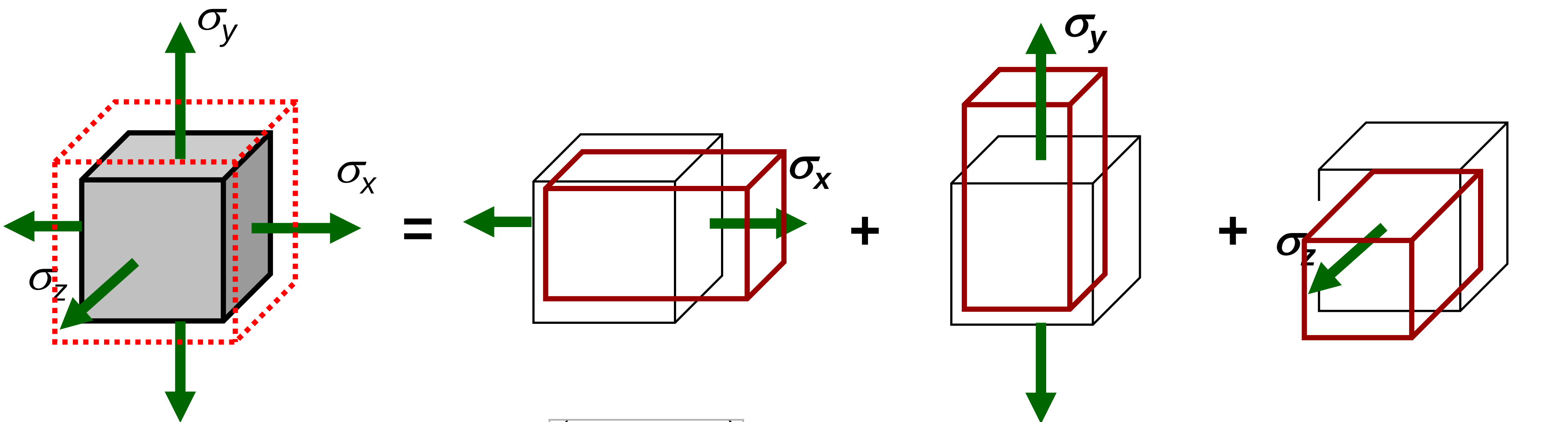
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

E *- moduł Younga*

ν *- stała Poissona*

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów prostego rozciągania



$$\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\right) \qquad \left(\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z\right) \qquad \left(\varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \varepsilon''_z\right) \qquad \left(\varepsilon'''_x, \varepsilon'''_y, \varepsilon'''_z\right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon'_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon'_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

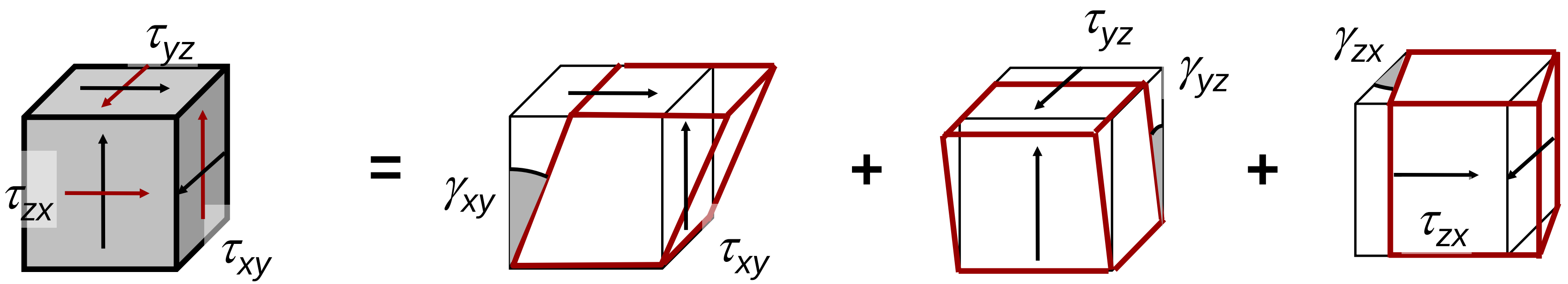
$$\varepsilon''_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon''_z = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon'''_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon'''_y = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Efektem działania naprężeń normalnych jest stan odkształceń liniowych

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów ścinania kolejno w trzech płaszczyznach



Efektem działania naprężeń tnących jest stan odkształceń postaciowych

$$\left(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\right) \qquad \left(\gamma_{xy}, 0, 0\right) \qquad \left(0, \gamma_{yz}, 0\right) \qquad \left(0, 0, \gamma_{zx}\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

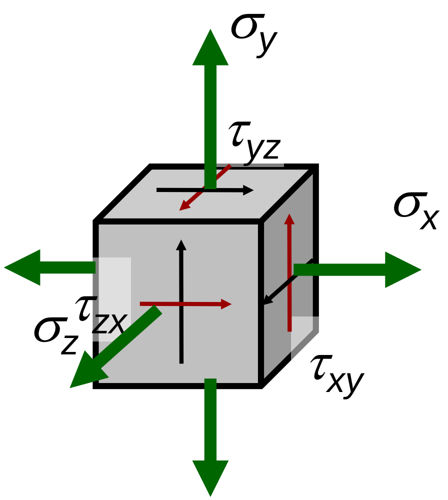
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

G - *moduł Kirchhoffa*

Uogólnione prawo Hooke'a

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w stanie trójwymiarowym



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

E - *moduł Younga*
ν - *stała Poissona*
G - *moduł Kirchhoffa*

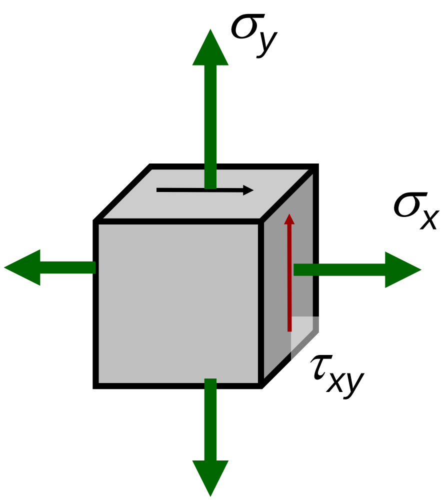
Dla materiałów izotropowych:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Materiał	E MPa	ν
stal[2] St 3 S (~0,18% C, ~0,5% Mn)	$2{,}06 \cdot 10^5$	0,29
stal sprężynowa[3] 60 SGH	$2{,}08 \cdot 10^5$	0,30
stop Al-Cu (dural D 16)	$7{,}0 \cdot 10^4$	0,34

Prawo Hooke'a dla przypadku PSN

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\, \sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\, \sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

E *- moduł Younga*
ν *- stała Poissona*
G *- moduł Kirchhoffa*

Dla materiałów izotropowych:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Po przekształceniu mamy:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\, \varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\, \varepsilon_x\right)$$

$$\tau_{xy} = G\, \gamma_{xy}$$

Moduł ściśliwości

Rozważmy prawo Hooke'a dla materiału izotropowego w stanie trójwymiarowym

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right)$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right)$$

Gdy dodamy do siebie te trzy równania:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(1 - 2\nu\right)\cdot\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

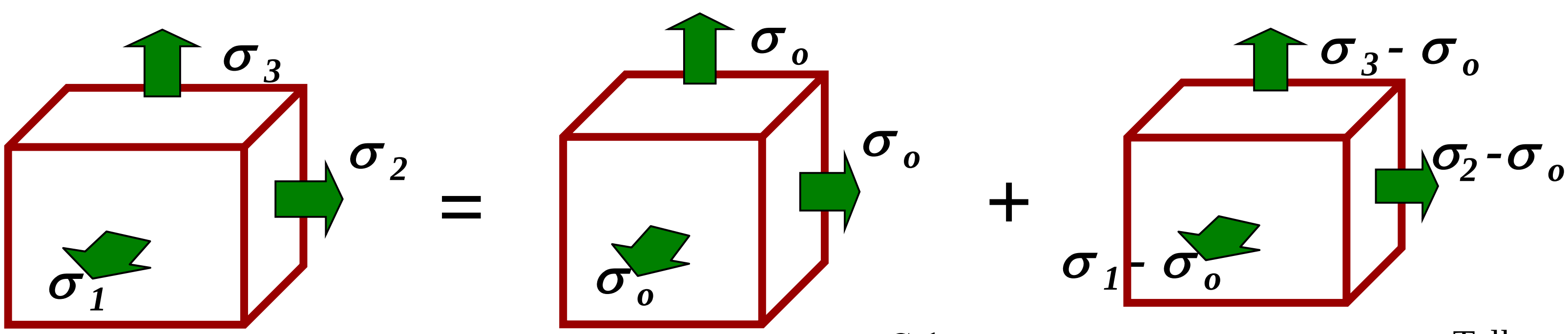
$$e = \boxed{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{E}\left(1 - 2\nu\right)\cdot 3 \cdot \boxed{\sigma_0} \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = \boxed{\frac{E}{3\left(1 - 2\nu\right)}}\cdot e$$

Względna zmiana objętości

Naprężenia średnie

Moduł ściśliwości **K**

Stan naprężenia można przedstawić jako superpozycję:



$$\sigma_0 = \tfrac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Całe odkształcenie objętościowe

$$\boxed{e = 0}$$

Tylko odkształcenie postaciowe

Moduł ściśliwości

$$\sigma_0 = \boxed{\frac{E}{3(1-2\nu)}} \cdot e$$

Moduł ściśliwości **K**

<u>Dla stali</u>: **E**=2·10^5 MPa, **ν**=0,3

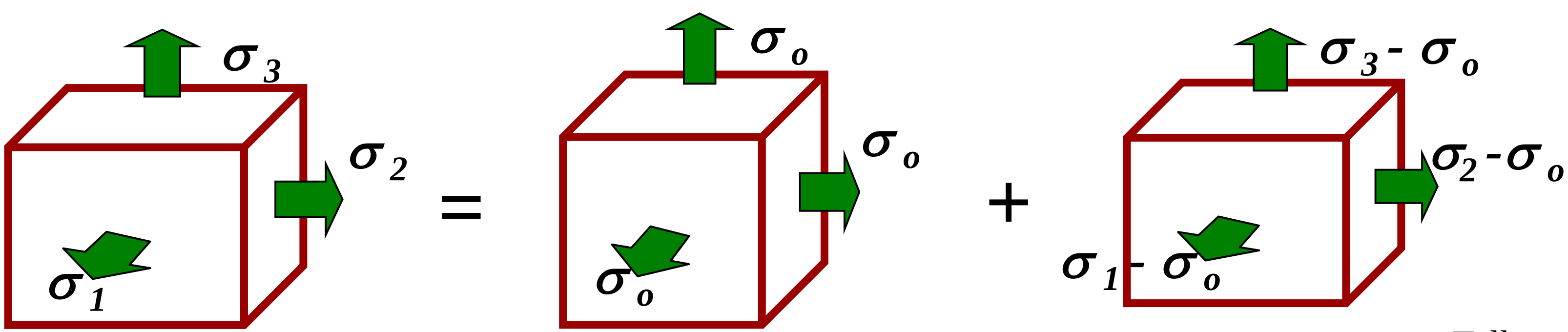
$$K = \frac{E}{3(1-2\cdot 0{,}3)} = \frac{E}{1{,}2}$$

<u>Dla gumy</u>: **E**=2÷8 MPa, **ν**=0,47

$$K = \frac{E}{3(1-2\cdot 0{,}47)} = \frac{E}{0{,}18}$$

Guma łatwo się poddaje zmianom postaci, ale trudniej zmianom objętości !

Stan naprężenia można przedstawić jako superpozycję:



$$\sigma_0 = \tfrac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Całe odkształcenie objętościowe

$$\boxed{e = 0}$$

Tylko odkształcenie postaciowe