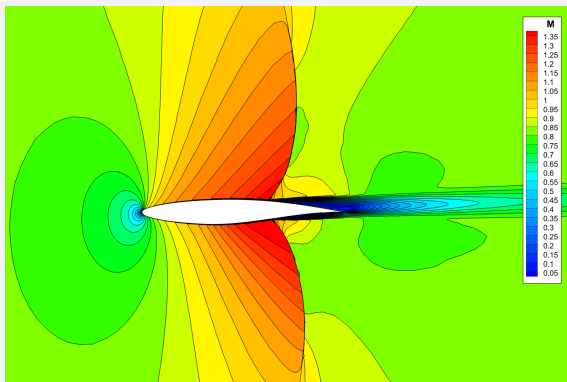


Aerodynamika I

Efekty lepkie w przepływach ściśliwych.



przepływ wokół profilu RAE-2822 ($M = 0.85$, $Re = 6.5 \times 10^6$, $\alpha = 2^\circ$)



Efekty lepkie w przepływach ściśliwych

Równania ruchu lepkiego płynu ściśliwego

Całkowe równania ruchu dla pewnej objętości Ω ograniczonej brzegiem Γ (pominięto pole sił objętościowych):

Równanie ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (1.1)$$

Równanie pędu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = - \oint_{\Gamma} p \mathbf{n} \, d\Gamma + \oint_{\Gamma} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (1.2)$$

Równanie energii całkowitej $E = e + \frac{v^2}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \rho E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = & \underbrace{\oint_{\Gamma} \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{\text{przewodnictwo cieplne}} \\ & - \underbrace{\oint_{\Gamma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{\text{praca sił ciśnieniowych}} + \underbrace{\oint_{\Gamma} (\mathcal{T} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{\text{praca sił tarcia}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \dot{q} \, d\Omega}_{\text{źródła ciepła}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Równania ruchu lepkiego płynu ściśliwego c.d.

Tensor naprężeń lepkich dla płynu Newtonowskiego:

$$\mathcal{T} = \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) + \mathbb{1} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1.4)$$

μ – wsółczynnik lepkości dynamicznej

λ – wsółczynnik lepkości objętościowej; zgodnie z teorią Stokesa $\lambda = -2/3 \mu$

Prawo Sutherlanda:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} \approx \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_\infty + S}{T + S} \quad \text{gdzie: } S = 110.4^\circ K \quad (1.5)$$

Współczynnik przewodnictwa cieplnego:

$$\kappa = \mu \frac{c_p}{Pr} \quad (1.6)$$

Pr – liczba Prandtla

Równania ściśliwej warstwy przyściennej

Równanie ciągłości

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

Równanie pędu

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad p = p_e(x) \quad (1.9)$$

Równanie energii całkowitej $H = h + \frac{U^2}{2}$

$$\rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (1.10)$$

Ściśliwa warstwa przyścienna - równanie energii

Prawą stronę (1.10) można przekształcić:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} + \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

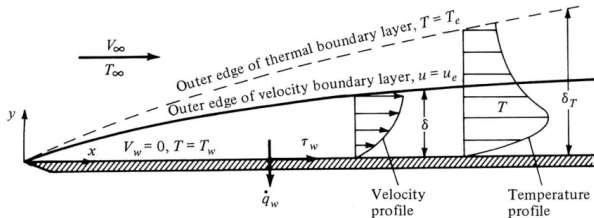
Równanie energii można więc zapisać:

$$\rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) \quad (1.12)$$

Gdy liczba Prandtla $Pr = 1$:

$$\rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (1.13)$$

Termiczna warstwa przyścienna



$$Pr < 1 \text{ to } \delta_T > \delta$$

$$Pr > 1 \text{ to } \delta_T < \delta$$

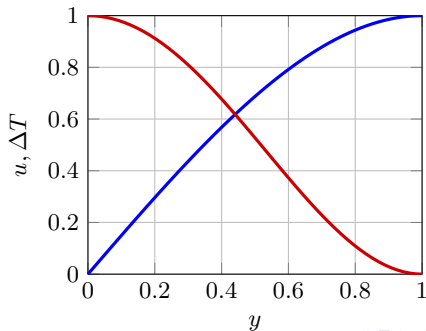
Ściśliwa warstwa przyścienna - całka Busemanna

Najprostszym rozwiązaniem równania energii dla warstwy przyściennej jest:

$$H = const \quad (1.14)$$

$$T_w = T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} \quad (1.15)$$

$$T = T_0 - \frac{u^2}{2c_p} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (1.16)$$

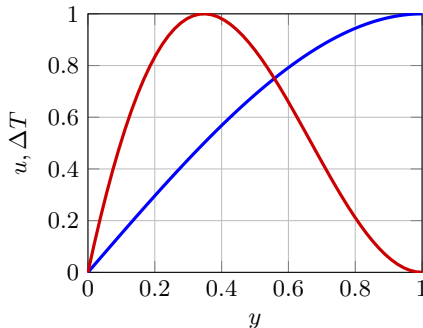


Ściśliwa warstwa przyścienna - całka Crocco

Można zauważyć, że dla $\partial p / \partial x = 0$ równania (1.8) i (1.13) są podobne. Jeśli więc warunki brzegowe są również podobne ($T_w = const$) to rozwiązania tych równań wiąże liniowa zależność:

$$T_0 \equiv T + \frac{u^2}{2c_p} = Au + B \quad \rightarrow \quad T = Au + B - \frac{u^2}{2c_p} \quad (1.17)$$

Wartości współczynników A i B są dobrane w zależności od warunków brzegowych.



Laminarna warstwa przyścienna - samopodobne rozwiązania

Podobnie jak w przypadku nieściśliwym równania warstwy przyściennej można przekształcić tak aby uzyskać samopodobne rozwiązania tzn. parametry przepływu zależą tylko od bezwymiarowej współrzędnej η .

Bezwymiarowe współrzędne definiuje się następująco:

$$\xi = \rho_e \mu_e u_e x \quad \eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (1.18)$$

gdzie parametry z indeksem e odnoszą się do parametrów na zewnętrznej granicy warstwy przyściennej.

Wprowadźmy następujące funkcje:

$$f' = \frac{u}{u_e} \quad g = \frac{H}{H_e} \quad (1.19)$$

oraz współczynnik:

$$C = \frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e} \quad (1.20)$$

Laminarna warstwa przyścienna - samopodobne rozwiązania

Zakładając zerowy gradient ciśnienia $\partial p_e / \partial \xi = 0$ równania Prandtla dla ściślej warstwy przyściennej można przekształcić do następującej postaci (istnieje również ogólna postać dla niezerowego gradientu ciśnienia):

$$(C f'')' + f f'' = 0 \quad (1.21)$$

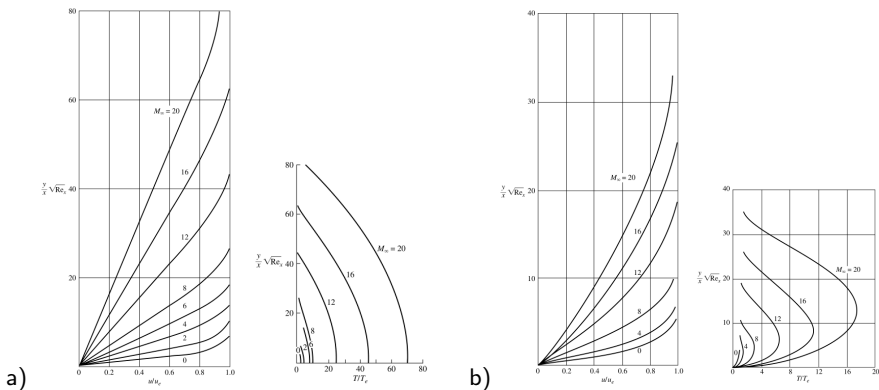
$$\left[\frac{C}{Pr} g' \right]' + f g' + \frac{u_e^2}{He} \left[\left(1 - \frac{1}{Pr} \right) C f' f'' \right]' = 0$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \text{dla } y = 0 \quad & f(0) = f'(0) = 0 \\ & g(0) = g_w \leftarrow \text{ściana izotermiczna} \\ & g'(0) = 0 \leftarrow \text{ściana adiabatyczna} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \text{dla } y \rightarrow \infty \quad & f'(\infty) = 1 \\ & g(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Laminarna ściśliwa warstwa przyścienna



Przykładowe profile prędkości i temperatury dla płaskiej płytki ($\partial p / \partial x = 0$, $Pr = 0.75$)

- a) rozkład prędkości i temperatury dla izolowanej termicznie płytki
- b) rozkład prędkości i temperatury dla "zimnej" płytki

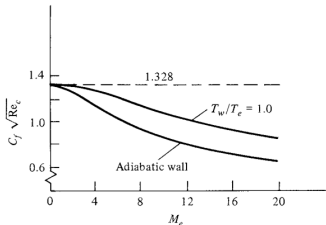
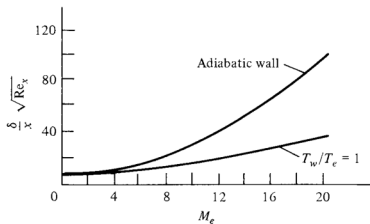
Laminarna ściśliwa warstwa przyścienna

Płaska płytka dla $\partial p / \partial x = 0$

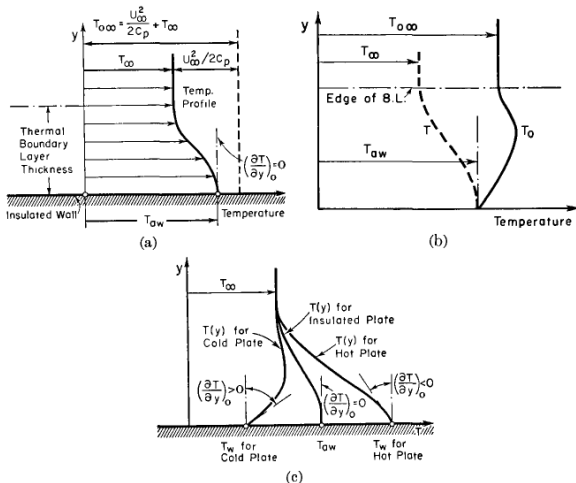
$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} F \left(M_e, Pr, \frac{T_w}{T_e} \right) \quad (1.24)$$

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} G \left(M_e, Pr, \frac{T_w}{T_e} \right) \quad (1.25)$$

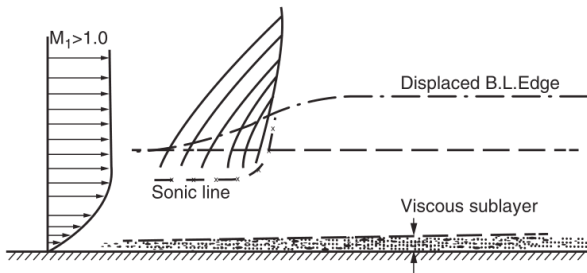
Przykładowe wykresy C_f i δ dla $Pr = 0.75$



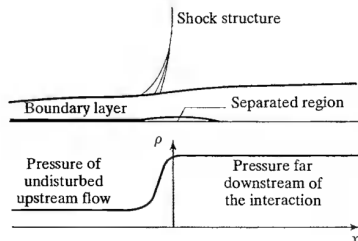
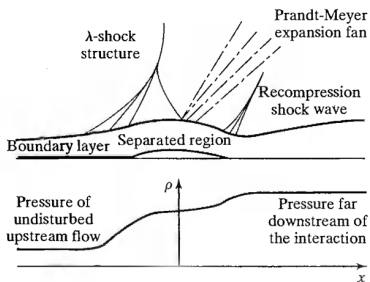
Rozkład temperatury w warstwie przyściennej



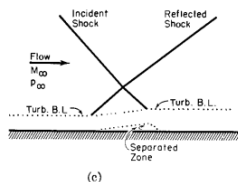
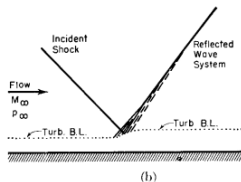
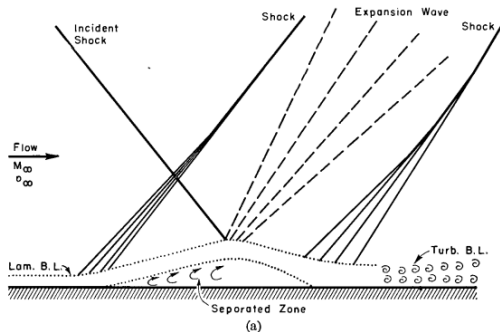
Warstwie przyścienna w przepływie naddźwiękowym



Interakcja fali uderzeniowej z warstwą przyścienną



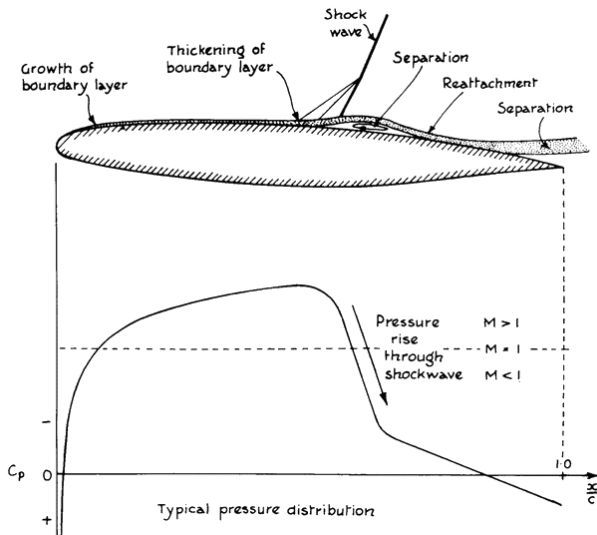
Interakcja fali uderzeniowej z warstwą przyścienną



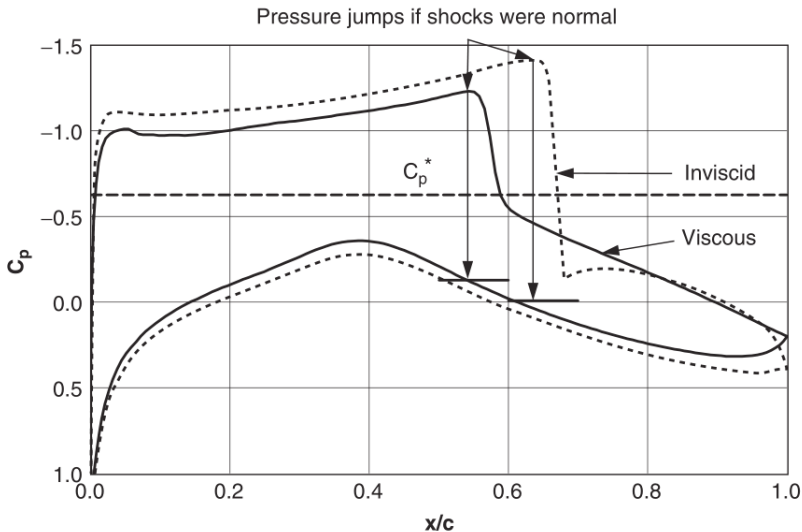


Lepki opływ profilu

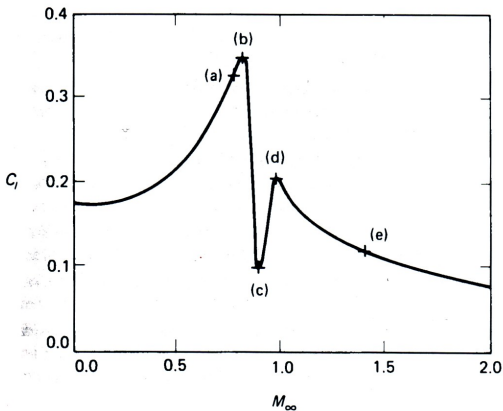
Lepki i ściśliwy opływ profilu



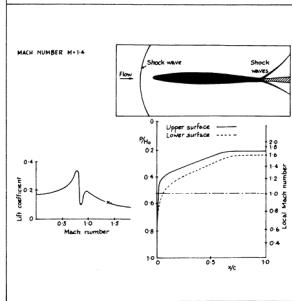
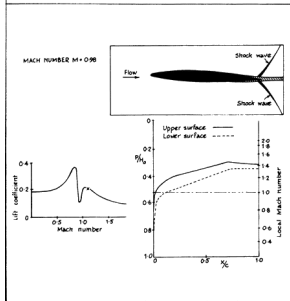
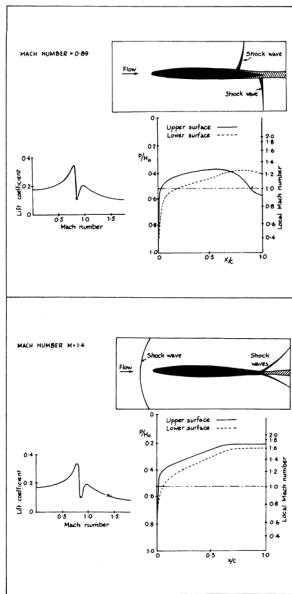
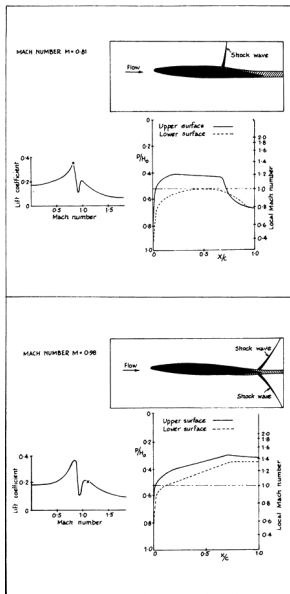
Lepki i ściśliwy opływ profilu



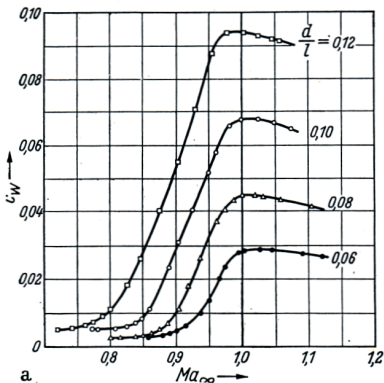
Lepki i ściśliwy opływ profilu



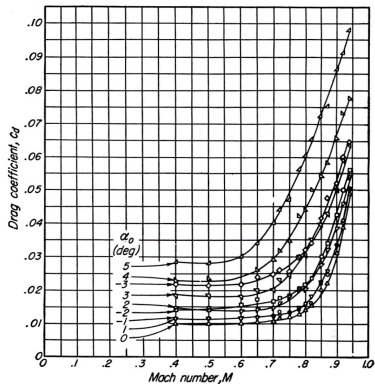
Lepki i ściśliwy opływ profilu



Lepki i ściśliwy opływ profilu

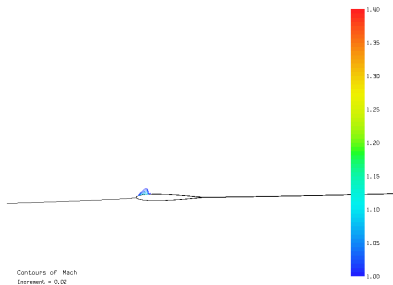
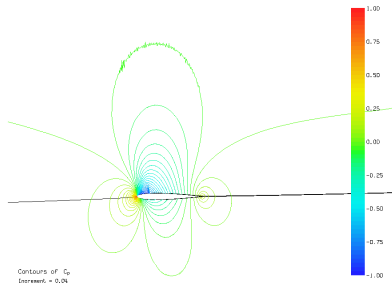
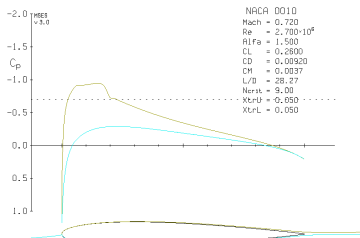


Zależność współczynnika oporu falowego od liczby Macha

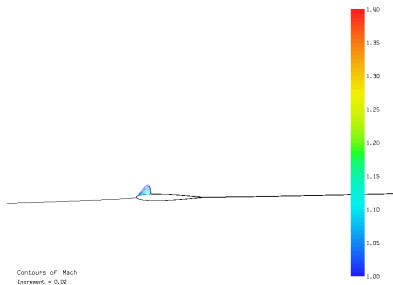
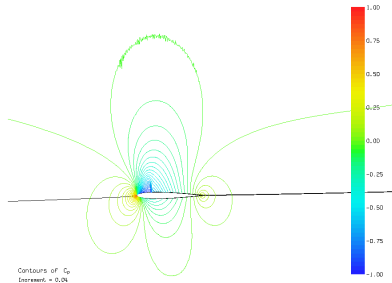
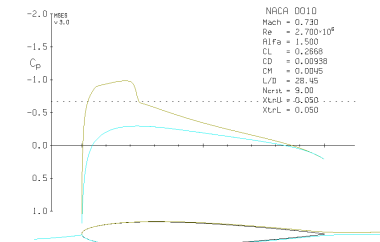


Zależność współczynnika oporu od liczby Macha (profil NACA-2306)

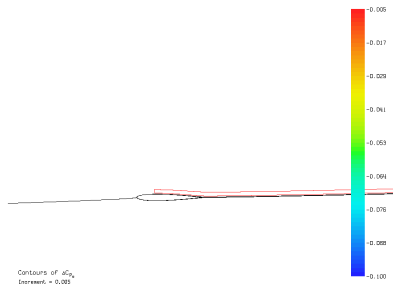
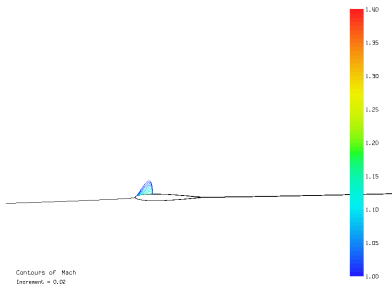
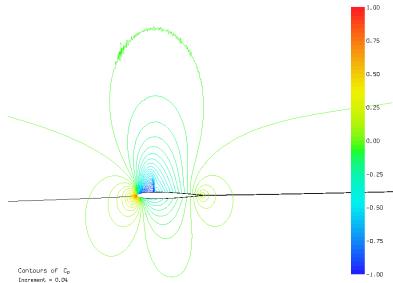
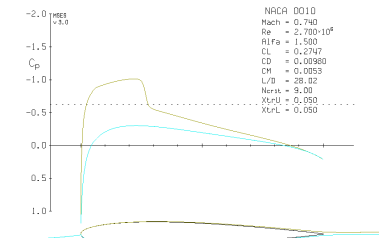
Lepki i ściśliwy opływ profilu



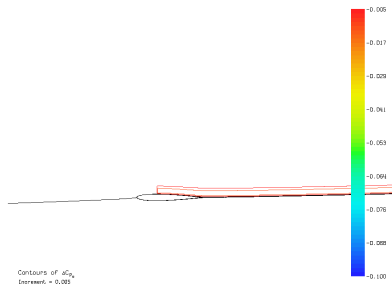
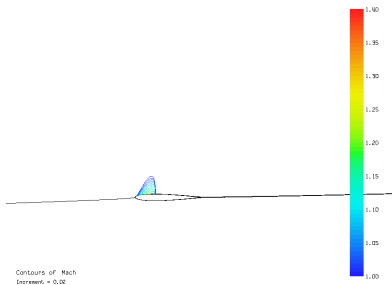
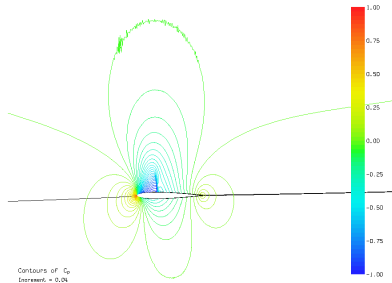
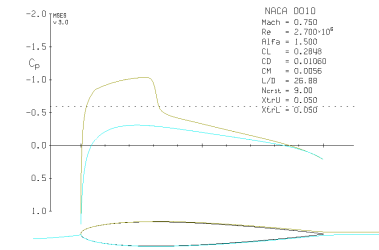
Lepki i ściśliwy opływ profilu



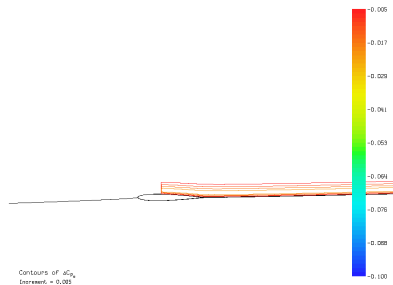
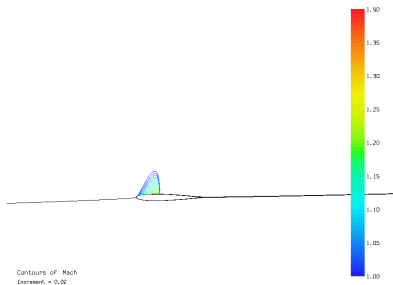
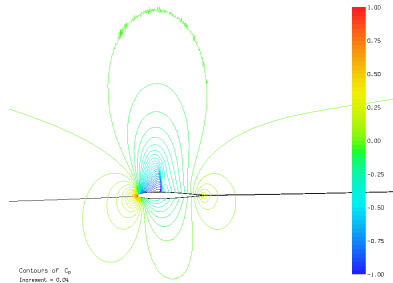
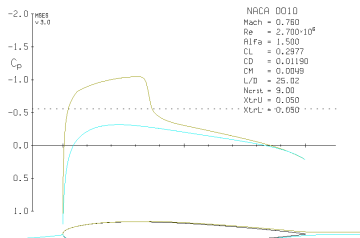
Lepki i ściśliwy opływ profilu



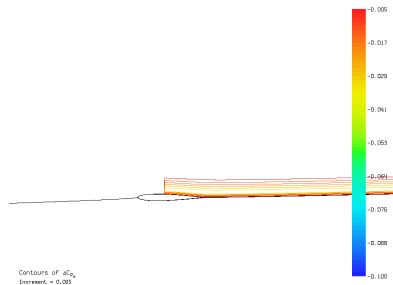
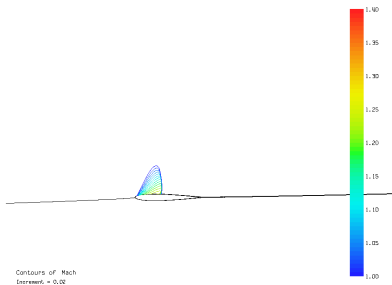
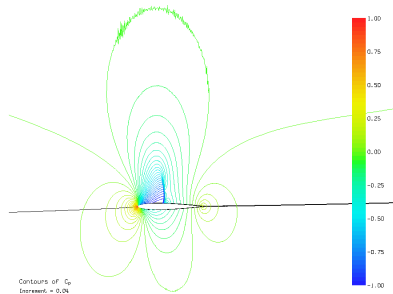
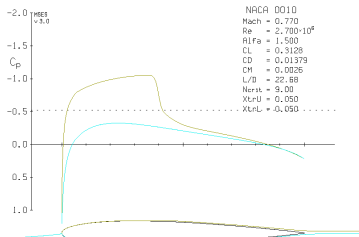
Lepki i ściśliwy opływ profilu



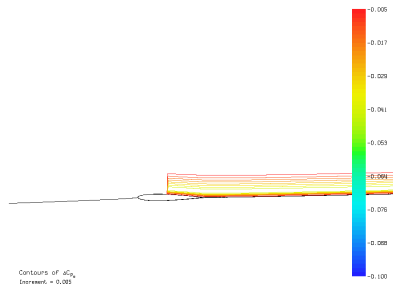
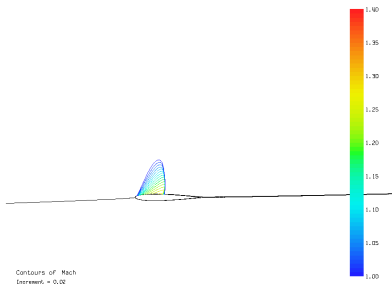
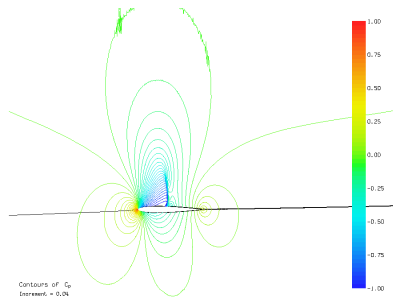
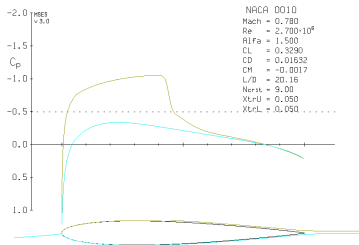
Lepki i ściśliwy opływ profilu



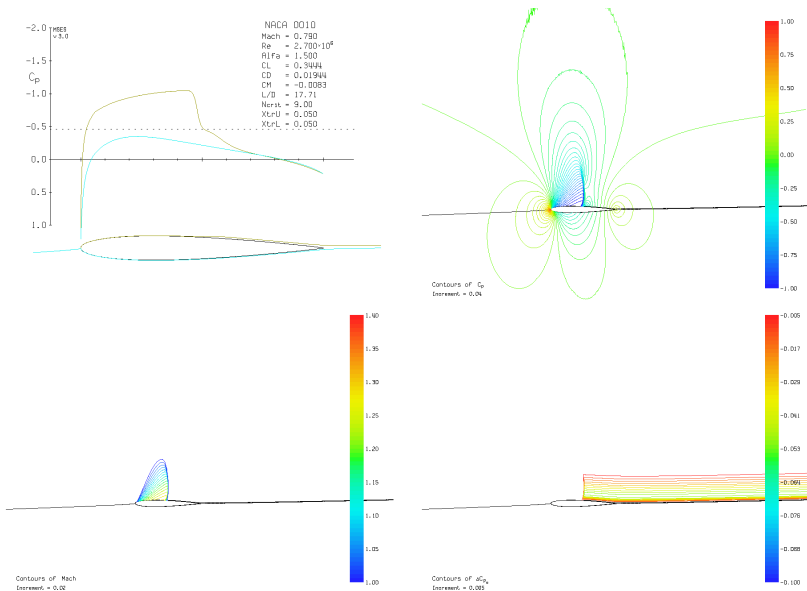
Lepki i ściśliwy opływ profilu



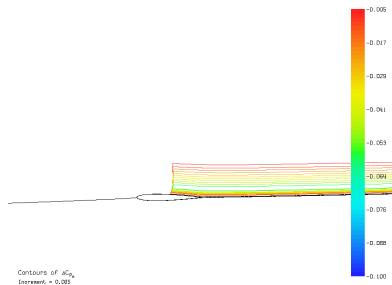
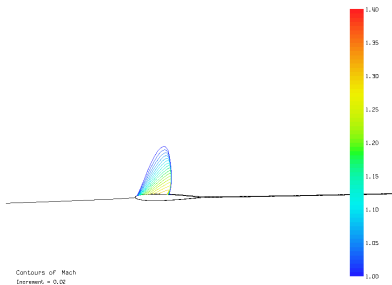
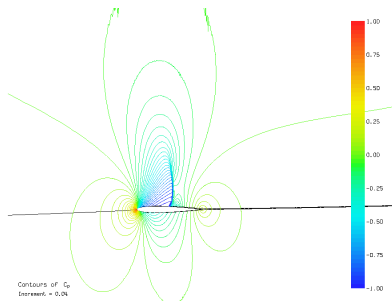
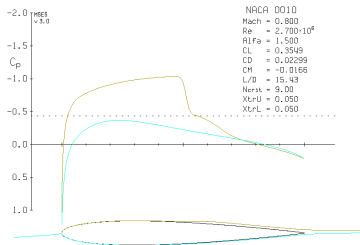
Lepki i ściśliwy opływ profilu



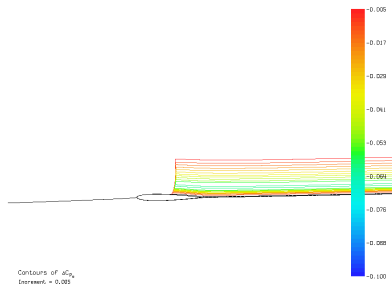
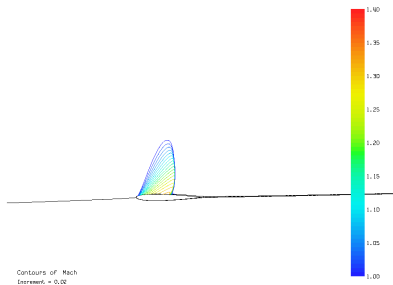
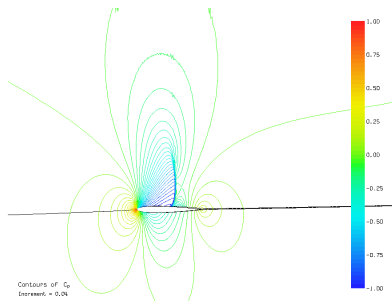
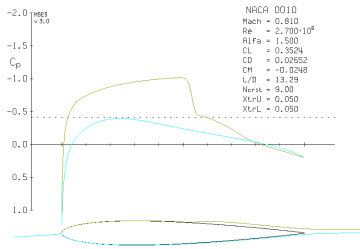
Lepki i ściśliwy opływ profilu



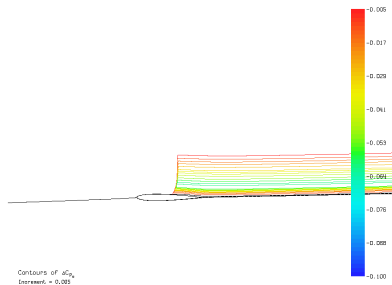
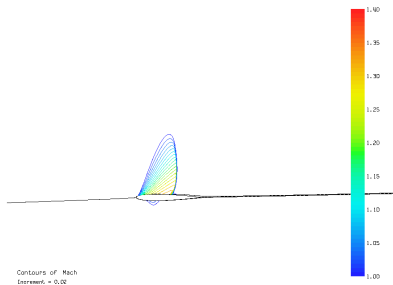
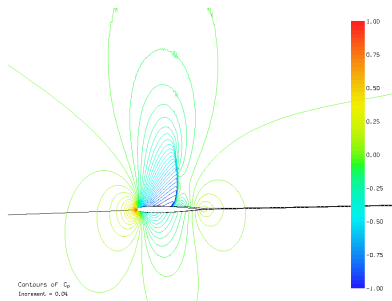
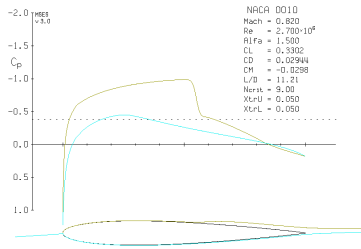
Lepki i ściśliwy opływ profilu



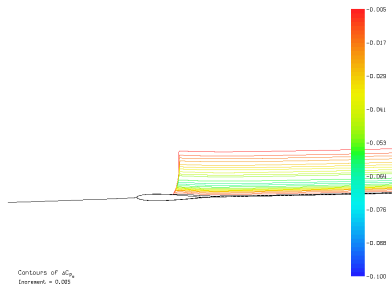
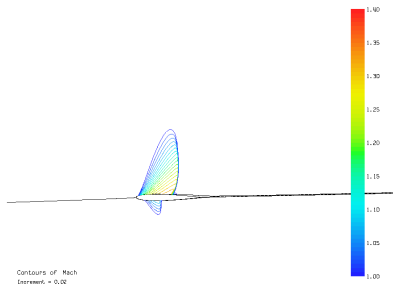
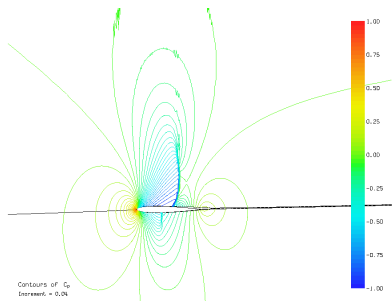
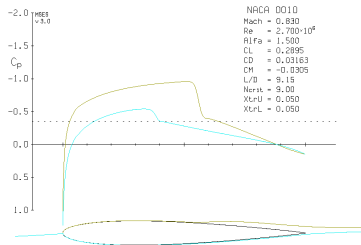
Lepki i ściśliwy opływ profilu



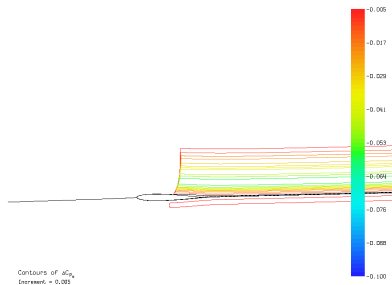
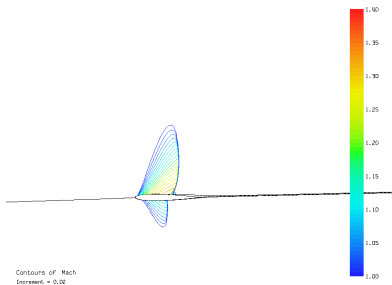
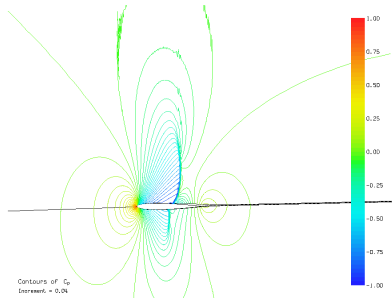
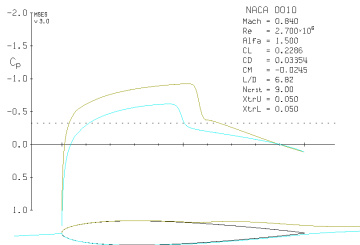
Lepki i ściśliwy opływ profilu



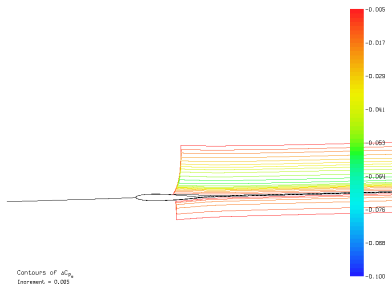
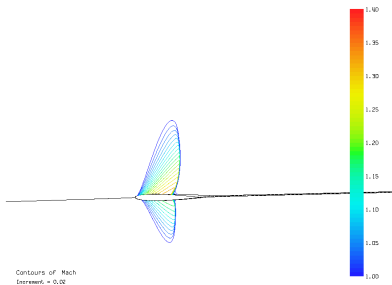
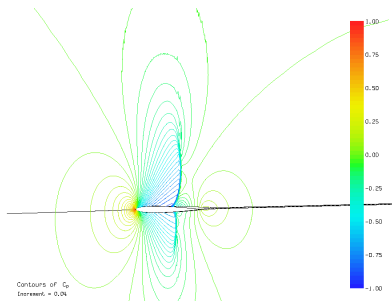
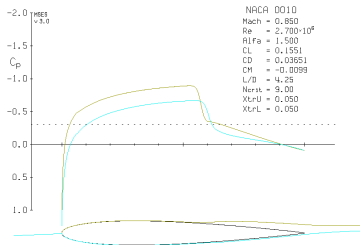
Lepki i ściśliwy opływ profilu



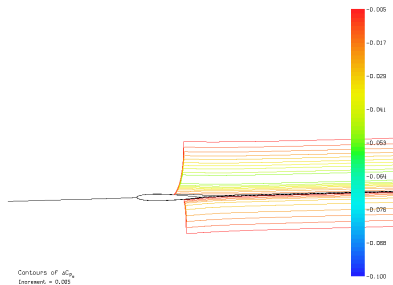
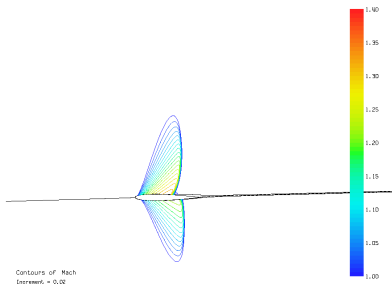
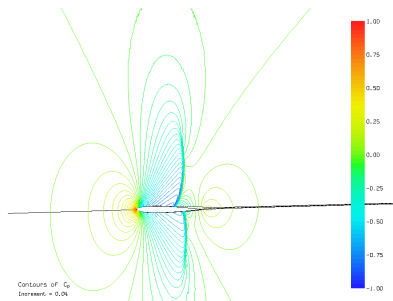
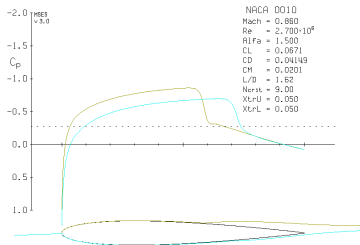
Lepki i ściśliwy opływ profilu



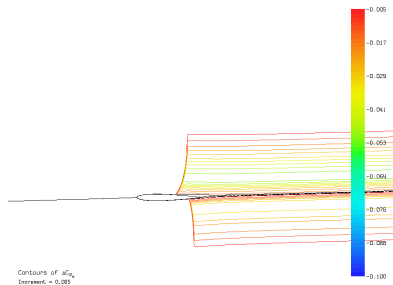
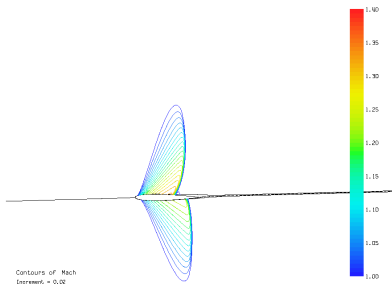
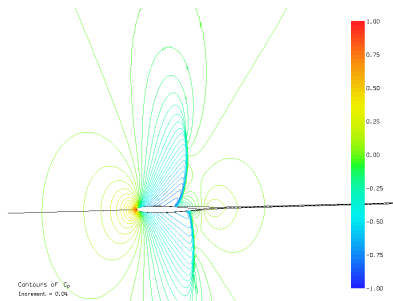
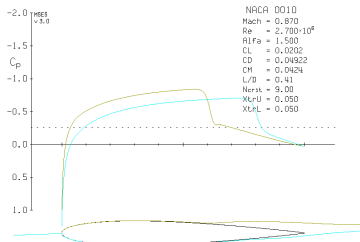
Lepki i ściśliwy opływ profilu



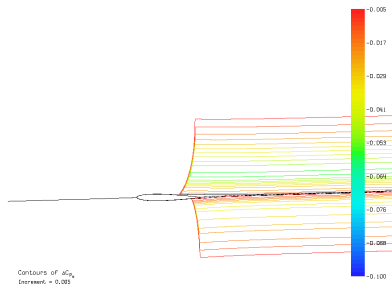
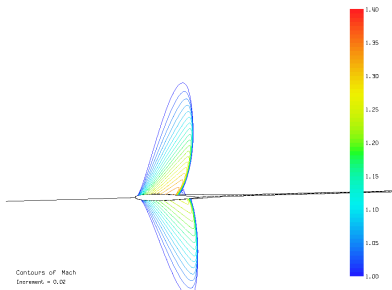
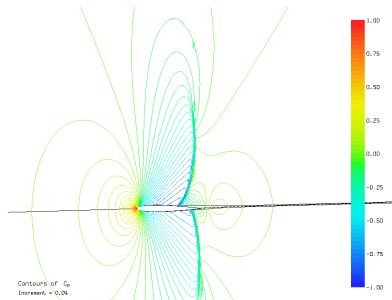
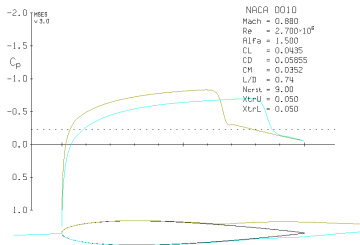
Lepki i ściśliwy opływ profilu



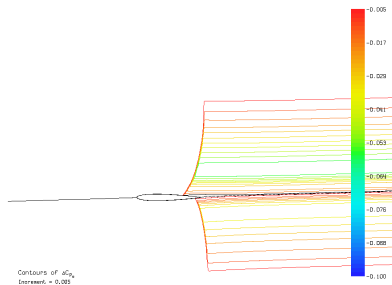
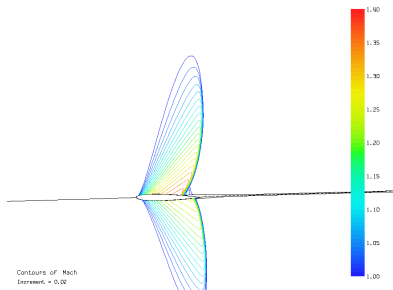
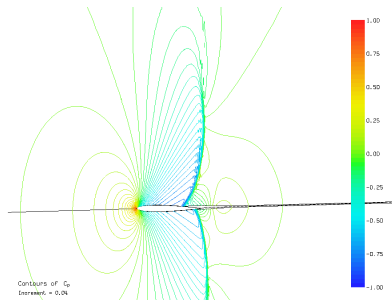
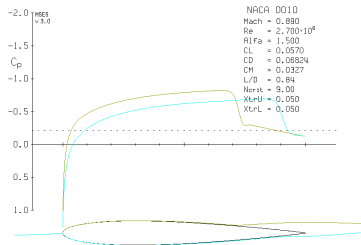
Lepki i ściśliwy opływ profilu



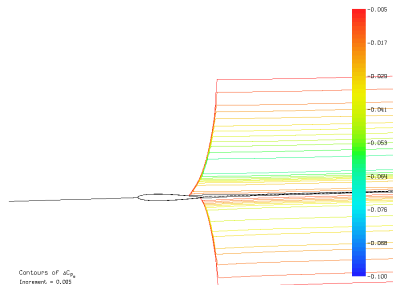
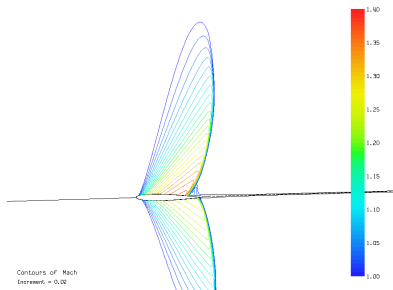
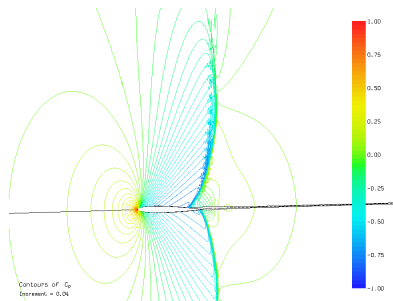
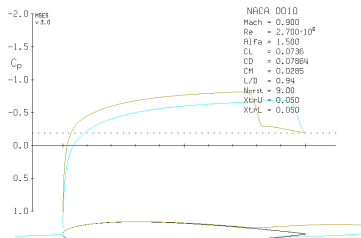
Lepki i ściśliwy opływ profilu



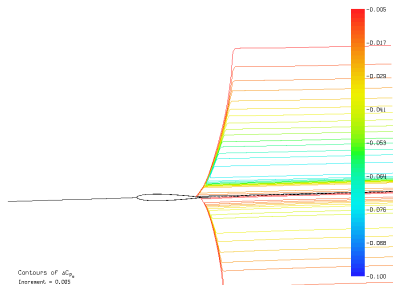
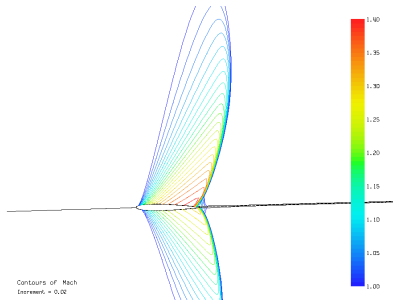
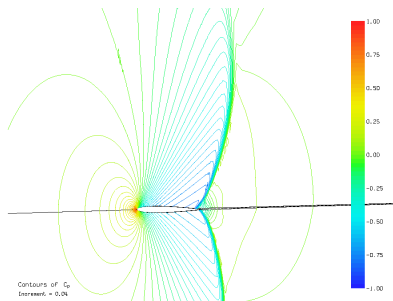
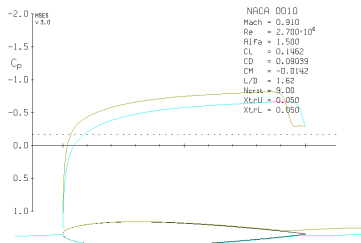
Lepki i ściśliwy opływ profilu



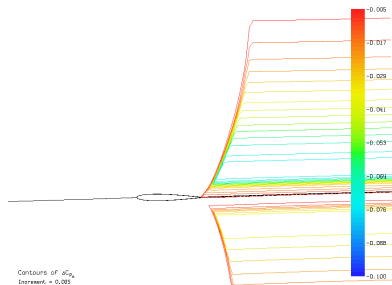
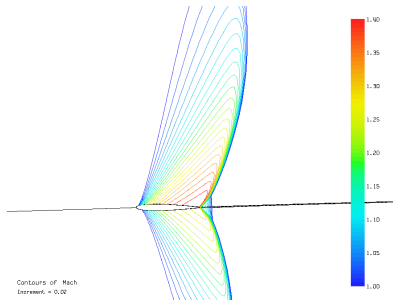
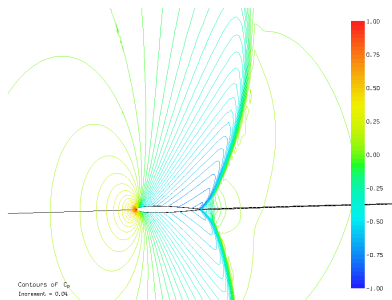
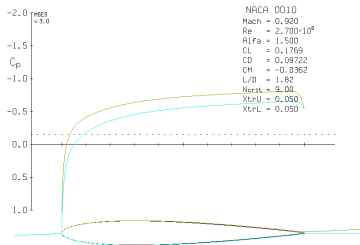
Lepki i ściśliwy opływ profilu



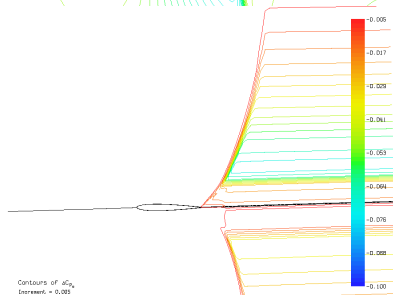
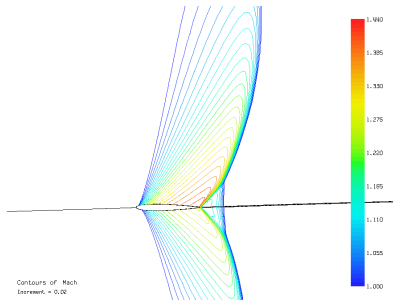
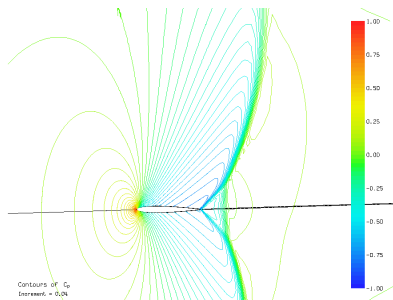
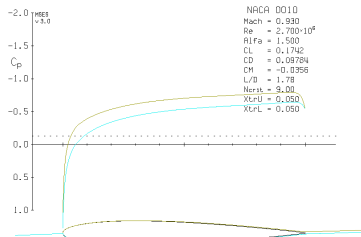
Lepki i ściśliwy opływ profilu



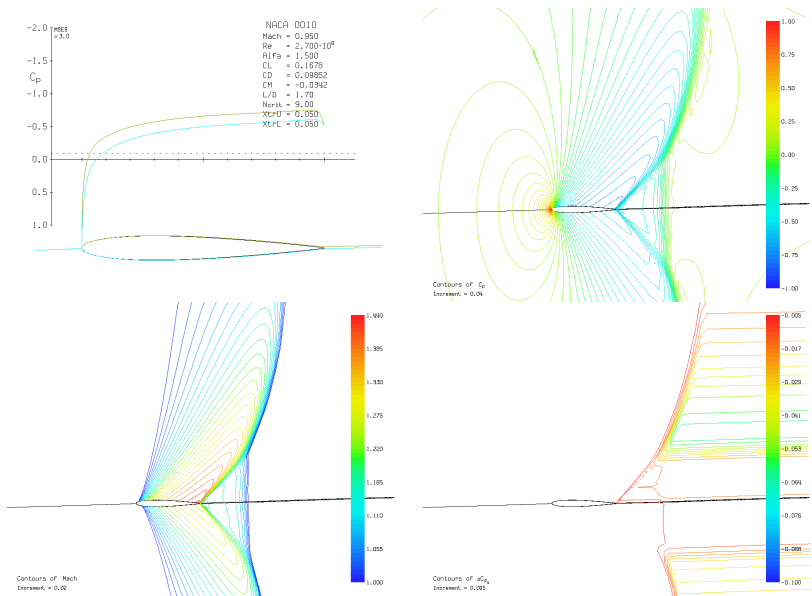
Lepki i ściśliwy opływ profilu



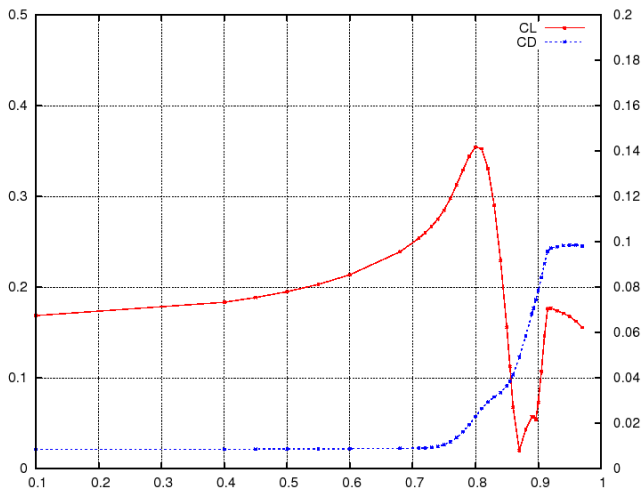
Lepki i ściśliwy opływ profilu



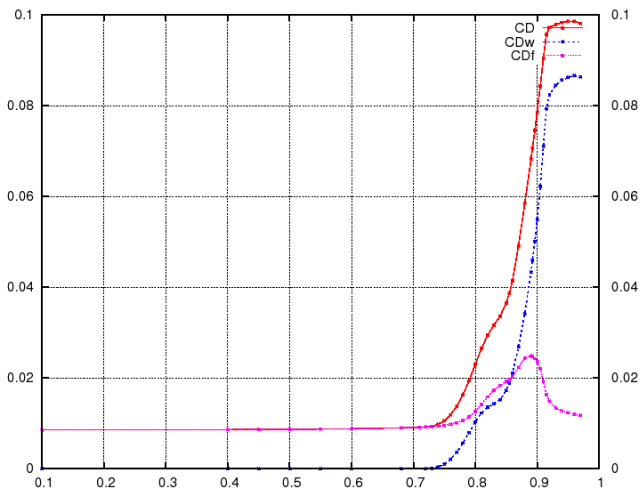
Lepki i ściśliwy opływ profilu



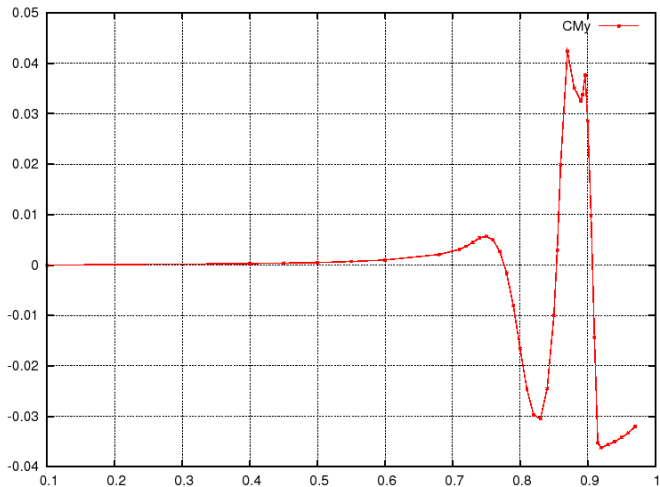
Lepki i ściśliwy opływ profilu



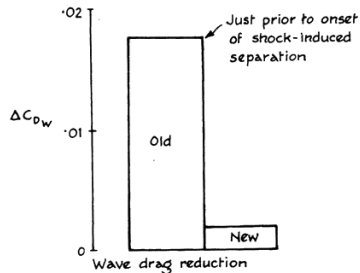
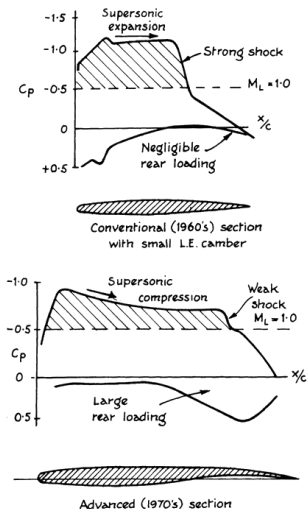
Lepki i ściśliwy opływ profilu



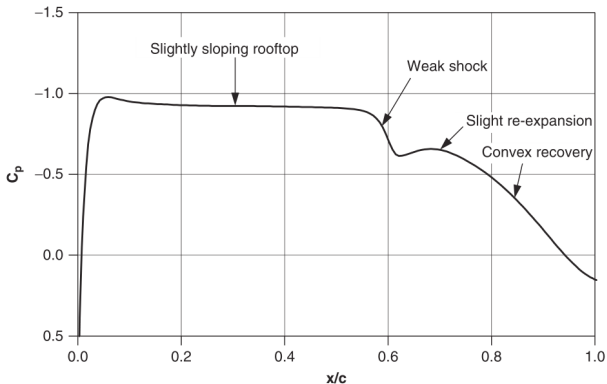
Lepki i ściśliwy opływ profilu



Profile superkrytyczne

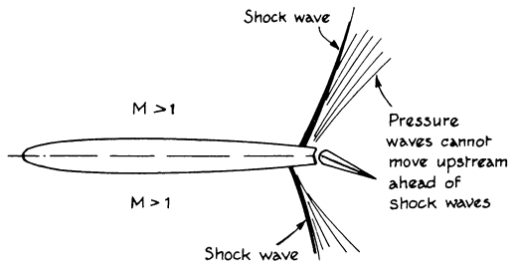


Profile superkrytyczne



Przykładowy rozkład ciśnienia dla superkrytycznego profilu

Skuteczność klapy w przepływie transonicznym



Skuteczność klapy w przepływie transonicznym

