WYKŁAD 9

WYZNACZANIE SIŁ REAKCJI PŁYNU NA CIAŁA METODĄ CAŁKOWEGO BILANSU PĘDU

CAŁKOWA POSTAĆ ZASADY ZMIENNOŚCI PĘDU (RUCH STACJONARNY)

W **Wykładzie nr 3** pojawiła się całkowa postać Zasady Zmienności Pędu zapisana dla obszaru kontrolnego. Zapiszmy ją w następującej formie

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v})\, dV + \int_{\partial\Omega} (\rho \boldsymbol{v}) \underbrace{(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n})}_{\upsilon_n} dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, dS + \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{f}\, dV$$

Załóżmy, że ruch płynu w obszarze Ω jest stacjonarny oraz, że zewnętrzne pole sił objętościowych można zaniedbać. Powyższa równość całkowa uprości się wówczas do postaci

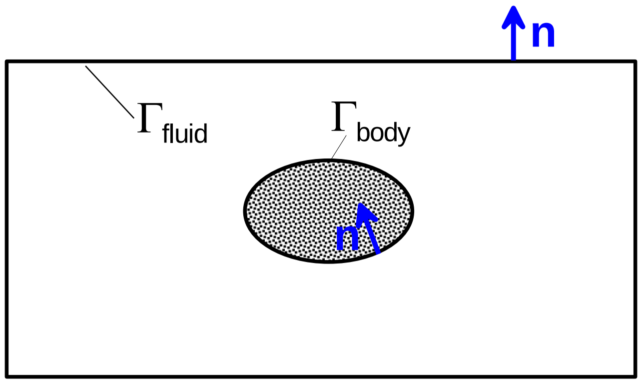
$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, dS = \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\rho \boldsymbol{v}) \upsilon_n\, dS}_{\substack{\text{strumien pędu} \\ \text{przez brzeg obszaru}}}$$

Otrzymaliśmy całkową formę ZZP dla ustalonego ruchu płynu. **Zauważmy, że powyższa równość zawiera wyłącznie całki po brzegu obszaru Ω!** Lewa strona równości określa **całkowitą siłę powierzchniową działającą na płyn**, który aktualnie przebywa w obszarze Ω.

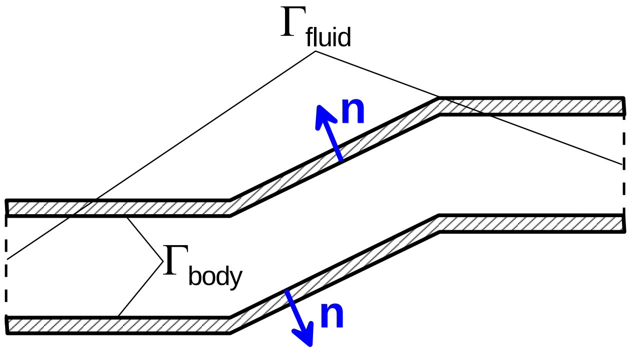
Brzeg obszaru można podzielić na dwie części: „płynną” (przez nią płyn wpływa lub wypływa do obszaru) i „materialną”, tj. będącą powierzchnią ciał znajdujących się w kontakcie z płynem. Typowe sytuacje przedstawiono na poniższych schematach. Należy zwrócić uwagę na zwrot wersora normalnego $\boldsymbol{n}$.

Formuła całkowa ZZP może być zatem zapisana następująco

$$\underbrace{\int_{\Gamma_{body}} \boldsymbol{\sigma}\, dS}_{-\boldsymbol{F}} = \int_{\partial\Omega} (\rho \boldsymbol{v}) \upsilon_n \, dS - \int_{\Gamma_{fluid}} \boldsymbol{\sigma}\, dS$$



gdzie $\boldsymbol{F}$ jest wektorem **siły reakcji płynu na ciało**.



Jeżeli założymy, że materialna część powierzchni jest dla płynu nieprzenikalna to składowa normalna prędkości na tej powierzchni jest równa zeru: $\upsilon_n\big|_{\Gamma_{body}} = 0$.

Ostatecznie, otrzymujemy całkową formułę dla siły reakcji (dynamicznej) płynu na ciało w postaci

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\int_{\Gamma_{fluid}} (\rho \boldsymbol{v}) \upsilon_n \, dS + \int_{\Gamma_{fluid}} \boldsymbol{\sigma} \, dS}$$

Otrzymany wzór jest słuszny dla dowolnego płynu (ściśliwego, nieściśliwego, lepkiego, idealnego).

Załóżmy teraz, że płyn jest **nieściśliwym płynem newtonowskim**. Wiemy już, że jednostkowa siła powierzchniowa (naprężenia) dane są z tym płynie wzorem

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{n} + 2\mu \boldsymbol{D}\boldsymbol{n}$$

Po podstawieniu, otrzymujemy następujący wzór na siłę reakcji $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = -\int_{\Gamma_{fluid}} (\rho \boldsymbol{v}) \upsilon_n \, dS - \int_{\Gamma_{fluid}} p\boldsymbol{n} \, dS + 2\mu \int_{\Gamma_{fluid}} \boldsymbol{D}\boldsymbol{n} \, dS$$

Ostatnia całka jest zwykle trudna do policzenia. Niekiedy, możemy wykorzystać swobodę wyboru obszaru w celu zapewnienia, że udział tej całki w całym wzorze będzie zaniedbywalnie mały. **W prostych zadaniach inżynierskich („akademickich") będziemy zakładać, że całka ta jest do pominięcia.** Oczywiście, **składnik z lepkością znika tożsamościowo, jeśli posługujemy się modelem płynu idealnego.**

Uproszczona formuła dla siły reakcji dynamicznej ma zatem postać

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\int_{\Gamma_{fluid}} (\rho \boldsymbol{v}) \upsilon_n \, dS - \int_{\Gamma_{fluid}} p \boldsymbol{n} \, dS}$$

Jeżeli powierzchnia Γ_{fluid} jest powierzchnią zamkniętą to modyfikacja ciśnienia o dowolną stała wartość p_a jest dopuszczalna, bowiem nie zmienia wartości siły. Wynika to z następującej równości

$$\int_{\Gamma_{fluid}} p_a \boldsymbol{n} \, dS = p_a \int_{\Gamma_{fluid}} \boldsymbol{n} \, dS = \boldsymbol{0} \qquad \text{(dlaczego?)}$$

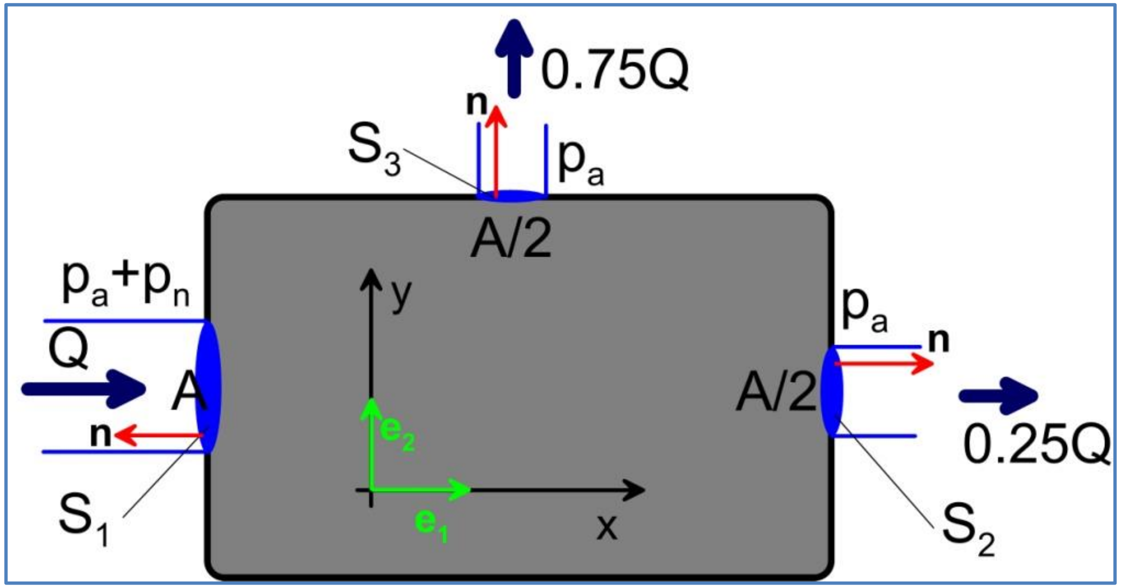
Formuła przyjmuje postać

$$\boldsymbol{F} = -\int_{\Gamma_{fluid}} (\rho \boldsymbol{v}) \upsilon_n \, dS - \int_{\Gamma_{fluid}} (p - p_a) \boldsymbol{n} \, dS$$

Zwykle, użycie jej w takiej formie prowadzi do pewnego uproszczenia obliczeń. Typowym przypadkiem jest obliczanie reakcji od swobodnego strumienia cieczy (vide Ćwiczenia)

W niektórych przypadkach odjęcie od ciśnienia stałej odpowiadającej wartości ciśnienia w otoczeniu jest niezbędnym warunkiem wyznaczenia poprawnej wartości reakcji dynamicznej „netto" (bez składnika napory statycznego).

Przykład (abstrakcyjny): W obszarze kontrolnym znajduje się pewne urządzenie przepływowe, które rozdziela wpadający strumień cieczy na dwa – jak na schemacie. Należy obliczyć składowe reakcji dynamicznej na to urządzenie.



Ponieważ przepływ odbywa się wyłącznie przez wlot i wyloty oraz ciśnienie na wylotach jest równe ciśnieniu otoczenia p_a, możemy przyjąć, że $\Gamma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

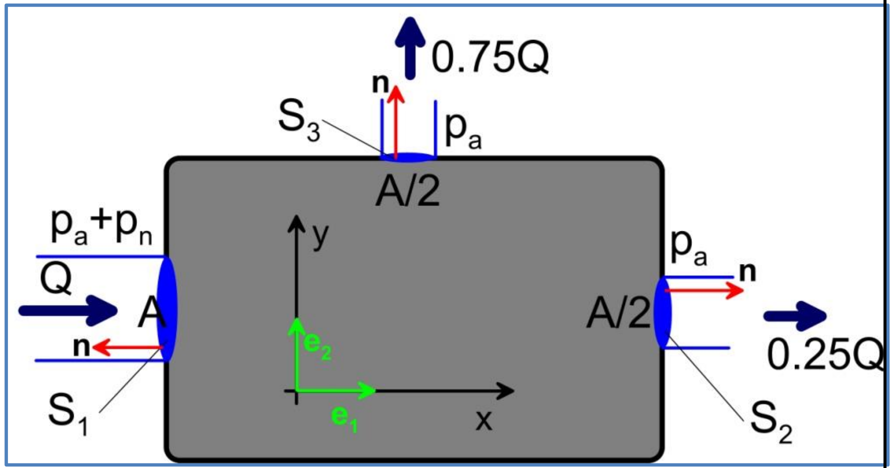
Wlot $\mathbf{S_1}$:

$$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_1 = [-1,0]\ ,\ \boldsymbol{\upsilon} = \frac{Q}{A}\boldsymbol{e}_1 = [\frac{Q}{A},0]\quad ,\quad \upsilon_n = \boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n} = -\frac{Q}{A}$$

$$\int_{S_1}(\rho\boldsymbol{\upsilon})\upsilon_n\,dS + \int_{S_1}\underbrace{(p-p_a)}_{p_n}\boldsymbol{n}\,dS = [-\rho(\frac{Q}{A})^2 A - p_n A]\boldsymbol{e}_1 = -(\rho\frac{Q^2}{A} + p_n A)\boldsymbol{e}_1$$

Wylot S_2:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 = [1,0], \;\; \boldsymbol{v} = \frac{\frac{1}{4}Q}{\frac{1}{2}A}\boldsymbol{e}_1 = [\tfrac{Q}{2A}, 0], \;\; \upsilon_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{Q}{2A}$$



$$\int_{S_2} (\rho\boldsymbol{v})\upsilon_n \, dS + \int_{S_2} \underbrace{(p - p_a)}_{0} \boldsymbol{n} \, dS = \rho\left(\frac{Q}{2A}\right)^2 \tfrac{1}{2} A\boldsymbol{e}_1 =$$

$$= \tfrac{1}{8}\rho\frac{Q^2}{A}\boldsymbol{e}_1$$

Wylot S_3:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2 = [0,1] \;, \;\; \boldsymbol{v} = \frac{\frac{3}{4}Q}{\frac{1}{2}A}\boldsymbol{e}_2 = [0, \tfrac{3Q}{2A}] \;\;, \;\; \upsilon_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{3Q}{2A}$$

$$\int_{S_3} (\rho\boldsymbol{v})\upsilon_n \, dS + \int_{S_3} \underbrace{(p - p_a)}_{0} \boldsymbol{n} \, dS = \rho\left(\frac{3Q}{2A}\right)^2 \tfrac{1}{2} A\boldsymbol{e}_2 = \tfrac{9}{8}\rho\frac{Q^2}{A}\boldsymbol{e}_2$$

Finalnie, siła reakcji dana jest wzorem:

$$\boldsymbol{F} = \left(\rho\frac{Q^2}{A} + p_n A\right)\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{8}\rho\frac{Q^2}{A}\boldsymbol{e}_1 - \tfrac{9}{8}\rho\frac{Q^2}{A}\boldsymbol{e}_2 =$$

$$= \underbrace{\left(\tfrac{7}{8}\rho\frac{Q^2}{A} + p_n A\right)}_{F_1}\boldsymbol{e}_1 + \underbrace{\left(-\tfrac{9}{8}\rho\frac{Q^2}{A}\right)}_{F_2}\boldsymbol{e}_2$$

NAPRĘŻENIA A WIROWOŚĆ W PŁYNIE

Wyprowadzimy eleganckie formuły dla naprężeń na powierzchni ciała i siły aero/hydrodynamicznej. Przy okazji, zobaczymy związek pomiędzy tymi wielkościami a wirowością płynu.

Punktem wyjścia jest ogólna formuła dla siły powierzchniowej w płynie

$$\boldsymbol{F} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\Xi}\, \boldsymbol{n}\, dS .$$

Wykorzystamy związek reologiczny w płynie newtonowskim

$$\boldsymbol{\Xi} = -p\,\boldsymbol{I} + 2\mu\,\boldsymbol{D} = -p\,\boldsymbol{I} + 2\mu \underbrace{\nabla\boldsymbol{v}}_{\text{gradient prędkosci}} - 2\mu \underbrace{\boldsymbol{R}}_{\text{tensor obrotu}} .$$

Ponieważ

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{n} = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}$$

to

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Xi}\,\boldsymbol{n} = -p\,\boldsymbol{n} + 2\mu\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} + \mu\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}.$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Jeżeli $\nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon} = 0$ (płyn nieściśliwy) i $\boldsymbol{\upsilon}\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}$ to $\nabla\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$.

<u>Dowód:</u>

Ponieważ $\boldsymbol{\upsilon}\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}$ to powierzchnia $\partial\Omega$ jest izopowierzchnią dla wszystkich składowych pola prędkości (są one na niej równe zeru), zatem gradienty tych wielkości muszą być polami wektorowymi prostopadłymi do brzegu $\partial\Omega$.

Wobec tego, możemy napisać równości

$$\nabla\upsilon_j\big|_{\partial\Omega} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} = \lambda_j n_k \;,\; k = 1,2,3$$

prawdziwe dla pewnych liczb rzeczywistych λ_j (j = 1, 2, 3).

Następnie, w notacji indeksowej mamy równości

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega} = \in_{ijk} n_j\, \omega_k\, \boldsymbol{e}_i \quad , \quad \nabla\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} n_j\, \boldsymbol{e}_i$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\nabla\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}=(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_i+\in_{ijk}\omega_k)n_j\boldsymbol{e}_i=(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_i+\in_{ijk}\in_{k\alpha\beta}\tfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\upsilon_\beta)n_j\boldsymbol{e}_i=$$

$$=\left[\tfrac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_i+(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}-\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha})\tfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\upsilon_\beta\right]n_j\boldsymbol{e}_i=(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_i+\tfrac{\partial}{\partial x_i}\upsilon_j-\tfrac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_i)n_j\boldsymbol{e}_i=$$

$$=\tfrac{\partial}{\partial x_i}\upsilon_j n_j\boldsymbol{e}_i=(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\upsilon_j n_j-\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_j}_{=\nabla\cdot\boldsymbol{\upsilon}=0}n_i)\boldsymbol{e}_i=(\lambda_j n_i n_j-\lambda_j n_j n_i)\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$$

zgodnie z tezą twierdzenia. ∎

Otrzymaną równość możemy wykorzystać we wzorze na wektor naprężeń, który uprości się do postaci

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{n}-\mu\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}$$

Zauważmy, że $p\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=0$ i $(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{n}=0$ co oznacza, że **pierwszy składnik opisuje naprężenia normalne**, a **drugi – naprężenia styczne** na powierzchni $\partial\Omega$.

Siła działająca na ciało może być zatem obliczona ze wzoru

$$\boldsymbol{F} = -\int_{\partial\Omega} (p\boldsymbol{n} + \mu\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega})\, dS$$

Ciekawe, że **powyższy wzór można wyprowadzić bez założenia, że prędkość punktów brzegu jest równa zeru**!.

W rzeczy samej, podstawienie wyrażenia na naprężenia daje

$$\boldsymbol{F} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, dS = -\int_{\partial\Omega} p\boldsymbol{n}\, dS + 2\mu \int_{\partial\Omega} \nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, dS + \mu \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}\, dS\ .$$

Mamy jednak

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, dS \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{tensorowy}\\ \text{wariant GGO}}}{=} \int_{\Omega} Div(\nabla\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \underbrace{\Delta\boldsymbol{v}}_{\substack{\text{Laplasian}\\ \text{prędkosci}}}\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= \int_{\Omega} \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{=0})\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Omega} \nabla\times(\underbrace{\nabla\times\boldsymbol{v}}_{=\boldsymbol{\omega}})\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\Omega} \nabla\times\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{x} \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{GGO dla}\\ \text{rotacji}}}{=} -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}\, dS$$

Mamy zatem wzór

$$\boldsymbol{F} = -\int_{\partial\Omega} p\boldsymbol{n}\,dS - 2\mu\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}\,dS + \mu\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}\,dS = -\int_{\partial\Omega} (p\boldsymbol{n} + \mu\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega})\,dS$$

Zauważmy, że wyprowadzona wcześniej formuła dla naprężeń bez założenia zerowania prędkości brzegowej **nie obowiązuje**. Wynika z tego, że dodatkowy składnik w „hipotetycznej" formule opisującej rozkład naprężeń na ruchomym brzegu nie daje udziału do całkowitej siły aerodynamicznej.