

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
WYDZIAŁ MECHANICZNY ENERGETYKI  
I LOTNICTWA

Skrypt z Mechaniki Płynów

Andrzej Styczek

22 marca 2012

# Spis treści

# Rozdział 1

## Wstęp matematyczny lub podstawy rachunku wektorowego i tensorowego

### 1.1 Podstawowe zależności

Czytelnik z pewnością zetknął się z rachunkiem wektorów i algebrą liniową. Dla przypomnienia podajemy podstawowe definicje, stwierdzenia i właściwości potrzebne przy czytaniu początkowych rozdziałów skryptu. Bardziej złożone fakty zamieszczone są w miejscach, w których pojawia się potrzeba ich wykorzystania. Otóż przestrzenią wektorową (albo liniową) nazywamy zbiór elementów, takich że dla  $\vec{f}$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{h}$  z przestrzeni wektorowej określone jest działanie ich dodawania z wynikiem należącym do tej przestrzeni i działanie polegające na mnożeniu przez liczbę. Wynik tego ostatniego też należy do rozważanej przestrzeni. Ponadto określa się element zerowy (wektor zerowy), który dodany do dowolnego wektora nie zmienia go. Dodawanie jest przemienne i łączne,

$$\vec{f} + \vec{g} = \vec{g} + \vec{f}$$

$$(\vec{f} + \vec{g}) + \vec{h} = \vec{f} + (\vec{g} + \vec{h})$$

a mnożenie przez liczbę jest też łączne i rozdzielne względem dodawania.

$$a(b \cdot \vec{f}) = (a \cdot b) \cdot \vec{f}$$

$$a \cdot (\vec{f} + \vec{g}) = a \cdot \vec{f} + a \cdot \vec{g}$$

Zero liczbowe i zero wektorowe są związane ze sobą:

$$0 \cdot \vec{f} = \vec{0}$$

a równanie

$$\vec{x} + \vec{g} = \vec{h}$$

ma jedno rozwiązanie

$$\vec{x} = \vec{h} + (-1) \vec{g} = \vec{h} - \vec{g}$$

Mówimy, że dla liczb  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3 \dots$  i wektorów  $\vec{f}$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{h} \dots$  poniższy związek

$$a_1 \vec{f} + a_2 \vec{g} + a_3 \vec{h} + \dots$$

jest kombinacją liniową wektorów. To oczywiście wektor. W szczególności może być zerem. Jeśli równanie

$$a_1 \vec{f} + a_2 \vec{g} + a_3 \vec{h} + \dots = 0$$

jest spełnione gdy wszystkie liczby  $a_1, a_2, a_3 \dots$  są zerami, to wektory  $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h} \dots$  są niezależne liniowo. (Wydaje się oczywiste, że dla  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$  wynik jest zerowy. Definicja niezależności wykorzystuje odwrócenie tej właściwości.)

Gdy liczby  $a_1, a_2, a_3$  nie są zerami, określają za pomocą kombinacji liniowej wektorów niezależnych inne wektory. Zbiór tych wektorów spełnia definicję przestrzeni wektorowej. Przestrzeń ta należy do przestrzeni wyjściowej. Jeśli jest z nią identyczna, to użyte wektory liniowo niezależne tworzą bazę. Wtedy, na mocy identyczności obu przestrzeni, każdy wektor może być przedstawiony jako kombinacja liniowa wektorów bazy. Zauważamy, że bazę można przekształcić w inną bazę. Wystarczy by wyniki kombinacji liniowych wektorów bazy były wektorami liniowo niezależnymi i by istniało przekształcenie odwrotne. Można stąd wywnioskować, że wszystkie bazy w danej przestrzeni wektorowej składają się z tej samej liczby wektorów. Liczbę tę nazywamy wymiarem przestrzeni. Wektory bazy mogą być pomnożone przez liczby różne od zera, co nie zmienia faktu, że nadal będą tworzyć bazę (zmieniają się liczby  $a_1, a_2 \dots$ ). Wnioskujemy, że właściwość "właściwość bycia bazą" nie zależy od "miar" wektorów bazy. Aby określić związki i właściwości wynikające z miary wektorów definiuje się iloczyn skalarny. Jest to funkcja o wartościach liczbowych określona dla pary wektorów. Funkcja ta ma następujące właściwości:

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \text{iloczyn skalarny} = (\vec{g}, \vec{f}) = \text{liczba}$$

$$(\vec{f} + \vec{g}, \vec{h}) = (\vec{f}, \vec{h}) + (\vec{g}, \vec{h})$$

$$(a \vec{f}, \vec{g}) = a (\vec{f}, \vec{g})$$

$$(\vec{f}, \vec{f}) \geq 0$$

$$(0, \vec{g}) = 0$$

$$(\vec{f}, \vec{f}) = 0 \rightarrow \vec{f} = 0$$

Wielkość  $\|\vec{f}\| = (\vec{f}, \vec{f})^{1/2}$  nazywamy normą wektora (lub w zwykłym przypadku płaszczyzny albo przestrzeni euklidesowej) jego długością. Jeśli wektory  $\vec{f}$  i  $\vec{g}$  mają zerowy iloczyn skalarny, to mówimy, że są ortogonalne. W szczególności wektory bazy mogą być wzajemnie ortogonalne. Taka baza jest wygodna w użyciu. Jeżeli dodatkowo założymy, że każdy został pomnożony przez odpowiednio dobraną liczbę, to może mieć normę jednostkową. Wtedy mówimy, że baza jest ortonormalna. Oznaczmy wektory ją tworzące symbolami  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  dla przestrzenki trójwymiarowej używanej w mechanice ( $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  odpowiednio dla płaszczyzny) i napiszmy kombinację liniową

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

Takie przedstawienie - za pomocą wektorów bazy - może być zastosowane dla każdego wektora  $\vec{a}$ . Na mocy definicji ortonormalności wektory  $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_3$  spełniają związki:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \|\vec{e}_1\|^2 = 1 \dots (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = \|\vec{e}_3\|^2 = 1$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0, \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0, \quad (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$$

Jak widać, zbiór tych związków jest dość obszerny. Skróćmy zapis używając oznaczenia  $\vec{e}_k$  z  $k = 1, 2, 3$  lub  $\vec{e}_i$  z  $i = 1, 2, 3$ . Sześć równań napisanych wyżej można przedstawić następująco:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik}, \quad \text{gdzie } \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = k \\ 0 & \text{dla } i \neq k \end{cases}$$

Symbol  $\delta_{ik}$  nazywa się deltą Kroneckera. To elementy macierzy jednostkowej. W macierzy takiej na głównej przekątnej są jedynki, a poza nią zera.

Przypuśćmy, że (w jakiś sposób) określono wektor  $\vec{a}$ . Współczynniki  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) można wyznaczyć używając iloczynu skalarnego. Piszemy:

$$(\vec{e}_k, \vec{a}) = (\vec{e}_k, a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) = a_1(\vec{e}_k, \vec{e}_1) + a_2(\vec{e}_k, \vec{e}_2) + a_3(\vec{e}_k, \vec{e}_3)$$

Z trzech iloczynów skalarnych dwa są zerowe. To te, dla których  $k$  i indeks przy drugim z wektorów bazy mają różne wartości. Pozostały indeks drugiego z występujących w iloczynach bazy (... nie nie  $k$ ...) to  $k$ . Dla ortonormalnych wektorów bazy mamy  $(\vec{e}_k, \vec{e}_k) = 1$ . Dokonajmy rzutowania  $\vec{a}$  na wektor  $\vec{e}_k$ . Wtedy

$$\vec{e}_k, \vec{a} = \vec{a}, \vec{e}_k = a_k$$

Współczynnik “rozkładu” - rzutowania to  $a_k$ . W mechanice przyjęto nazywać współczynniki rozkładu wektora w bazie ortonormalnej składowymi tego wektora. Podane wyrażenia są nieporęczne w użyciu (z powodu długości). Można uprościć ten zapis używając znak sumy:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{k=3} a_k \vec{e}_k$$

To wyrażenie nadal nie jest zbyt dogodne, albowiem znak  $\sum$  jest duży i trudny w zapisie. Istotne korzyści (o nieoczekiwaniu znaczących konsekwencjach) zawdzięczamy Einsteinowi. Przestał on używać znaku “sigma” pisząc:

$$\vec{a} = a_k \vec{e}_k$$

Tam, gdzie indeks się powtarza sumujemy względem niego dla wszystkich jego wartości. Zmiana oznaczenia indeksu nie zmienia sumy:

$$a_k \vec{e}_k = a_j \vec{e}_j = a_l \vec{e}_l \dots$$

bo w każdym wypadku dodajemy te same iloczyny dla wszystkich wartości powtarzającego się indeksu. Regułę Einsteina można zastosować w rachunku macierzy. Zamiast pisać

$$C_{ij} = \sum A_{ik} B_{ik}$$

skracamy wyrażenie przez opuszczenie sigmy

$$C_{ij} = A_{ik} B_{ik}$$

i pamiętamy, że jest to suma tylu wyrazów ile możliwych wartości ma indeks  $k$ . Pomnóżmy teraz skalarnie dwa dowolne wektory:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_i \vec{e}_i, b_j \vec{e}_j) = a_i b_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij}$$

Sumujemy względem indeksów  $i$  oraz  $j$ . Tylko te  $\delta_{ij}$  są różne od zera, dla których  $i = j$ . Pozostałe wartości - zerowe - nie mają znaczenia dla sumy. Otrzymujemy zatem:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i$$

Czytelnik może rozważyć sytuację, w której wektory bazy nie są ortonormalne. Wtedy

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (\vec{e}_j, \vec{e}_i) = g_{ij} = g_{ji} \quad \text{gdzie } g_{ij} \neq \delta_{ij}$$

Iloczyn skalary wektorów wyraża się w tej sytuacji następująco:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = g_{ij} a_i b_j = g_{ji} b_j a_i$$

Trudność pojawia się tu przy znajdowaniu współczynników rozkładu wektora względem bazy. Aby uzyskać te współczynniki konstruujemy (trzy) wektory odpowiednio ortogonalne do  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Oznaczmy je odpowiednio  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ . Przy ortonormalności  $\vec{e}_i$  oraz  $\vec{e}^k$  czyli gdy zachodzi

$$(\vec{e}_i, \vec{e}^k) = \delta_i^k$$

to znalezienie rozkładu w bazie jest proste. Gdy baza nie jest ortonormalna to dla odróżnienia sytuacji używamy takiego zapisu:

$$\vec{a} = a^k \vec{e}_k$$

Indeks jest zapisany "u góry". Piszemy teraz:

$$(\vec{e}^p, \vec{a}) = a^k (\vec{e}^p, \vec{e}_k) = a^p \delta_k^p = a^p$$

Jasne, że wektor  $\vec{a}$  może być również zapisany przy użyciu wektorów  $\vec{e}_k$ . Mamy wtedy

$$\vec{a} = a_k \vec{e}^k$$

Bazy nieortogonalne mają znaczenie w pewnych zastosowaniach, które w mechanice płynów są rzadkością i nie będziemy się nimi bliżej zajmowali.

Przy pomocy wektorów wyraża się wiele praw fizycznych. Prawa takie są zawsze jednokowe i niezależne od bazy, którą można wybrać dowolnie. Wektory posiadają właściwość niezmienniczości, to znaczy są niezależne od tego, jaka bazę zastosowano. Ta cecha pozwala na szerokie ich zastosowanie w fizyce. Przypuśćmy, że wektor  $\vec{a}$  zapisano przy użyciu dwu baz:  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  i  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ . Baza "primowana" - utworzona z wektorów - może być wyrażona w bazie bez primów.

$$\vec{e}'_k = \alpha_{ki} \vec{e}_i$$

Zapisujemy:

$$\vec{a} = a_p \vec{e}_p = a'_k \vec{e}'_k$$

i podstawiamy  $\vec{e}'_k$

$$a_p \vec{e}_p = a'_k \alpha_{ki} \vec{e}_i$$

Aby otrzymać związki pomiędzy  $a'_k$  i  $a_p$  wystarczy powyższe równanie pomnożyć skalarnie przez  $\vec{e}_j$

$$a_p(\vec{e}_p, \vec{e}_j) = a_p \delta_{pj} = a_j = a'_k \alpha_{ki} \delta_{ij} = a'_k \alpha_{kj}$$

(Wykorzystaliśmy mnożenie przez 0 lub 1 i sumowanie względem indeksów  $p$  oraz  $i$ . Jeśli  $p \neq j$  to  $\delta_{pj} = 0$  i jeśli  $i \neq j$  to  $\delta_{ij} = 0$ .)

Jak widać, aby otrzymać  $a'_k$  trzeba odwrócić macierz transponowaną do macierzy utworzonej z  $\alpha_{ki}$ . Jeśli  $\alpha_{ki}$  są cosinusami pomiędzy wektorami baz, to - jak mówimy - macierz ta jest ortogonalna, to znaczy posiada macierz odwrotną identyczną z transponowaną. Z właściwości iloczynu skalarnego wynikają dwie ważne nierówności:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

To nierówność Schwartza i nierówność trójkąta<sup>1</sup> Jak dotąd nie określiliśmy sposobu obliczenia iloczynu skalarnego wtedy, gdy zadane są wektory. (Umiemy go obliczyć, gdy znane są rozkłady tych wektorów w bazie. Ale współczynniki rozkładu określa się przy użyciu iloczynu skalarnego i wektorów bazy.) Otóż iloczyn skalarny można zdefiniować rozmaicie. Każda definicja prowadząca do podanych wcześniej cech iloczynu skalarnego jest akceptowalna. W zależności od definicji otrzymujemy rozmaite przestrzenie. Do naszych celów przydatna jest przestrzeń, w której wektory mają cechy skierowanych odcinków prostych. Termin "skierowanych" oznacza wyróżnienie początku i końca. Dla wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  mających wspólny początek, iloczyn skalarny określa się następująco:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

Kąt  $\theta$  to kąt ( $\leq \pi$ )<sup>2</sup> pomiędzy wektorami (rozumianymi jako odcinki skierowane od wspólnego początku do ich końców). Przy takiej definicji iloczynu skalarnego ortogonalność oznacza prostopadłość. Baza ortonormalna to trzy wektory jednostkowe, skierowane wzdłuż współrzędnych układu kartezjańskiego. Iloczyn  $(\vec{a}, \vec{b})$  można interpretować jako "rzut  $\vec{a}$  na  $\vec{b}$ ". To - ścisłej mówiąc - długość tych "rzutów". Dodawanie wektorów to "reguła równoległoboku". Można też dodawać  $a_k$  i  $b_k$ :

$$(\vec{a} + \vec{b})_k = a_k + b_k$$

Jeśli wybierzemy punkt, w którym umieścimy początek układu współrzędnych kartezjańskich, to koniec wektora o początku w tym punkcie określa inny punkt o współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$ . Wektor taki nazywamy wektorem - promieniem. Używając bazy związanej ze współrzędnymi piszemy:

$$\vec{r} = \vec{e}_i x_i$$

Ponieważ baza jest ortonormalna, to kwadrat normy jest równy:

$$|\vec{r}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_j \cdot x_j$$

<sup>1</sup> Jeśli  $\vec{a}$  lub  $\vec{b}$  jest zerem, to nierówność Schwartza jest prawdziwa. Jeśli nie, to weźmy  $(f - \alpha g, f - \alpha g) = \|f\|^2 - 2\alpha(f, g) + \alpha^2 \|g\|^2 \geq 0$ . Wniosek: nie ma dwóch pierwiastków równania  $\|f\|^2 - 2\alpha(f, g) + \alpha^2 \|g\|^2 = 0$  i wobec tego  $4(f, g)^2 - 4\|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0$

Druga nierówność:  $(f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2$ . Lewa strona to  $\|f + g\|^2$   
<sup>2</sup> $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ . Kąt  $\theta$  można mierzyć "od  $\vec{a}$  do  $\vec{b}$  lub od  $\vec{b}$  do  $\vec{a}$ . Jest tak bo  $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$ .

jest kwadratem długości określonej przez twierdzenie Pitagorasa.

rysunek rysunek rysunek rysunek

Oprócz iloczynu skalarnego definiuje się iloczyn wektorowy (zewnątrzny). Dla wektorów bazy określamy go tak:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2,$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_k = -\vec{e}_k \times \vec{e}_i$$

Dla dowolnych  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  mamy:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \\ &= a_1 b_1 \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1 b_3 \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \dots \\ &\quad + \dots a_3 b_3 \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Ponieważ  $\vec{e}_k \times \vec{e}_k = -\vec{e}_k \times \vec{e}_k = 0$ , to wykorzystując podane uprzednio iloczyny, można uprościć otrzymane wyrażenie. Wynik pokaże, że można użyć zapisu następującego:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

Inna wygodna forma tego wyrażenia jest następująca:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Sumujemy względem  $i, j, k$ . Współczynnik  $\varepsilon_{ijk}$  jest zerem gdy powtarza się wartość dwu (czy też trzech) indeksów, jest jedynką gdy  $i, j, k$  to 1,2,3 albo parzyste przestawienie tych liczb. Jeżeli przestawienie nie jest parzyste, to  $\varepsilon_{ijk} = -1$ . Jasne, że

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Ważna formuła to iloczyn mieszany

$$(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

W interpretacji geometrycznej jest to objętość równoległościanu “zbudowanego” na wektorach  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Innym istotnym wyrażeniem jest podwójny iloczyn wektorowy:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

Pokażemy jeszcze interpretację iloczynu wektorowego. W tym celu wybieramy płaszczyznę  $x_1, x_2$  generowaną przez czynniki  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  iloczynu  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Wektor  $\vec{a}$  leży na osi  $x_1$ . Mamy:  $a_1 = |\vec{a}|$ ,  $a_2 = a_3 = 0$ . Wtedy iloczyn wektorowy  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_3 a_1 \cdot b_1$ .



rysunek rysunek rysunek

Pozostaje określić  $b_2$ .

$$b_2 = \vec{b} \cdot \vec{e}_2 = |\vec{b}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\vec{b}| \cdot \sin(\theta)$$

Otrzymaliśmy więc

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_3 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\theta)$$

Wynik mnożenia to wektor prostopadły do płaszczyzny generowanej przez  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , skierowany zgodnie ze zwrotnością układu kartezjańskiego.

Kolejny twór geometryczny (bo wektorom nadaliśmy takie cechy geometryczne jakie mają odcinki skierowane) wynika z utworzenia analogonu znanej z algebry operacji mnożenia macierzy przez wektor. Jeśli macierz kwadratowa  $\mathbb{M}$  jest mnożona przez wektor, to otrzymamy

$$b_k = M_{ki} a_i$$

Wektor - czynnik jest wektorem kolumnowym, a wynik to wektor wierszowy.

Chcemy utworzyć odpowiednik geometryczny takiego iloczynu. "Geometryzacja" nastąpi wtedy, gdy użyte zostaną wektory bazy. Piszemy

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = b_k \vec{e}_k$$

i mnożenia macierzowe zastępujemy mnożeniem skalarnym

$$(\mathbb{M}, \vec{a}) = \vec{b}$$

$\mathbb{M}$  to tensor - twór będący uogólnieniem wektora zdefiniowanego tak:

$$\mathbb{M} = \vec{e}_i M_{ik} \vec{e}_k = M_{ik} \vec{e}_i \vec{e}_k = \vec{e}_i \vec{e}_k M_{ik}$$

z sumowaniem względem  $i$  oraz  $k$ . Wykonujemy mnożenie:

$$\mathbb{M}, \vec{a} = (\vec{e}_i M_{ik} \vec{e}_k, a_p \vec{e}_p) = \vec{e}_i M_{ik} a_p (\vec{e}_k, \vec{e}_p) = \vec{e}_i M_{ik} a_p \delta_{kp}$$

Iloczyn (z sumowaniem!)  $a_p \delta_{kp} = \delta_{kp} a_p = \delta_{k1} a_1 + \delta_{k2} a_2 + \delta_{k3} a_3 = a_k$  Tak jest, bo tylko dla drugiego indeksu w  $\delta_{kp}$  równego  $k$  mamy  $\delta_{kk} = 1$ . Pozostałe składniki są zerowe. Otrzymaliśmy:

$$(\mathbb{M}, \vec{a}) = \vec{e}_i M_{ik} a_k$$

czyli wektor określony przez zwykły iloczyn macierzy i wektora kolumnowego. Wynik nie jest wektorem wierszowym, czyli jednym z dwóch wektorów algebraicznych. To zwykły wektor geometryczny wyrażony w bazie  $e_i$ . Macierz może być rozłożona na symetryczną i antysymetryczną:

$$M_{ik} = \frac{1}{2}(M_{ik} + M_{ki}) + \frac{1}{2}M_{ik} - M_{ki}$$

Występuje tu operacja transponowania czyli zamiany wierszy i kolumn

$$\mathbb{M} = \vec{e}_i \frac{M_{ik} + M_{ki}}{2} \vec{e}_k + \vec{e}_i \frac{M_{ik} - M_{ki}}{2} \vec{e}_k$$

Mamy też tensor jednostkowy

$$\mathbb{I} = \vec{e}_i \delta_{ij} \vec{e}_k$$

Można też określić tensor  $\mathbb{M}^{-1}$  taki, że

$$(\mathbb{M}, \mathbb{M}^{-1}) = \mathbb{I}$$

Rozpisując to równanie otrzymamy:

$$(\vec{e}_k M_{kp}^{-1} \vec{e}_p, \vec{e}_l M_{ln} \vec{e}_n) = \vec{e}_k M_{kp}^{-1} \delta_{pl} M_{ln} \vec{e}_n = \vec{e}_k M_{kl}^{-1} M_{ln} \vec{e}_n$$

Wynik mnożenia  $M_{kl}^{-1} M_{ln}$  ma być równy  $\delta_{kn}$ . Zatem  $\mathbb{M}^{-1}$  jest macierzą odwrotną do  $\mathbb{M}$ . Oczywiście macierze te nie mogą być osobliwe.

Z definicji tensora wynikają wprost reguły dodawania, mnożenia przez liczbę i te, które określają przestrzeń liniową. Kończąc dodamy, że mnożenie wektora i tensora nie jest przemienne, chyba że tensor jest symetryczny. Wtedy  $\mathbb{M} = \mathbb{M}^T$  i  $(\vec{a}, \mathbb{M}) = (\vec{a}, \mathbb{M}, \vec{a})$ . Każde działanie, równanie i właściwość zapisane z użyciem wektorów i tensorów nie zależy od przyjętej bazy. Jeżeli baza ulegnie zmianie, to przekształceniu podlegają - jak powiadamy - składowe wektorów i tensorów. Reguła przekształcania tych ostatnich jest "podwójnie wektorowa". Jest tak, bo z zapisu tensora dwukrotnie występują przekształcone wektory bazy:

$$M_{ik} = M'_{mn} \alpha_{mi} \alpha_{nk}$$

i aby wyrazić  $M'_{mn}$  za pomocą  $M_{ik}$  trzeba dwukrotnie użyć macierzy odwrotnych do macierzy przekształcającej bazę.

## 1.2 Różniczkowanie wektorów i tensorów

Inna potrzebna informacja dotyczy różniczkowania wektorów, tensorów i skalarów zależnych od jednej zmiennej oraz od wielu zmiennych, określających współrzędne na płaszczyźnie albo w przestrzeni.

Jeżeli wektor albo tensor określony w niezmienniej bazie zależy od jednej zmiennej - na przykład od czasu, to wynikiem różniczkowania będzie odpowiednio wektor lub tensor:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{e}_k a_k = \vec{e}_k \frac{da_k}{dt}$$

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{e}_k A_{kp} \vec{e}_p = \vec{e}_k \frac{dA_{kp}}{dt} \vec{e}_p$$

sytuacja jest bardziej złożona dla funkcji zależnej od miejsca. Rozważmy płaszczyznę, na której zadana jest taka funkcja. Piszemy

$$f = f(x_1, x_2)$$

Zamierzamy zróżniczkować tę funkcję w punkcie o współrzędnych  $x_{01}, x_{02}$ . Sposobów określenia przyrostu tej funkcji wzdłuż małego wektora  $\Delta\vec{r} = \vec{e}_1 \Delta x_1 + \vec{e}_2 \Delta x_2$  jest tyle, ile wektorów  $\Delta\vec{r}$  o początku w  $x_{01}, x_{02}$ .

Piszemy formalnie:

$$\Delta f = f(x_{01} + \Delta x_1, x_{02} + \Delta x_2) - f(x_{01}, x_{02})$$

Przyrost ten można też zapisać jako:

$$\Delta f = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_* \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_* \Delta x_2$$

Gwiazdka oznacza, że pochodna jest określona w pośrednim miejscu. Po przeanalizowaniu można stwierdzić, że  $\Delta f$  to iloczyn skalarny dwóch wektorów:

$$\vec{e}_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_* + \vec{e}_2 \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_* \quad i \quad \vec{e}_1 \Delta x_1 + \vec{e}_2 \Delta x_2$$

Jeśli  $\Delta x_1$  i  $\Delta x_2$  dążą do zera, to można pominąć gwiazdkę i obliczyć pochodne w punkcie o współrzędnych  $x_{01}$  i  $x_{02}$ . Otrzymamy wtedy

$$df = (\nabla, d\vec{r}) = (dr, \nabla)$$

Przez  $\nabla f$  oznaczamy wektor

$$\nabla f = \left( \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f$$

wynikający z działania operatorem

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

na funkcję  $f$ . Operator  $\nabla$  nazywany jest nabłą albo operatorem nabła. (Nabła to “dzwojący”, trójkatny instrument muzyczny.) Dla przestrzeni operator ten rozszerzamy na trzeci wymiar i dostajemy

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Nabła ma wiele cech wektora. Niestety, nie ma właściwości związanych ze zmianą kolejności mnożeń

$$\Delta f \neq f \cdot \Delta$$

Można sprawdzić to twierdzenie przez zwykłe użycie definicji nabli. Jeśli funkcja  $f$  zależy dodatkowo od jakiegoś parametru, na przykład od czasu, to różniczkowy przyrost można określić uwzględniając  $\frac{\partial f}{\partial t} dt$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + (\nabla f, d\vec{r})$$

Często, ze względu na potrzebę wyraźnego wskazania, że  $\nabla$  działa tylko na  $f$  piszemy tak:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + (d\vec{r}, \nabla f)$$

Jeśli przekształcić to równanie i przyjąć, że  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ , to otrzymamy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla f)$$

Wyrażenie to będzie miało zasadnicze znaczenie w mechanice płynów. Jeśli wektor jest funkcją czasu i położenia, to mówimy o zależnym od czasu polu wektorowym. (W fizyce używa się nazw: pole skalarne, pole wektorowe, pole tensorowe .... odnoszących się do odpowiednich odwzorowań położenia/miejsca w liczby, wektory, tensory...) Przyrost pola wektorowego wynika z przyrostu jego składowych - jeśli bazę tworzą zawsze te same wektory. Piszemy:

$$d\vec{a} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} dt + (d\vec{r}, \nabla \vec{a})$$

Określmy teraz pochodną cząstkową wektora względem t

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \vec{e}_k \frac{\partial a_k}{\partial t}$$

oraz działanie operatora nabra na  $\vec{a}$

$$\nabla \vec{a} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{e}_k a_k) = \vec{e}_i \vec{e}_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

Jak widać, jest to tensor o składowych  $\frac{\partial a_k}{\partial x_i}$ . Mnożony lewostronnie przez wektor da:

$$(d\vec{r}, \nabla \vec{a}) = \left( \vec{e}_p dx_p, \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_k \vec{e}_k \right) = dx_p (\vec{e}_p, \vec{e}_i) \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \vec{e}_k = \left( dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_k \right) \vec{e}_k$$

Jest to wektor, którego  $k$ -ta składowa jest utworzone z “przestrzennego przyrostu” wynikającego ze zmiany wszystkich współrzędnych określających położenie. Jeśli wektory bazy zależą od współrzędnych (jest tak nawet w układzie biegunowym) to różniczkowanie jest bardziej złożone. Piszemy - dla różniczkowania wektora:

$$\vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} a_p \vec{e}_p = \vec{e}_k \vec{e}_p \frac{\partial a_p}{\partial x_k} + \vec{e}_k a_p \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x_k}$$

Czynnik  $\frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x_k}$  jest wektorem.

Z operatorem nabra wiążą się następujące związki:

$$(\nabla, \vec{a}) = \left( \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, a_k \vec{e}_k \right) = (\vec{e}_i, \vec{e}_k) \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

W wyniku dostajemy skalar. Nie jest on zależny od wyboru bazy, bo iloczyn skalarny os takiego wyboru nie zależy. Nazywamy go divergencją wektora  $\vec{a}$  i zapisujemy tak:

$$div \vec{a} = (\nabla, \vec{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

Inną operacją, prowadzącą do wektora jest rotacja.

$$rot \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$$

Jest ona wektorem i najprościej obliczyć ją tak:

$$rot \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Posługując się podanymi definicjami możemy otrzymać np laplasjan skalara  $f$ . Zauważmy, że

$$(\nabla, \nabla f) = \left( \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \vec{e}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = (\vec{e}_i, \vec{e}_k) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \delta_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \Delta f$$

Mamy też dwa łatwe do sprawdzenia związki:

$$\text{rot grad } f = \nabla \times f = 0$$

$$\text{div rot } \vec{a} = (\nabla, \nabla \times \vec{a})$$

Rzeczywiście, jeśli  $f$  jest skalar, to wektor  $\nabla f$  “ ma kierunek wektora  $\nabla$  “. Zatem kąt pomiędzy  $\nabla$  i  $\nabla f$  jest zerowy i iloczyn wektorowy jest zerem. Druga “ tautologia “ dotyczy iloczynu potrójnego. Występuje w nim wektor  $\nabla \times \vec{a}$  prostopadły do wektora  $\nabla$ . Wtedy oczywiście iloczyn skalarny  $\nabla$  i  $\nabla \vec{a}$  jest zerem, bo kąt pomiędzy mnożonami wektorami jest kątem prostym. Pozostaje jeszcze określić wyrażenie  $\text{grad div } \vec{q} = \nabla(\nabla, \vec{q})$ . Używając związku

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}, \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{a})\vec{c}$$

Podstawmy  $\vec{c} = \vec{q}$ ,  $\vec{a} = \vec{b} = \nabla$ . Otrzymamy wtedy

$$(\nabla, \nabla)\vec{q} = \nabla(\nabla, \vec{q}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{q})$$

lub

$$\Delta \vec{q} = \text{grad div } \vec{q} - \text{rot rot } \vec{q}$$

# Rozdział 2

## Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych

### 2.1 Pojęcie ośrodka ciągłego

Ośrodkiem ciągłym nazywamy hipotetyczną substancję zawsze i całkowicie wypełniającą przestrzeń. Założenie ciągłości ciała fizycznego jest przybliżeniem, gdyż w rzeczywistości każda substancja ma strukturę cząsteczkową, a więc ziarnistą. Wtedy, gdy w rozważanym zjawisku cząsteczki lub efekty ich istnienia nie są bezpośrednio obserwowane, możemy założyć ciągłość.

Najprostszym stanem skupienia jest stan gazowy. W gazach przestrzenne upakowanie cząsteczek materii jest najmniejsze. Miarą odległości międzycząsteczkowych w gazie jest średnia droga swobodna. Jest to odcinek przeciętnie przebywany przez cząsteczkę między zderzeniami w chaotycznym ruchu cieplnym. Dla powietrza o temperaturze  $20^{\circ}C$  i ciśnieniu 1 bar droga swobodna cząsteczki wynosi około  $10^{-7}$  metra. (Cząsteczki są wielokrotnie mniejsze. Klasyczny promień cząsteczki azotu to około  $10^{-10}m$ ) Wielkością określającą wypełnienie przestrzeni przez cząsteczki gazu jest liczba Knudsenowa zdefiniowana jako iloraz charakterystycznego makroskopowego wymiaru liniowego  $L$  i drogi swobodnej cząsteczki  $\lambda$

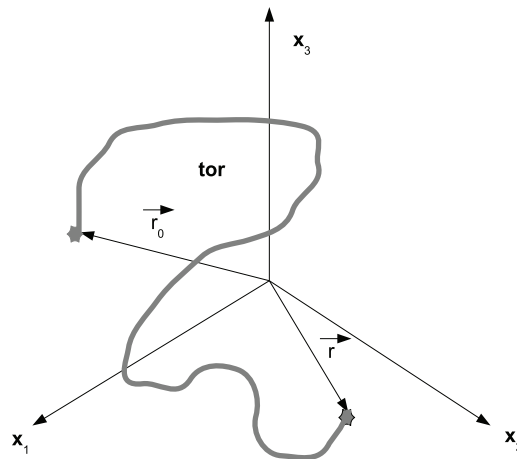
$$K_n = \frac{L}{\lambda} \quad (2.1)$$

Jeśli  $K_n$  ma znaczną wartość, to w skali wymiarów makroskopowych budowa cząsteczkowa, czyli jak mówimy ziarnistość gazu nie odgrywa roli. Możemy zatem stosować upraszczające założenie o ciągłości ośrodka. Dolna granica wartości  $K_n$ , przy której można zaniedbać ziarnistość - bez ryzyka popełnienia znacznych błędów - to  $10^3$ . Gdy gaz jest rozrzedzony, co oznacza, że liczba Knudsenowa jest mała, to zamiast założenia o ciągłości stosujemy opisy dyskretne. Czy opisów takich nie należałoby stosować zawsze? Kilomol substancji (to np. 32 kg tlenu lub 28 kg azotu) zawiera liczbę Avogadro cząsteczek. Liczba ta jest wielka i wynosi  $N_A = 6.023 \cdot 10^{26}$ . Gdyby stosować opis dyskretny, należałoby wyznaczyć ruch każdej z nich. Jest to zadanie niewykonalne: trzeba by rozwiązać ogromną liczbę równań ruchu. Ponadto należy określić położenia i prędkości wszystkich cząsteczek w chwili początkowej. Nie jest to możliwe i prawdopodobnie nigdy nie będzie potrzebne. Można bowiem stosować inne metody opisu - na przykład przyjąć założenie o ciągłości ośrodka. W cieczech odległości międzycząsteczkowe są istotnie mniejsze, niż

w gazach. Wzajemne odległości cząsteczek zmieniają się tu w niewielkim stopniu. Łatwo więc stwierdzić, że - na przykład w wodzie - odległości między sąsiednimi cząsteczkami są rzędu ułamka nanometra. Wnioskujemy więc, że założenie o ciągłości wody może być już stosowane przy wymiarach charakterystycznych obszaru będących ułamkiem mikrometra.

## 2.2 Ruch ośrodka ciągłego. Położenie, prędkość przyspieszenie

Ośrodek ciągły jest utworzony, na mocy definicji, przez ciągły zbiór punktów materialnych. Oznacza to, że w każdym miejscu przestrzeni znajduje się punkt materialny ośrodka ciągłego. Wybierzemy punkt materialny, który w chwili początkowej  $t = 0$  znajdował się w przestrzeni w miejscu określonym wektorem  $\vec{r}_0$ .



Rysunek 2.1. Tor

Wybrany punkt materialny porusza się, a więc zmienia się jego położenie. Zapisujemy to następująco:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0) \quad (2.2)$$

Linie zakresloną przez poruszający się punkt materialny nazywamy jego torem. Początek toru określa wektor  $\vec{r}_0$ . Można to zapisać tak:

$$\vec{r}(0, \vec{r}_0) = \vec{r}_0$$

Wybór chwili początkowej jest oczywiście dowolny. Gdyby przyjąć, że początek ruchu nastąpił w chwili  $t_1$ , a punkt materialny był wtedy w miejscu określonym przez  $\vec{r}_1$ , to dla  $t \geq t_1$  wektor położenia mógł by być zapisany jak poniżej:

$$\vec{r} = \vec{r}(t - t_1, \vec{r}_1)$$

Oczywiście  $\vec{r}_1$  można określić przy pomocy równania (2.2)

$$\vec{r}(t_1, \vec{r}_0) = \vec{r}_1$$

Otrzymujemy złożenie ruchu: dla  $0 \leq t_1 \leq t$  dostajemy

$$\vec{r}(t, \vec{r}_0) = \vec{r}(t - t_1, \vec{r}(t_1, \vec{r}_0)).$$

Właściwość składania ruchu ogranicza klasę funkcji  $\vec{r}(t, \vec{r}_0)$ .

Pochodna funkcji  $\vec{r}(t, \vec{r}_0)$  względem czasu to prędkość poruszającego się punktu:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}(t, \vec{r}_0)}{\partial t} = \vec{v}(t, \vec{r}_0) \quad (2.3)$$

Otrzymaliśmy prędkość punktu, który w chwili początkowej znajdował się w miejscu określonym przez wektor  $\vec{r}_0$ . Podobnie można określić przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}(t, \vec{r}_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}(t, \vec{r}_0)}{\partial t^2} = \vec{a}(t, \vec{r}_0) \quad (2.4)$$

Aby skorzystać z wyrażeń (2.3) i (2.4) trzeba wiedzieć, gdzie punkt materialny znajdował się w chwili początkowej. Taka informacja nie zawsze jest dostępna. (Przyjrzyjmy się płynącej rzece. Wiemy, gdzie wybrany przedmiot - na przykład płynący listek - jest w danym momencie, ale nie wiemy, gdzie był w chwili początkowej.) Powstałą trudność można łatwo wyeliminować. Używając równania (2.2) znajdujemy

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t, \vec{r}) \quad (2.5)$$

przy założeniu odwracalności pierwotnego związku. Możliwość odwrócenia oznacza, że każdemu położeniu w aktualnej chwili odpowiada jedno i tylko jedno położenie w chwili  $t = 0$ . Podstawimy otrzymane wyrażenie do prędkości określonej równaniem (2.3) i w rezultacie możemy zapisać:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r}_0) = \vec{v}(t, \vec{r}_0(t, \vec{r}))$$

Wykonujemy złożenie i otrzymujemy

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r}) \quad (2.6)$$

Wyraziliśmy prędkość w formie funkcji czasu i dowolnego miejsca wskazanego przez wektor  $\vec{r}$ . Wyrażenie to określa prędkość dowolnego punktu znajdującego się w obszarze ruchu i jest wektorową funkcją czasu i położenia  $\vec{v}(t, \vec{r})$ , czyli zależnym od czasu polem wektorowym.

Szkic przedstawia pole  $\vec{v}(t, \vec{r})$  w pewnej chwili  $t_1$ . Dla innej chwili  $t_2 > t_1$  wektory prędkości mogą być zupełnie inne. Jeśli  $\vec{v}$  nie zależy od  $t$ , to pole prędkości nazywamy ustalonym. Ruch jest wtedy taki sam w każdej chwili. Dla takiego ruchu wektor prędkości jest funkcją tylko położenia, co zapisujemy następująco:

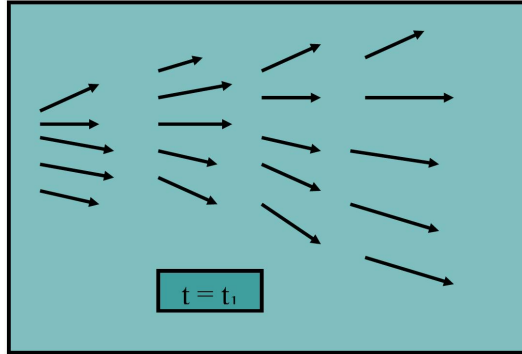
$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$$

Podobnie, gdy wyeliminujemy wektor  $\vec{r}_0$  z równania (2.4), to otrzymamy

$$\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{r}) \quad (2.7)$$

Kończąc dodamy, że zmienne  $t, \vec{r}_0$  nazywamy zmiennymi Lagrange'a lub materialnymi, a zmienne  $t, \vec{r}$  to zmienne Eulera albo wędrowne.





Rysunek 2.2. Pole predkości w chwili  $t = t_1$

## 2.3 Tory i linie prądu

Tor punktu materialnego jest linią, którą zakreśla ruchomy punkt. Dla chwili  $t$  istnieje tylko ta część toru, którą punkt do tej pory zakreślił. Pomiedzy chwilą  $t$  i chwilą  $t + dt$  tor przyrasta o mały wektor  $d\vec{r}$ , który jest określony przez wektor jego predkości. Możemy napisać

$$d\vec{r} = \vec{v}(t, \vec{r})dt$$

Ten sam fakt można wyrazić używając składowych wektorów  $d\vec{r}$  i  $\vec{v}$ . Składowe wektorów będziemy oznaczali numerami pisząc  $dx_1, dx_2, dx_3$  i, odpowiednio,  $v_1, v_2, v_3$ . Przy takich oznaczeniach

$$dx_1 = v_1(t, x_1, x_2, x_3)dt,$$

$$dx_2 = v_2(t, x_1, x_2, x_3)dt,$$

$$dx_3 = v_3(t, x_1, x_2, x_3)dt.$$

Krótszy zapis uzyskamy używając indeksu zamiast trzykrotnego wpisywania równań dla trzech kierunków. Używając zapisu z indeksem skracamy notację do postaci następującej:

$$dx_i = v_i(t, x_1, x_2, x_3)dt \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

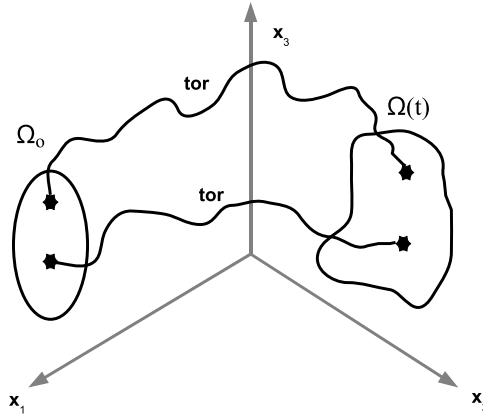
Zwykły zapis różniczkowy wynika wprost z tego równania. Pochodna  $x_i$  względem czasu jest po prostu składową predkości:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(t, x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Jeżeli zadane są składowe predkości, to aby wyznaczyć tor trzeba rozwiązać trzy równania różniczkowe zwyczajne z niewiadomymi współrzędnymi poruszającego się punktu. Zmienną niezależną jest czas. Dla konkretnego toru trzeba dołączyć warunki początkowe określające wartości współrzędnych w chwili początkowej:

$$x_i|_{t=0} = x_{i0} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Zmieniając wartości  $x_{i0}$  zmieniamy położenie początkowe, a więc wybieramy inny ruchomy punkt i otrzymujemy inny tor. Wszystkie punkty z pewnego obszaru  $\Omega_0$  (jest ich nieprzeliczalnie wiele) pozwalają zbudować zbiór torów nazywany potokiem.



**Rysunek 2.3.** Przekształcenie obszaru przez ruch

Potok przekształca obszar  $\Omega_0$  w obszar  $\Omega(t)$ .  $\Omega_0$  jest obszarem wypełnionym punktami materialnymi ośrodka w położeniach początkowych, a  $\Omega(t)$  to obszar wypełniony tym samym zbiorem punktów w chwili  $t$ . Ruch ośrodka ciągłego jest więc ciągłym przekształceniem obszaru przestrzeni. Obszar może zmieniać swój kształt i swoją objętość. Ciągłość przekształcenia wynika z ograniczoności składowych prędkości. Dla jednoznacznego rozwiązania układu równań różniczkowych (2.9) trzeba jeszcze założyć ciągłość prędkości względem czasu i jednostajną ciągłość względem współrzędnych położenia.

Załóżmy, że dane jest pole wektorowe prędkości  $\vec{v}(t, \vec{r})$ . Oznacza to, że w każdym miejscu w przestrzeni i w każdym czasie znamy wektor  $\vec{v}$ . Możemy zbudować linie, do których w wybranej chwili wektory te będą styczne. Ponieważ szukane linie są styczne do wektorów  $\vec{v}$ , to możemy określić cosinusy kierunkowe:

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{v_1}{v}, \quad \frac{dx_2}{ds} = \frac{v_2}{v}, \quad \frac{dx_3}{ds} = \frac{v_3}{v} \quad (2.11)$$

$ds$  oznacza tu długość elementarnego odcinka linii, a  $v$  moduł wektora  $\vec{v}$ . Rugując długość łuku  $ds$  i moduł prędkości  $v$  piszemy:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} \quad (2.12)$$

Otrzymaliśmy dwa równania różniczkowe zwyczajne nie zawierające długości łuku szukanej linii. Poprzednio - zgodnie z (2.11) mieliśmy trzy równania - ale zawierały one dodatkowo zmienną  $s$ .

Przypuśćmy, że udało nam się znaleźć rozwiązanie układu (2.12). Będą nim dwie funkcje czasu i współrzędnych:

$$F(t, x_1, x_2, x_3, C_1, C_2) = 0$$

$$\Phi(t, x_1, x_2, x_3, C_1, C_2) = 0$$

$C_1$  i  $C_2$  oznaczają stałe całkowania. (Przy dwu równaniach pierwszego rzędu wystąpią dwie stałe całkowania.) Każde z równań  $F = 0$  i  $\Phi = 0$  opisuje powierzchnię. Przecięcie tych powierzchni jest linią, do której styczne są wektory pola prędkości. Wybierając punkt, przez który w wybranej chwili  $t_1$  przechodzi poszukiwana linia, piszemy równania

$$F(t_1, x_{10}, x_{20}, x_{30}, C_1, C_2) = 0$$

$$\Phi(t_1, x_{10}, x_{20}, x_{30}, C_1, C_2) = 0$$

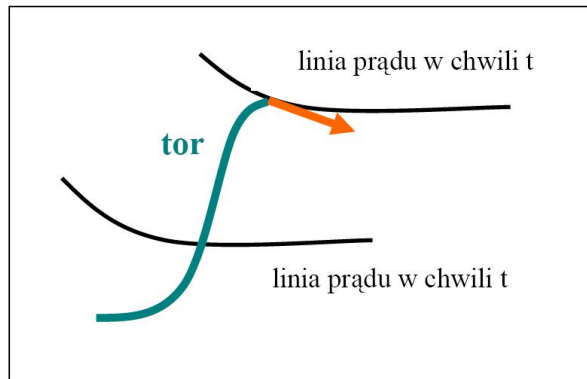
Trzeba teraz wyznaczyć stałe  $C_1$  i  $C_2$ . Postępowanie takie nie jest - na ogół - wykonalne. Lepiej posługiwać się układem (2.11). Całkując równanie z warunkami  $s = 0$ ,  $x_1 = x_{10}$ ,  $x_2 = x_{20}$ ,  $x_3 = x_{30}$  (dla  $t = t_1 = \text{const}$ )

$$x_1 = x_1(t_1, s, x_{10}, x_{20}, x_{30})$$

...

$$x_3 = x_3(t_1, s, x_{10}, x_{20}, x_{30})$$

określamy linię przechodzącą w chwili  $t_1$  przez wybrany punkt. Zmienną niezależną jest długość łuku  $s$ . Można też wprowadzić nową zmienną  $\tilde{s}$ , taką, że  $\frac{dx_k}{\tilde{s}} = v_k(t, x_1, x_2, x_3)$ . Widać, że  $ds = v d\tilde{s}$  i moduł prędkości  $v$  upraszcza się. Zauważamy, że w opisie linii - nazwiemy je liniami pola prędkości albo liniami prądu - czas występuje jako stały parametr. Dla innej jego wartości, czyli w innej chwili, linie prądu przyjmują inny kształt, albowiem inne jest zależne od czasu pole prędkości. Gdy pole prędkości nie zmienia się w czasie linie prądu są oczywiście niezmiennie. Tory i linie prądu są w tym przypadku nierozróżnialne. Dla pola prędkości zmieniającego się z upływem czasu, czyli dla ruchu nieustalonego, sytuacja jest bardziej złożona. Tor jest tworzony przez przyrosty w przedziale czasowym. W każdej chwili istnieją różne zbiory linii prądu. W dowolnej chwili linia styczna do toru na jego końcu ma kierunek wektora prędkości, czyli taki sam, jak linia prądu w tym miejscu. Nieco później, po wydłużeniu toru, zachodzi ta sama relacja, ale w nowym miejscu. Tor "ślizga się" po istniejących w każdej chwili i zmieniających się z czasem liniach prądu (ściślej: mówimy, że jest tych linii obwiednią).



Rysunek 2.4. Tor i linia prądu w chwili  $t$

## 2.4 Pochodna substancjalna

Niech pewna wielkość fizykalna opisująca poruszający się ośrodek ciągły - na przykład temperatura - będzie określona funkcją zależną od czasu i położenia

$$f = f(t, x_1, x_2, x_3) \quad (2.13)$$

Wyrażenie (2.13) przedstawia wartość funkcji  $f$  przypisaną punktowi ośrodka znajdującemu się w chwili  $t$  w miejscu określonym współrzędnymi  $x_1, x_2, x_3$ . Rozważana wielkość zmienia się podczas ruchu. Znajdziemy przyrost  $\Delta f$  funkcji  $f$  w czasie  $\Delta t$ :

$$\Delta f = f(t + \Delta t, x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - f(t, x_1, x_2, x_3)$$

Elementarne zmiany  $\Delta x_i$  określa związek (2.8) zapisany dla "delt"

$$\Delta x_i = v_i \Delta t$$

Rozwijamy pierwszy składnik prawej strony względem wszystkich przyrostów argumentów i odejmujemy drugi człon.<sup>1</sup> W wyniku otrzymujemy:

$$\Delta f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \Delta t$$

Zatem pochodna względem czasu funkcji  $f$  wyraża się następująco

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}. \quad (2.14)$$

To złożone wyrażenie nazywamy pochodną substancjalną (lub materialną) funkcji  $f$ . Pierwszy składnik,  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , nazywamy pochodną lokalną. Określa on zmianę funkcji  $f$  wynikającą z upływu czasu. Suma pozostałych składników - nazywana pochodną konwekcyjną - opisuje zmianę funkcji  $f$  wynikającą z ruchu ośrodka ciągłego. Zauważmy, że gdy  $f$  nie zależy bezpośrednio od czasu, a ośrodek ciągły porusza się, to  $\frac{df}{dt}$  nie znika.

Zastosujmy nasze rozważania do określenia przyspieszenia. Otrzymamy

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}. \quad (2.15)$$

Wyrażenie po prawej stronie jest długie i nieprzejrzyste. Można - dla skrócenia zapisu - użyć znaku sumy, bo sumujemy trzy identyczne składniki, w których zmienia się numer współrzędnej, względem której różniczkujemy. Otrzymamy

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Jeśli zastosować konwencję sumacyjną, czyli opuścić znak sumy, to powyższy wzór przyjmie postać:

$$a_i = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_i \quad (2.16)$$

Oznacza to, że różniczkując funkcję  $v_i$  operatorem pochodnej substancjalnej o postaci

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \quad (2.17)$$

---

1

$f(t + \Delta t, x_1 + v_1 \Delta t, x_2 + v_2 \Delta t, x_3 + v_3 \Delta t) = f(t, x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_3} v_3 \Delta t + \dots$

otrzymujemy składową przyspieszenia  $a_i$ . Kompletny wektor przyspieszenie  $\vec{a}$  określa się przez różniczkowanie wektora prędkości:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\vec{v} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\right) \quad (2.18)$$

Przejsie do składowych na podstawie równania wektorowego w którym pole wektorowe jest różniczkowane względem współrzędnych jest łatwe tylko w układzie kartezjańskim. W takim układzie wersory są stałe, a więc niezależne od miejsca i czasu. Wobec tego różniczkowanie wektora sprowadza się do różniczkowania jego składowych. Dla dowolnego układu współrzędnych kierunki wersorów zależą od miejsca i trzeba również dokonać ich różniczkowania, co wprowadza znaczącą komplikację równań.

Dla stałych wersorów  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  możemy zapisać pochodne cząstkowe wektora  $\vec{v}$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}\vec{v} &= \vec{e}_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + \vec{e}_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_k} + \vec{e}_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} &= \vec{e}_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \vec{e}_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + \vec{e}_3 \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{aligned}$$

Zdefiniujmy teraz operator różniczkowania zwany nabłą. Oznacza się go symbolem  $\nabla$ . Przedstawia on następującą operację różniczkową

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (2.19)$$

Zapiszmy pochodną substancjalną używając tego operatora:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \quad (2.20)$$

Iloczyn skalarny wektora  $\vec{v}$  i wektora  $\nabla$  to po prostu

$$(\vec{v} \cdot \nabla) = v_1 \cdot \nabla_1 + v_2 \cdot \nabla_2 + v_3 \cdot \nabla_3$$

gdzie  $\nabla_k$  oznacza k-tą składową nabli równą  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ . Można zauważyć, że iloczyny nabli i dowolnego pola wektorowego nie mają własności zwykłych iloczynów. Mianowicie, iloczyn skalarny wektorów nie zależy od kolejności czynników. Iloczyn zawierający nabłą nie ma tej własności (nie jest przemienny). Łatwo to sprawdzić biorąc

$$(\nabla \cdot \vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

co oczywiście nie jest tym samym czym jest iloczyn  $\vec{v} \cdot \nabla$  zapisany powyżej. Czasem zamiast operatora nabli używa się symbolu *grad* (skrót od symbolu "gradient"). Operator gradientu jest tożsamy z operatorem nabli:

$$\text{grad} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \nabla \quad (2.21)$$

Oprócz użytego wcześniej iloczynu skalarnego można określić iloczyn wektorowy, w którym czynnikiem jest nabla. Iloczyn taki wygląda następująco

$$\nabla \times \vec{v} = \text{grad} \times \vec{v}$$

i jest wektorem. Nosi on nazwę rotacji wektora -  $rot \vec{v}$ . Jego składowe najwygodniej obliczać metodą wyznacznikową:

$$rot \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

Widać znowu różnicę pomiędzy zwykłym iloczynem wektorowym a iloczynem zawierającym nablę: zmiana kolejności w zwykłym iloczynie wektorowym prowadzi tylko do zmiany znaku. Iloczyn z nablą po zmianie kolejności to zupełnie inny twór:  $\vec{v} \times \nabla$  jest operatorem różniczkowym, to znaczy nakazem wykonania różniczkowań i pomnożenia pochodnych tak, jak wynika to z definicji iloczynu wektorowego. "Pułapek" tego rodzaju jest wiele i wszelkie zapisy zawierające nablę trzeba traktować uważnie. Jak się okaże, korzyści wynikające z jej użycia są na tyle znaczące, że warto się tym zapisem posługiwać.

## 2.5 Pochodna wielkości ekstensywnej

W fizyce występują dwa rodzaje wielkości. Przykładami wielkości pierwszego rodzaju są: ciśnienie, temperatura, prędkość, natężenie pola elektrycznego lub magnetycznego. Do drugiego rodzaju można zaliczyć masę, ładunek elektryczny, moment magnetyczny, energię wewnętrzną, pęd itp. Wielkości wymienione w pierwszej grupie są określone w każdym miejscu rozważanego ciała. Wielkości drugiej grupy definiujemy dla ciała. Są one obdarzone następującą, istotną cechą: ich wartość obliczana dla sumy ciał jest równa sumie ich wartości obliczonych dla poszczególnych ciał. Wielkości o takiej właściwości nazywamy ekstensywnymi. Zapiszmy ściśle ich istotną - definicyjną - cechę. Niech ciała wypełniają rozłączne obszary  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  itd.  $F$  oznacza wielkość ekstensywną. Możemy napisać:

$$F(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \dots) = F(\Omega_1) + F(\Omega_2) + F(\Omega_3) + \dots$$

Mnemotechniczna reguła charakteryzująca wielkość ekstensywną wynika ze zdania: "masa sumy ciał jest równa sumie mas ciał". Wypowiedzianą i zapisaną właściwość ma całka: całka obliczona dla sumy rozłącznych obszarów jest równa sumie całek dla poszczególnych obszarów. Znane jest twierdzenie (Radona-Nikodyma)[?] pozwalające określić każdą wielkość ekstensywną jako całkę braną po obszarze wypełnionym przez ciało:

$$F = \int_{\Omega} f d\Omega \quad (2.23)$$

Funkcja podcałkowa to "gęstość" wielkości  $F$  albo inaczej "wielkość właściwa  $F$ ". Na przykład: energia wewnętrzna właściwa lub masa właściwa. Masę właściwą nazywamy "gęstością" w skrócie od gęstości masy. Oczywiście jest, że  $dF = f d\Omega$ .

Obliczymy pochodną wielkości  $F$  określonej dla poruszającego się ciała składającego się ze zbioru punktów materialnych wypełniających w chwili początkowej obszar  $\Omega_0$ . Dla dowolnej chwili  $t > 0$  ten zbiór wypełnia inny obszar  $\Omega(t)$ . Zapiszmy definicję  $F$ :

$$F = F(t) = \int_{\Omega(t)} f(t, \vec{r}) d\Omega$$

Różniczkowanie  $F(t)$  jest złożone, bo - jak widać - czas  $t$  występuje zarówno pod znakiem całki jak i w granicach całkowania. Można uprościć rachunek eliminując czas z określenia granic. Pamiętajmy, że  $\Omega(t)$  jest przekształceniem obszaru początkowego  $\Omega_0$ . Przekształcenie to określają tory punktów materialnych. Napiszmy równanie toru (2.2) dla przekształcenia  $x_{i0} \rightarrow x_k$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ , czyli

$$x_i = x_i(t, x_{10}, x_{20}, x_{30})$$

Wykonamy ( w myśli) to przekształcenie i zamiast całkować względem  $x_i$  będziemy całkowali względem  $x_{i0}$ . Przy zamianie zmiennych należy pamiętać o przekształceniu miary elementarnej objętości  $d\Omega$

$$d\Omega = Jd\Omega_0.$$

$J$  oznacza wyznacznik utworzony z pochodnych

$$J = \det \left\{ \frac{\partial x_\alpha(t, x_{10}, x_{20}, x_{30})}{\partial x_{\beta 0}} \right\}$$

czyli jakobian.<sup>2</sup> Mamy więc

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} J \cdot f(t, \vec{r}(t, \vec{r}_0)) d\Omega_0$$

Czas w powyższym wzorze występuje tylko pod znakiem całki. Różniczkowanie względem czasu i całkowanie przestrzenne są więc operacjami przemiennymi i można napisać

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\Omega_0} \left[ \frac{\partial J}{\partial t} f + J \frac{df}{dt} \right] d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} f + \frac{df}{dt} \right] J d\Omega_0$$

Ostatnie wyrażenie zawiera  $J d\Omega_0 = d\Omega$ , co pozwala na powrót do współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$ . Otrzymamy więc

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} f + \frac{df}{dt} \right] d\Omega.$$

Pokażemy dalej, że  $\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = (\nabla \cdot \vec{v})$  i wobec tego wynik wykonanych przekształceń można przedstawić następująco

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ f \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{df}{dt} \right] d\Omega \quad (2.24)$$

Wzór ten określa pochodną wielkości ekstensywnej. Będzie wielokrotnie używany przy wyprowadzaniu równań różniczkowych z podstawowych praw fizyki.

Pozostaje obliczyć pochodną jakobianu. Rachunek wykonamy określając wartość jakobianu po przyroście czasu, to znaczy  $J(t + \Delta t, \dots)$ . Otóż, aby otrzymać obraz  $\Omega_0$  w chwili  $t + \Delta t$  trzeba "przejsć" przez obraz  $\Omega_0$  w chwili  $t$ . Innymi słowy: przekształcenie  $\Omega_0 \rightarrow \Omega(t + \Delta t)$  jest złożeniem dwóch przekształceń  $\Omega_0 \rightarrow \Omega(t) \rightarrow \Omega(t + \Delta t)$ . Zachodzi też superpozycja (złożenie)przekształceń elementarnej objętości:

$$d\Omega(t + \Delta t) = J(t + \Delta t, \dots)d\Omega_0 = J(\Delta t, \dots)d\Omega(t) = J(\Delta t, \dots) \cdot J(t, \dots)d\Omega_0$$

<sup>2</sup>Jeśli  $x = f(x_0)$  to  $dx = \frac{df}{dx_0} \cdot dx_0$ . Dla wielu zmiennych zamiast pochodnej pojawia się jakobian, a rolę  $dx$  i  $dx_0$  odgrywają  $d\Omega$  i  $d\Omega_0$ . Omówienie zamiany  $d\Omega$  na  $J d\Omega_0$  można znaleźć w podręcznikach analizy matematycznej

Stąd wynika, że  $J(t + \Delta t, \dots) = J(t, \dots) \cdot J(\Delta t, \dots)$ . Obliczamy pochodną używając definicji i wyłączając  $J(t)$  przed symbol granicy :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{J(t + \Delta t) - J(t)}{\Delta t} = J(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{J(\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

W czasie  $\Delta t$  zachodzi mała zmiana  $x$ -ów. Zmianę tę, to znaczy przekształcenie  $x_i(t) \rightarrow x_i(t + \Delta t)$  zapisujemy tak:

$$x_i(t + \Delta t, \dots) = x_i(t) + v_i(t, \dots)\Delta t$$

Jakobian  $J(\Delta t)$  to wyznacznik utworzony z pochodnych  $\partial x_i(t + \Delta t, \dots)/\partial x_k(t, \dots)$ . Jego jawna postać jest następująca:

$$J(\Delta t) = \det \left\{ \begin{array}{ccc} 1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Delta t & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \Delta t \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta t & 1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \Delta t \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \Delta t & 1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Delta t \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

Po rozpisaniu wyznacznika (2.25) (rozwijamy go względem potęg  $\Delta t$  rzędu 0,1,2 i 3) otrzymamy:

$$J(\Delta t) = \det \left\{ \frac{\partial x_\alpha(t + \Delta t, \dots)}{\partial x_\beta(t, \dots)} \right\} = 1 + \Delta t \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + (\Delta t)^2(\dots) + \dots$$

Odejmujemy jedynkę, dzielimy przez  $\Delta t$  i dla  $\Delta t \rightarrow 0$  wyrazy wyższego rzędu pomijamy. Ponieważ  $J(t)$  uprości się, to ostatecznie

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = (\nabla \cdot \vec{v}).$$

## 2.6 Zasada zachowania masy

Zasada zachowania masy jest fundamentalnym prawem fizyki.<sup>3</sup> Wyrazimy ją następująco: masa tego samego zbioru punktów materialnych jest stała.

Masa jest wielkością ekstensywną. Można więc napisać

$$m = \int_{\Omega(t)} \rho(t, \vec{r}) d\Omega. \quad (2.26)$$

Wielkość  $\rho$  nazywana jest, jak już wiemy, gęstością masy (lub w skrócie - gęstością) albo masą właściwą. Jeśli  $\Omega(t)$  jest obrazem obszaru  $\Omega_0$ , to zawiera niezmienny zbiór punktów materialnych wypełniających ten obszar w chwili początkowej. Masa  $m$  jest więc niezmienna - a jej pochodna względem czasu - zerowa. Różniczkujemy (2.26) używając reguły różniczkowania wielkości ekstensywnych (2.23) i otrzymujemy

$$\int_{\Omega(t)} \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) \right] d\Omega = 0. \quad (2.27)$$

<sup>3</sup>w fizyce relatywistycznej uwzględnia się energię i masę. Nie rozważamy takich sytuacji.



Równanie (2.27) zachodzi dla każdego  $\Omega(t)$ , bo każdy obszar wypełniony przez zbiór punktów materialnych jest przekształceniem pewnego obszaru  $\Omega_0$  i zawsze można zastosować podane rozumowanie dotyczące różniczkowania wielkości ekstensywnej. Stwierdzamy, że całka z wyrażenia zawartego w nawiasie kwadratowym [...] obliczana dla każdego obszaru znika. Dowiedzimy, że jest tak wtedy i tylko wtedy gdy [...] = 0. Jasne, że całka znika gdy [...] = 0. Ale nie wiemy czy zachodzi implikacja odwrotna, to znaczy - czy ze znikania całki dla każdego  $\Omega$  wynika zerowość wyrażenia w nawiasie [...]. Przypuśćmy, że wartość w nawiasie nie jest zerem. Zatem w części obszaru  $\Omega$  - nazwijmy tę część  $\Omega^+$  - funkcja podcałkowa jest dodatnia. Całka z funkcji dodatniej nie jest zerem (chyba, że  $\Omega^+$  ma zerową miarę. Wtedy wystarczy rozważyć obszar  $\Omega^-$ , dla którego wyrażenie w nawiasie [...] jest ujemne). Otrzymaliśmy sprzeczność, bo całka znika dla każdego obszaru, a więc i dla  $\Omega^+$ . Dowiedliśmy, że skoro (2.27) zachodzi dla każdego  $\Omega$ , to ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja podcałkowa znika. Można zatem napisać

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0. \quad (2.28)$$

To różniczkowa forma prawa zachowania masy. Wiąże ona dwa pola: wektorowe pole prędkości i skalarne masy właściwej. (Pole to w fizyce funkcja czasu i położenia. Są pola skalarne, wektorowe, tensorowe itd.). Powiązanie dwu pól oznacza, że nie można zmienić jednego z nich nie zmieniając drugiego. Napiszmy teraz rozwiniętą formę pochodnej substancjalnej masy właściwej i podstawmy ją do (2.28):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\rho + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$

Nabla oznacza oczywiście różniczkowanie. Pochodna iloczynu wielkości skalarnej  $\rho$  i pola wektorowego  $\vec{v}$ , czyli wektora  $\rho\vec{v}$  to pochodna pierwszego czynnika razy drugi ( $= \vec{v} \cdot \nabla \rho = (\vec{v} \cdot \nabla)\rho$ ) plus pierwszy czynnik razy pochodna drugiego, czyli  $+\rho(\nabla \cdot \vec{v})$ . Mamy zatem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0. \quad (2.29)$$

Rozwinięcie skróconego zapisu (2.30) daje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_3) = 0 \quad (2.30)$$

bo nabla  $\nabla$  jest mnożona skalarnie przez wektor  $\rho\vec{v}$ . Wyrażenie będące iloczynem skalarnym nabli i dowolnego pola wektorowego - na przykład pola oznaczonego symbolem  $\vec{G}$  - ma taką postać:

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial}{\partial x_1}G_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}G_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}G_3 = \frac{\partial}{\partial x_i}G_i$$

Nazywamy je diwergencją pola  $\vec{G}$  i zapisujemy w skrócie następująco:

$$diw \vec{G} = \nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial}{\partial x_i}G_i$$

Jeśli rozważamy substancję o niezmienniej masie właściwej (lub gdy jej zmiany są pomijalnie małe), to równania upraszczają się. Wobec założenia  $\rho = const$  otrzymamy

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ albo } diw \vec{v} = 0 \text{ albo}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

Równania różniczkowe wyrażające zasadę zachowania masy nazywamy równaniami ciągłości. Napiżemy jeszcze równanie ciągłości w zmiennych Lagrange'a. Zachodzą równości:

$$m = \int_{\Omega(t)} \rho d\Omega = \int_{\Omega_0} \rho J d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 d\Omega_0$$

Dla każdego  $\Omega_0$  jest spełnione równanie

$$[\rho J - \rho_0] d\Omega_0 = 0$$

Stwierdzamy więc, że

$$\rho J = \rho_0 \tag{2.31}$$

Jakobian - utworzony z pochodnych

$$\frac{\partial x_\alpha(t, x_1, x_2, x_3)}{\partial x_{\beta_0}}$$

zależy od czasu i  $x_{k0}$ . Należy więc wyrazić  $\rho$  przez te same zmienne, czyli napisać:  $\rho(t, x_{10}, x_{20}, x_{30})$ . Równanie (2.31) będzie wtedy wyrażone w zmiennych Lagrange'a.

Jeśli  $\rho = const$ , to otrzymamy

$$J = 1 \tag{2.32}$$

co oznacza, że  $d\Omega = d\Omega_0$ . Substancja o stałej masie właściwej zachowuje objętość. Tym samym stwierdzamy, że warunek znikania dywergencji prędkości niezależnie od własności gęstości masy (masy właściwej) prowadzi do zachowania objętości ośrodka ciągłego.

## 2.7 Druga zasada dynamiki

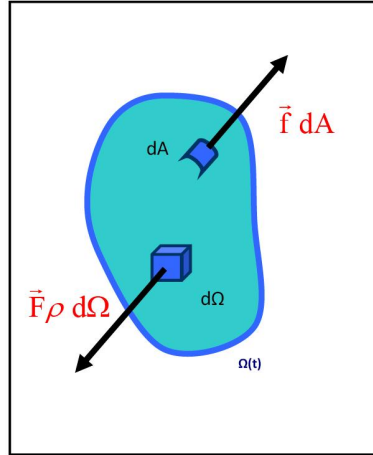
Drugą zasadę dynamiki możemy wyrazić następująco: pochodna pędu układu materialnego względem czasu jest równa sumie sił zewnętrznych działających na układ. Stosując tę zasadę należy zdefiniować układ materialny, określić jego pęd i działające siły zewnętrzne. Wybierzmy dowolny obszar wypełniony punktami materialnymi tworzącymi ośrodek ciągły. Oznaczmy ten obszar  $\Omega(t)$ . Pęd jest wielkością ekstensywną. Może być wyrażony całką z gęstości pędu i zapisany jak poniżej

$$\vec{P} = \int_{\Omega(t)} \rho \vec{v} d\Omega \tag{2.33}$$

Rzeczywiście - iloczyn  $\rho d\Omega$  określa elementarną masę  $dm$  zawartą w małym obszarze  $d\Omega$ , a iloczyn tej masy i prędkości jest elementarnym pędem:  $d\vec{P} = \vec{v} dm = \rho \vec{v} d\Omega$ . Pozostaje określić siły działające na ośrodek ciągły zawarty w obszarze  $\Omega(t)$  i wykonać różniczkowanie.

Brzeg obszaru - nazwijmy go  $A$  - styka się z otoczeniem. Zatem na zawartość obszaru  $\Omega(t)$  działa siła "kontaktowa" przenoszona przez powierzchnię. Siła jest wielkością ekstensywną. Wobec tego piszemy

$$\vec{F}_A = \oint_A \vec{f} dA \tag{2.34}$$



**Rysunek 2.5.** Siły działające na ośrodek ciągły

Wielkość  $\vec{f}$  jest powierzchniową gęstością siły. Przy jej użyciu określamy elementarną siłę  $d\vec{F}_A$  działającą na mały płatek powierzchni:

$$d\vec{F}_A = \vec{f} dA \quad (2.35)$$

Wymiarem  $[\vec{f}]$  gęstości siły  $\vec{f}$  jest  $N/m^2$  czyli paskal (Pa). Dlatego  $\vec{f}$  nazywamy jednostkową siłą powierzchniową - (w mianowniku wymiaru tej wielkości jest  $m^2$ ).

Oprócz siły  $\vec{F}_A$  na rozważany układ może działać siła zupełnie innego rodzaju. Jest to tak zwana siła objętościowa. Przykładem takiej siły jest przyciąganie grawitacyjne. Siła ta jest związana z masą i pewnym polem siłowym (w podanym przykładzie jest to pole sił grawitacyjnych) i działa na wnętrze obszaru wypełnionego ciałem. Znowy wykorzystujemy fakt, że siła jest wielkością ekstensywną i otrzymujemy

$$\vec{F}_\Omega = \int_\Omega \vec{F} \rho d\Omega \quad (2.36)$$

Jak poprzednio, elementarną masą jest  $\rho d\Omega$ , a  $\vec{F}$  jest natężeniem pola siłowego - czyli siłą działającą na jednostkę masy (1 kg):

$$d\vec{F}_\Omega = \vec{F} \rho d\Omega = \vec{F} dm \quad (2.37)$$

Pole wektorowe  $\vec{F}$  nazywamy polem jednostkowych sił masowych, albo - krócej - jednostkową siłą masową. Wymiar tego pola jest taki, jak wymiar przyspieszenia. Wracając do określenia pędu i wykonując różniczkowanie możemy napisać równanie wyrażające treść drugiej zasady dynamiki

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \int_\Omega \left[ \frac{d(\rho\vec{v})}{dt} + \rho\vec{v}(\nabla \cdot \vec{v}) \right] d\Omega = \int_\Omega \rho\vec{F} d\Omega + \oint_A \vec{f} dA$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym można uprościć. Obliczamy pochodną czasową iloczynu  $\rho\vec{v}$  i przepisujemy wyrażenie podcałkowe:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{v}(\nabla \cdot \vec{v}) = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

Ponieważ  $\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v})$  jest zerem (na mocy prawa zachowania masy (2.28)), to otrzymujemy zapis drugiej zasady dynamiki w formie następującej

$$\int_{\Omega} \rho \left( \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} \right) d\Omega = \oint_A \vec{f} dA \quad (2.38)$$

Gdyby całka powierzchniowa będąca prawą stroną tego równania została zamieniona na całkę objętościową określoną dla obszaru  $\Omega(t)$ , to całe powyższe wyrażenie można by sprowadzić do równania o następującej formie:

$$\int_{\Omega} [\dots] d\Omega = 0;$$

Równanie to obowiązywało by dla każdego obszaru. Zatem na mocy znanego lematu otrzymalibyśmy równanie bez niewygodnych całek. Aby ten cel zrealizować wyznaczmy siłę powierzchniową  $\vec{f}$ . Okaże się, że siłę tą można będzie określić za pomocą normalnej do powierzchni i pewnego tensoru zwanego tensorem naprężenia. Używając twierdzenia GGO (w całce powierzchniowej normalna pojawi się jako czynnik) przekształcimy nasze wyrażenie do całki objętościowej i otrzymamy równanie w formie różniczkowej. Aby otrzymać odpowiednie wyrażenie określające jednostkową siłę powierzchniową rozpatrzmy umieszczony w ośrodku ciągłym elementarny czworościan o powierzchniach bocznych  $dA_1$ ,  $dA_2$ ,  $dA_3$  i  $dA$ . Powierzchnie numerowane leżą na płaszczyznach utworzonych przez układ współrzędnych prostokątnych. Powierzchnia  $dA$  jest powierzchnią zamykającą, a każda  $dA_k$  jest prostopadła do osi o numerze  $k$ .

rysunek czworościanu

Zmiana czworościanu nie powoduje innego ustawienia  $dA_1$ ,  $dA_2$  i  $dA_3$ , bo powierzchnie te zawsze leżą na płaszczyznach związanych z układem współrzędnych. Zmieniając czworościan (jego krawędzie można skrócić albo wydłużyć) zmieniamy pola boków i orientację powierzchni zamykającej  $dA$ . Oczywiście zmienia się normalna do tej powierzchni. Rzuty normalnej na osie to cosinusy kierunkowe:

$$n_1 = \cos(\vec{n}, \vec{o}_1), \quad n_2 = \cos(\vec{n}, \vec{o}_2), \quad n_3 = \cos(\vec{n}, \vec{o}_3)$$

Powierzchnie  $dA_k$  wyrażamy rzutując  $dA$  na odpowiednią płaszczyznę:

$$dA_k = dA \cdot \cos(\vec{n}, \vec{o}_k) = dA \cdot n_k$$

Na każdą z powierzchni bocznych działa siła powierzchniowa. Jest ona proporcjonalna do powierzchni i jednostkowej siły powierzchniowej na danej powierzchni. Inne siły działające na czworościan (również w ruchu) są proporcjonalne do zawartej wewnątrz masy. Ale masa jest proporcjonalna do objętości. Objętość jest małą trzeciego rzędu. A powierzchnie boczne są małymi rzędu drugiego. Małe rzędu trzeciego można zaniedbać. Uwzględniając tą właściwość dostaniemy

$$\vec{f}dA + \vec{f}_1dA_1 + \vec{f}_2dA_2 + \vec{f}_3dA_3 = 0$$

Dzielimy przez  $dA$  i zapisujemy wynik

$$\vec{f} + \vec{f}_1n_1 + \vec{f}_2n_2 + \vec{f}_3n_3 = 0$$

Widać, iż jednostkowa siła powierzchniowa zależy od  $\vec{n}$  (przy zmianie orientacji płatk  $dA$  zmienia się  $\vec{n}$  a orientacje platków  $dA_k$  leżących na płaszczyznach układu współrzędnych nie zmieniają orientacji). Można więc napisać:  $\vec{f} = \vec{f}(\vec{n})$ . Zauważmy, że siła ta ma następującą właściwość:  $\vec{f}(\vec{n}) = -\vec{f}(-\vec{n})$ . Rzeczywiście, biorąc mały element powierzchni stwierdzimy, że oddziaływanie części ośrodka leżących po obu stronach tej powierzchni znoszą się, a więc przy zmianie zwrotu normalnej ulega zmianie znak jednostkowej siły powierzchniowej. Wykorzystujemy opisaną właściwość do zmiany znaku  $\vec{f}$  na płatkach  $dA, dA_1, dA_2, dA_3$ . Widać, że zwrot  $\vec{n}$  i zwroty normalnych do  $dA_k$  są przeciwne, zatem znaki  $\vec{f}$  i  $\vec{f}_k$  są również przeciwne. Przechodząc do składowych można napisać

$$f_k = f_{1k}n_1 + f_{2k}n_2 + f_{3k}n_3 \quad (2.39)$$

W prawej stronie ostatniego równania występuje dziewięć wielkości  $f_{ik}$   $i, k = 1, 2, 3$ . Oznaczmy je symbolem  $T_{ik}$  (aby wyraźnie odróżnić od składowych siły powierzchniowej) i zapiszmy otrzymany związek tak:

$$f_k = n_i T_{ik} \quad (2.40)$$

To samo równanie w zapisie wektorowym ma formę następującą:

$$\vec{f} = \vec{n} \cdot \mathbb{T} \quad (2.41)$$

Wyobraźmy sobie, że sprowadzamy czworościan do punktu (zmniejszamy "do zera" jego krawędzie). Możemy zatem stwierdzić, że  $T_{ik}$  są określone w każdym miejscu. Wielkości  $T_{ik}$  tworzą macierz tensora naprężenia  $\mathbb{T}$ . Naprężenie to cecha stanu ośrodka ciągłego. Znając je możemy określić siłę działającą na powierzchnię. Może to być powierzchnia ograniczająca pewien fragment ciała albo też dowolna powierzchnia wewnątrz tego ciała. Innymi słowy: tensor naprężenia określa siły wewnętrzne w ośrodku ciągłym i wynikające z sił wewnętrznych siły występujące na powierzchni ograniczającej rozważane ciało. Określając tensor możemy użyć wersorów  $\vec{e}_i$  związanych z osiami współrzędnych kartezjańskich. Dostaniemy wtedy wyrażenie

$$\mathbb{T} = T_{ik} \vec{e}_i \vec{e}_k \quad i, k = 1, 2, 3$$

Jeśli pomnożymy skalarnie  $\mathbb{T}$  przez wektor  $\vec{n} = n_\alpha \vec{e}_\alpha$ , to otrzymamy

$$\vec{n} \cdot \mathbb{T} = n_\alpha \vec{e}_\alpha \cdot T_{ik} \vec{e}_i \vec{e}_k = n_\alpha T_{ik} (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_k$$

Wersory układu kartezjańskiego mają następującą właściwość:

$$(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_i) = \begin{cases} 1 & \alpha = i \\ 0 & \alpha \neq i \end{cases} = \delta_{\alpha i}$$

co oznacza, że wynikiem mnożenia skalarnego takich wersorów są elementy macierzy jednostkowej. Ponadto

$$n_\alpha \delta_{\alpha i} T_{ik} \vec{e}_k = (n_\alpha \delta_{\alpha i}) T_{ik} \vec{e}_k = n_i T_{ik} \vec{e}_k = f_k \vec{e}_k = \vec{f},^4$$

<sup>4</sup>Można też napisać tak:  $\delta_{\alpha i} T_{ik} = \delta_{\alpha 1} T_{1k} + \delta_{\alpha 2} T_{2k} + \delta_{\alpha 3} T_{3k}$ . Z trzech "delt" tylko ta jest jedyneką, dla której drugi indeks jest równy pierwszemu, czyli równy  $\alpha$  i następnie  $\dots = n_\alpha T_{\alpha k} \vec{e}_k = f_k \vec{e}_k = \vec{f}$  A więc  $\delta_{\alpha i} T_{ik} = T_{\alpha k}$ . Albo, jak wyżej,  $n_\alpha \delta_{\alpha i} = n_1 \delta_{1i} + n_2 \delta_{2i} + n_3 \delta_{3i} = n_i$

bo

$$n_i T_{ik} = f_k$$

Wróćmy teraz do rozważań dotyczących mechaniki. Podstawmy określenie siły powierzchniowej (2.41) do całki powierzchniowej występującej w równaniu (2.39). Otrzymamy

$$\oint_A \vec{f} dA = \oint_A \vec{n} \cdot \mathbb{T} dA = \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbb{T} d\Omega \quad (2.42)$$

Przy przekształceniu całki powierzchniowej w objętościową skorzystaliśmy z twierdzenia Greena - Gaussa - Ostrogradskiego, które można zapisać następująco:

$$\oint_A n_\alpha \cdot \varphi dA = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \varphi d\Omega$$

Funkcja  $\varphi$  jest różniczkowalna w  $\Omega$  i całkowalna na brzegu  $A$  (brzeg ten jest co najmniej "kawałkami gładki"), a normalna  $\vec{n}$  jest skierowana na zewnątrz. Teraz stosując lemat wyprowadzony przy omawianiu zasady zachowania masy napiszemy

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \mathbb{T} \quad (2.43)$$

Otrzymaliśmy równanie ruchu nazywane równaniem Cauchy'ego. Definiuje ono pole przyspieszenia, w którym znajduje się ruchomy ośrodek ciągły. Pole to wynika z sił - masowych, określonych przez wektor  $\vec{F}$  i powierzchniowych - wyrażonych przez pochodne tensora naprężenia, a dokładniej przez  $\nabla \cdot \mathbb{T}$ . Jest to równanie ruchu dla dowolnego ośrodka ciągłego. Zastanówmy się nad zróżnicowaniem równań opisujących ruchy rozmaitych substancji uważanych za ośrodek ciągły. Przyspieszenie, siły zewnętrzne oraz gęstość pojawiają się przy opisie każdego ciała. Różnice mogą więc wynikać z rozmaitego określenia tensora naprężenia. Przypominamy, że za pomocą  $\mathbb{T}$  określa się jednostkową siłę powierzchniową działającą na dowolną powierzchnię w obrębie ośrodka. Jest to siła wewnętrzna. Oczywiście doświadczenie z dowolnym (dostatecznie nietrwałym) ciałem stałym wskazuje, że przyłożenie odpowiednich sił zewnętrznych powoduje jego zniszczenie. Pojawiają się siły wewnętrzne o intensywności wystarczającej do zniszczenia ciała. Wcześniej zmienia się jego kształt. To typowe zachowanie obciążonego siłami ciała stałego. Gazy i ciecze mogą być uważane za ośrodek ciągły. Gaz może dowolnie zmieniać kształt i objętość, a ciecz zmienia kształt przy zachowaniu niemal ściśle objętości i podobnie jak gaz nie podlega "zniszczeniu". Rozdzielenie cieczy na części nie jest istotne, albowiem z łatwością można doprowadzić do ich połączenia. Rozdzielenie oznacza przejście w stan gazowy, a ponowne połączenie kondensację powstałej uprzednio pary rozdzielonej cieczy. Na podstawie doświadczenia możemy wnioskować, że siły wewnętrzne powstają przy zmianie kształtu i zmianie objętości. Siły te, a więc i  $\mathbb{T}$ , zależą od odkształcenia i prędkości z jaką odkształcenie zachodzi. Z pewnością mogą też istnieć inne przyczyny występowania naprężenia. A cała różnorodność opisów właściwości substancji ze świata fizycznego jest ukryta w określeniu tensora naprężenia.

## 2.8 Równanie energii

Równanie energii jest rezultatem zastosowania pierwszej zasady termodynamiki do poruszającego się ośrodka ciągłego. Zasada ta może być wypowiedziana tak: pochodna czasowa

energii zawartej w układzie jest równa mocy dostarczonej do układu. Energia i moc są wielkościami ekstensywnymi. Energię określamy następująco

$$E = \int_{\Omega} de = \int_{\Omega} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dm = \int_{\Omega} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) \rho d\Omega \quad (2.44)$$

Wyrażenie  $\rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right)$  przedstawia gęstość energii. Jest to suma zawartej w jednostce objętości energii kinetycznej i energii wewnętrznej. Symbol  $u$  oznacza energię wewnętrzną właściwą. Jest to funkcja stanu termodynamicznego substancji tworzącej układ.

Określmy sposoby dostarczania mocy do układu. Można ją dostarczyć wprost do wnętrza obszaru lub poprzez kontaktującą się z otoczeniem powierzchnię. Pierwszy sposób wynika z ruchu w zewnętrznym polu sił oraz absorbowania przez ośrodek energii promieniowania. Trzeba też uwzględnić wydzielane lub pochłaniane ciepło. Zapiszemy to następująco

$$N_{\Omega} = \int_{\Omega} [\rho \vec{F} \cdot \vec{v} + Q] d\Omega \quad (2.45)$$

Iloczyn  $\rho \vec{F} \cdot \vec{v}$  przedstawia gęstość mocy, będącej rezultatem ruchu, a  $Q$  to zrealizowana wewnątrz gęstość mocy wynikająca z pochłaniania promieniowania, ciepła wydzielonego przy przepływie prądu elektrycznego i, jeśli zajdzie taka potrzeba, ciepła dostarczonego w wyniku zachodzących reakcji chemicznych (lub jądrowych).

Moc dostarczona przez powierzchnię wynika z ruchu ośrodka przy istnieniu siły powierzchniowej oraz mocy dostarczonej przez przewodzenie ciepła. Moc związaną z ruchem i siłą powierzchniową obliczamy następująco:

$$N_1 = \int_A \vec{f} \cdot \vec{v} dA = \int_A \vec{n} \cdot \mathbb{T} \cdot \vec{v} dA \quad (2.46)$$

Przewodzenie ciepła określa wektor - strumień ciepła.<sup>5</sup> Oznaczmy go symbolem  $\vec{q}$ . Wektor ten definiuje moc przekazywaną przez jednostkową powierzchnię w kierunku wektora  $\vec{l}$ :

$$w_q = \vec{l} \cdot \vec{q} \quad (2.47)$$

Jeśli określamy moc dostarczoną do obszaru, to przy normalnej  $\vec{n}$  skierowanej na zewnątrz piszemy:

$$N_2 = \int_A -\vec{n} \cdot \vec{q} dA \quad (2.48)$$

Moc dostarczona przez powierzchnię jest oczywiście sumą  $N_1$  i  $N_2$ . Zapiszmy to łącząc obydwie wyrażenia:

$$N = \int_A \vec{n} \cdot [\mathbb{T} \cdot \vec{v} - \vec{q}] dA \quad (2.49)$$

Możemy sformułować poszukiwane równanie energii. Zrózniczkujmy zatem energię, zastosujmy twierdzenie GGO do całek powierzchniowych i zamieńmy je na całki objętościowe i przyrównajmy do obliczonej pochodnej. Ponieważ obszar  $\Omega$  został przyjęty w sposób dowolny, to po "zgubieniu całek" piszemy:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \text{div}(\mathbb{T} \cdot \vec{v} - \vec{q}) + Q \quad (2.50)$$

<sup>5</sup>Wiadomo z doświadczenia, że przewodzenie ciepła zachodzi w kierunku spadku temperatury. Kierunek tego spadku wskazuje wektor przeciwny do gradientu temperatury. Przewodzenie ciepła jest więc określone za pomocą wielkości, która ma określony kierunek, zwrot i oczywiście wartość.

Wyrażenie  $\mathbb{T} \cdot \vec{v}$  jest zwykłym wektorem:

$$\mathbb{T} \cdot \vec{v} = \vec{e}_i T_{ik} \vec{e}_k \cdot v_\alpha \vec{e}_\alpha = \vec{e}_i T_{ik} v_\alpha \delta_{k\alpha} = \vec{e}_i T_{ik} (\delta_{k\alpha} v_\alpha) = \vec{e}_i T_{ik} v_k$$

Składowa tego wektora to wyrażenie stojące przy wersorze  $\vec{e}_i$ , czyli suma  $T_{ik} v_k$ . Możemy teraz napisać równanie energii (a raczej jego prawą stronę) w postaci rozwiniętej.

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) = \rho F_k v_k + \frac{\partial}{\partial x_i} (T_{ik} v_k - q_i) + Q \quad (2.51)$$

Równanie energii jest zapisem pierwszej zasady termodynamiki. Wiąże zmianę energii z mocą, która jest dostarczana skutkiem ruchu w obecności sił (powierzchniowych - opisywanych przez istniejące wewnątrz obszaru naprężenie i pola siłowego, w którym ewentualnie porusza się rozważany ośrodek) jak również z mocą wynikającą z procesów cieplnych. Procesy te opisują dwa człony: wektor strumień ciepła  $\vec{q}$  i wyraz  $Q$  nazywany źródłowym. Dla substancji izotropowej wektor strumień jest proporcjonalny do gradientu temperatury:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } \theta \quad (2.52)$$

gdzie  $\theta$  oznacza temperaturę, a  $\lambda$  przewodność cieplną. Wektor  $\text{grad } \theta$  jest skierowany w kierunku maksymalnego wzrostu funkcji  $\theta$ . Znak minus w powyższym równaniu implikuje dodatniość przewodności, gdyż przekazywanie mocy przez przewodzenie ciepła odbywa się w kierunku spadku temperatury.

Wyrażenie  $Q$  nie musi mieć - w każdym przypadku - bezpośredniej interpretacji termodynamicznej. Wystarczy pamiętać, iż może być rezultatem wchłaniania promieniowania elektromagnetycznego i, nawet, przekazywania energii niesionej promieniowaniem korpuskularnym. Wyraz ten zależy również od mocy wydzielanej lub pochłanianej podczas zachodzących reakcji.

Korzystając z równania ruchu możemy określić pochodną czasową właściwej energii kinetycznej. W tym celu mnożymy równanie (2.43) skalarnie przez wektor prędkości  $\vec{v}$ :

$$\rho \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T})$$

Rozwijając operację różniczkowania tensora naprężenia i posługując się definicją iloczynu skalarnego zapisujemy wynik:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \rho F_k v_k + v_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \quad (2.53)$$

Odejmując to równanie ( dla energii kinetycznej właściwej ) od równania energii otrzymamy pochodną czasową energii wewnętrznej:

$$\rho \frac{d}{dt} u = Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

Dla symetrycznego tensora naprężenia, co oznacza, że  $T_{ik} = T_{ki}$  możemy napisać

$$T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) T_{ik}$$



Wyrażenie w nawiasie jest tensorem o macierzy  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \dot{D}_{ik} (= \dot{D}_{ki})$ . Tensor ten oznaczmy  $\dot{\mathbb{D}}$ , a iloczyn wypisany wyżej można zapisać jako  $\dot{\mathbb{D}} \cdot \mathbb{T}$ . Równanie dla energii wewnętrznej to

$$\rho \frac{d}{dt} u = Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \dot{\mathbb{D}} \cdot \mathbb{T} \quad (2.54)$$

Zauważmy, że energia wewnętrzna zależy od pola sił  $\vec{F}$  pośrednio, poprzez pole prędkości występujące w ostatnim wyrazie równania (2.54). Z kolei procesy cieplne zmieniają energię kinetyczną jedynie za pośrednictwem parametrów określających stan termodynamiczny, bo zarówno wektor strumień ciepła jak człon źródłowy nie występują w równaniu określającym zmienność kwadratu prędkości.

## 2.9 Postać bilansowa równań mechaniki ośrodka ciągłego

Równanie ciągłości (2.30) ma szczególną formę:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_3) = 0$$

Występuje tu pochodna czasowa i pochodne względem współrzędnych składowych pola wektorowego  $\rho \vec{v}$ . Mówimy: równanie o takiej postaci ma formę diwergentną. Okazuje się, że taką postać można nadać równaniom ruchu i energii. W lewej stronie każdego z tych równań występuje wyrażenie będące iloczynem  $\rho$  i pochodnej substancjalnej pewnej wielkości  $G$ , to znaczy  $\rho \frac{dG}{dt}$ .  $G$  jest równe  $\left( \frac{v^2}{2} + u \right)$  dla równania energii lub  $v_i$  dla  $i$ -tej składowej równania ruchu. Pomnóżmy równanie ciągłości przez  $G$  i przekształćmy sumę:

$$\rho \frac{dG}{dt} = \rho \frac{dG}{dt} + 0 = \left[ \rho \frac{\partial G}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial G}{\partial x_k} \right] + \left[ G \frac{\partial \rho}{\partial t} + G \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial(\rho G)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho G v_k)$$

Podstawiamy odpowiednie wyrażenia zamiast  $G$  i otrzymujemy:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k v_i - T_{ik}) = \rho F_i \quad (2.55)$$

dla  $i$ -tej składowej równania ruchu

$$\frac{\partial \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho v_k \left( \frac{v^2}{2} + u \right) + q_k - v_i T_{ik} \right] = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + Q \quad (2.56)$$

dla równania energii. Przy braku sił zewnętrznych i mocy  $Q$  każde z równań ciągłości, trzech równań ruchu dla trzech składowych wektora  $\rho \vec{v}$  i równania energii ma następującą postać

$$-\frac{\partial}{\partial t} f_k = \frac{\partial}{\partial x_1}(B_{k1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(B_{k2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(B_{k3})$$

Użyte tu elementy macierzy są oczywiście znane. Określają je podane wyżej równania ciągłości, ruchu i energii. Całkując ostatnie równanie w obszarze  $\Omega_*$  nie zmieniającym

się w czasie i oznaczając brzeg tego obszaru przez  $A_*$  otrzymamy, po użyciu twierdzenia GGO, następujący związek

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega_*} f_k d\Omega = \oint_{A_*} (B_{k1}n_1 + B_{k2}n_2 + B_{k3}n_3) dA \quad (2.57)$$

Jest to równanie określające zmianę zawartości w obszarze całkowania wielkości obliczanej  $f$  wywołaną “napływem” strumieni  $\vec{B} \cdot \vec{n}$  przez jego brzeg. Termin “strumień” oznacza napływającą masę, napływające wraz z ruchomym ośrodkiem składowe pędu lub napływającą energię. Interpretacja ta jest powodem utworzenia nazwy “postać bilansowa” równań. Postać ta jest użyteczna w zastosowaniach i bywa wykorzystywana w obliczeniach numerycznych.

## 2.10 Druga zasada termodynamiki

Kierunkowość procesów zachodzących w świecie ujmuje druga zasada termodynamiki. Wypowiadamy ją następująco: entropia układu izolowanego nie maleje. Entropia jest wielkością ekstensywną i, oczywiście, funkcją stanu. Entropia właściwa - albo gęstość entropii - jest odniesiona do jednostki masy. Zatem entropia układu materialnego zawartego wewnątrz obszaru  $\Omega(t)$  może być zapisana całką:

$$S = \int_{\Omega(t)} \rho s d\Omega \quad (2.58)$$

Zmiany entropii zachodzą w wyniku kontaktu ciała z otoczeniem i związanego z nim przewodzenia ciepła oraz istnieniem objętościowej gęstości mocy  $Q$  i występującymi procesami nieodwracalnymi. Wiemy, że procesy odwracalne nie prowadzą do zmiany entropii i przy określaniu zmian entropii nie muszą być uwzględniane.

Pochodna całki (2.58) - po użyciu wzoru (2.26) i równania ciągłości - może być zapisana następująco:

$$\frac{dS}{dt} = \int_{\Omega} \rho \frac{ds}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} d\dot{S} \quad (2.59)$$

Różniczka  $d\dot{S}$  może być rozumiana jako pochodna czasowa entropii małego obszaru  $d\Omega$  zawierającego małą masę  $\rho d\Omega$ . Możemy zatem napisać:

$$d\dot{S} = \frac{Q d\Omega}{\theta} + \rho \sigma d\Omega + d\dot{S}_e \quad (2.60)$$

W równaniu powyższym  $\theta$  oznacza temperaturę,  $Q d\Omega$  moc dostarczoną w rezultacie istnienia objętościowych źródeł ciepła,  $\sigma$  określa zawsze nieujemną ”prędkość tworzenia entropii” powstałą w wyniku nieodwracalności procesów, a  $d\dot{S}_e$  - różniczkową zmianę entropii, wynikającą z kontaktu rozważanej ”porcji” ośrodka z otoczeniem. Obliczmy tę ostatnią wielkość. Dla małego obszaru o brzegu  $A$  zachodzi

$$\Delta\dot{S}_e = \frac{\Delta\dot{Q}}{\theta} = \frac{1}{\theta} \int_A (-\vec{n} \cdot \vec{q}) dA = \frac{1}{\theta} \int_{\Delta\Omega} -\nabla \cdot \vec{q} d\Omega$$

Uważamy obszar  $\Delta\Omega$  za tak mały, iż temperatura  $\theta$  wewnątrz niego może być uznana za jednorodną. Przewodzony strumień ciepła  $\vec{q}$  zależy od pochodnych temperatury i może

być intensywnie zmienny. Z tego powodu  $\Delta\dot{Q}$  obliczamy za pomocą całki powierzchniowej określonej na brzegu obszaru  $\Delta\Omega$ . Gdy  $\Delta\Omega$  zmierza do zera możemy zapisać<sup>6</sup>

$$d\dot{S}_e = -\frac{1}{\theta}(\nabla \cdot \vec{q})d\Omega$$

Powróćmy teraz do wzoru (2.59) i podstawmy znane już wyrażenia określające  $d\dot{S}$  i  $d\dot{S}_e$ .

$$\int_{\Omega} \rho \frac{ds}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{Q}{\theta} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\theta}(\nabla \cdot \vec{q}) d\Omega$$

Przyjmując obszar  $\Omega$  jako dowolnie wybrany możemy opuścić całki. Zróbmy dodatkowo podstawienie

$$\frac{1}{\theta}(\nabla \cdot \vec{q}) = \nabla \cdot \left( \frac{\vec{q}}{\theta} \right) + \frac{\vec{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2}$$

(wynikające z reguły różniczkowania złożenia funkcji  $\nabla \cdot \frac{\vec{q}}{\theta} = (\nabla \cdot \vec{q}) \frac{1}{\theta} - \frac{\vec{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2}$ ) w wyniku którego otrzymamy:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \left( \frac{\vec{q}}{\theta} \right) = \frac{Q}{\theta} + \rho \sigma - \frac{\vec{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} \quad (2.61)$$

Ostatni człon jest dodatni, bo  $\vec{q} = -\lambda \nabla \cdot \theta$ . W rezultacie możemy napisać nierówność termodynamiczną (Gibbsa - Duhamela):

$$\rho \frac{ds}{dt} - \nabla \cdot \left( \frac{\lambda \nabla \theta}{\theta} \right) \geq \frac{Q}{\theta} + \lambda \frac{(\nabla \theta)^2}{\theta^2} \quad (2.62)$$

Nierówność ta określa warunek, który musi spełniać entropia właściwa  $s$ . Warunek ten jest określony przez przewodzenie ciepła i gęstość objętościowych źródeł mocy. Dla najprostszej sytuacji, w której przewodzenie ciepła można zaniedbać i brak źródeł mocy dostajemy po prostu

$$\frac{ds}{dt} \geq 0$$

co oznacza, że entropia właściwa poruszającej się substancji nie maleje. Ten, na pierwszy rzut oka trywialny wniosek, ma znaczenie w sytuacji, gdy (po przyjęciu uproszczeń) rozważa się ruch gazu z nieciągłościami. Okazuje się, że żądanie nieujemności pochodnej entropii właściwej pozwala wyeliminować pewne - oczywiście niedopuszczalne - rozwiązania układu uproszczonych równań ruchu, energii i ciągłości.

## 2.11 Podsumowanie

Zrekapitulujmy przedstawione wyniki. Otrzymaliśmy równania:

- ciągłości - wyrażające zasadę zachowania masy
- ruchu - wyrażające drugą zasadę dynamiki
- energii - wyrażające pierwszą zasadę termodynamiki

<sup>6</sup>Używamy twierdzenia o średniej:  $\int_{\Omega} f d\Omega = \bar{f} \Omega$ . Jeśli obszar  $\Omega$  znika (najdłuższy zawarty w nim odcinek znika), to  $\bar{f} \rightarrow f$ . W rozważanym przypadku obszarem jest znikający  $\Delta\Omega$ .

Równanie ruchu jest równaniem wektorowym, co oznacza, że faktycznie wynikają z niego trzy równania skalarne. Wraz z równaniami ciągłości i energii pełny układ tworzy pięć równań. Są to równania różniczkowe cząstkowe. Poszukujemy trzech składowych pola prędkości i dwóch parametrów termodynamicznych. Zatem dla układu o dwu stopniach swobody termodynamicznej <sup>7</sup> mamy dokładnie tyle równań ile niewiadomych. Trzeci parametr termodynamiczny wynika z równania stanu.

Wiemy, że zachodzi potrzeba określenia tensora naprężenia  $\mathbb{T}$ . Wielkość ta zależy od ruchu i stanu ośrodka. Nie spodziewamy się, by naprężenie powstało w wyniku przesunięcia równoległego lub (sztywnego) obrotu całego ciała. Naprężenie wynika ze szczególnej cechy, jaką mają ośrodki ciągłe, a mianowicie z deformowalności. Proces deformacji zachodzi w czasie, a więc pojawia się również prędkość z jaką zachodzi deformacja. Najprostszymi postulatami określającymi naprężenie są związki pomiędzy nim a deformacją i prędkością deformacji.

Trzeba zatem określić ilościowe opisy deformacji i prędkości deformacji i ustalić odpowiednie zależności. Oczywiście, zależności te będą zupełnie różne dla ciał stałych i ciał takich jak ciecz lub gaz.

---

<sup>7</sup>Reguła faz Gibbsa określa ilość termodynamicznych stopni swobody (niezależnych zmiennych ekstensywnych) = liczba składników - liczba faz + 2. Rozważamy jeden składnik i jedną fazę.

# Rozdział 3

## Opis ruchu i stanu płynu

### 3.1 Prędkość deformacji i tensor prędkości deformacji

Wyprowadzone uprzednio równania ruchu i energii oraz równanie ciągłości i nierówność entropowa obowiązują dla dowolnej substancji rozumianej jako ośrodek ciągły. Za ośrodek ciągły można uważać obserwowane w odpowiedniej skali dowolne ciało stałe, ciecz lub gaz jak również plazmę, gazy tworzące mgławice (jeśli operuje się wymiarami kosmicznymi, w skali których odległości międzycząsteczkowe w gazie rozrzedzonym są znikome), zawiesiny, pary mokre, polimery, grunty i skały i wiele innych ciał. Różnice właściwości tych ciał są ogromne. Różnorodność tych właściwości prowadzi do różnych określeń tensora naprężenia i w nieporównywalnie mniejszym stopniu, różnych określeń wektora strumienia ciepła. Również szczególne definicje energii wewnętrznej różnicują opisy w pewnym stopniu. Zatem w pierwszej kolejności należy określić specyficzny dla danego ciała tensor naprężenia  $T$ . Uważa się, iż dla ciał stałych, nazywanych prostymi, tensor ten zależy od odkształcenia. Natomiast dla płynów prostych - od prędkości, z jaką odkształcenie zachodzi. (Zakładamy, że czytelnik intuicyjnie wie, co oznacza odkształcenie.) Rzeczywiste ciała - nie idealizowane - są bardziej złożone niż ciała proste. Tensory naprężenia (i niekiedy prędkości zmian naprężenia) zależą od odkształcenia i prędkości odkształcenia. Dalej mówimy, iż ciało ma właściwości lokalne, gdy określenie naprężenia w każdym miejscu zależy od ruchu i stanu (a więc odkształcenia i prędkości odkształcenia) tylko w tym miejscu. Jeśli zachodzi potrzeba użycia określenia ruchu i stanu w otoczeniu rozważanego miejsca - to właściwości ciała są nielocalne. Wreszcie, w prostych sytuacjach, związek pomiędzy omawianymi wielkościami może być wszędzie taki sam (ciało jednorodne) i niezależny od orientacji (ciało izotropowe). W przyrodzie występują ciała niejednorodne i anizotropowe. Jest też wiele ciał, w których omawiana zależność zależy od historii ruchu lub historii zmiany naprężenia.

Wszystkie powyższe uwagi pokazują złożoność problemów mechaniki ośrodków ciągłych, co w rezultacie doprowadziło do wyodrębnienia z niej mechaniki ciał stałych i mechaniki płynów. My zajmować się będziemy mechaniką płynów. Rozpocniemy od stwierdzenia, iż w ruchu płynu pole prędkości różni się istotnie od dobrze znanego ruchu ciała sztywnego. Ciało sztywne może się przemieszczać i obracać. Płyn może również przemieszczać się i obracać, a dodatkowo ulega odkształceniu.

Spróbujmy określić prędkość związaną z odkształceniem. Wydzielimy ten składnik odej-

mując od całkowitej prędkości płynu prędkość występującą w ciele sztywnym. Dla ciała sztywnego możemy napisać:

$$\vec{v}(t, \vec{r}) = \vec{v}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r} \quad (3.1)$$

$\vec{v}_0$  jest zależącą tylko od czasu prędkością ciała. Może to być prędkość wybranego punktu ciała - na przykład środka masy. Prędkość ta określa zwykle przesunięcie. Aby uzyskać drugi składnik trzeba znaleźć prędkość kątową  $\vec{\omega}$ . Człon związany z obrotem zapiszemy używając składowych iloczynu  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ :

$$\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \quad \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \quad \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1$$

Obliczmy rotację tego pola wektorowego. Pierwszą składową wyrażamy następująco:

$$[\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r})]_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) = 2\omega_1$$

W podobny sposób obliczamy drugą i trzecią składową, skąd dostajemy

$$[\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r})]_2 = 2\omega_2$$

$$[\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r})]_3 = 2\omega_3$$

Zatem pokazaliśmy, że

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega} \quad (3.2)$$

Tym samym dla ciała sztywnego można napisać

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \times \vec{r} \quad (3.3)$$

Rozpatrzmy teraz ruch dwu bliskich punktów materialnych w ciele odkształcalnym. Odległość między nimi jest znikoma, a więc

$$\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \dots$$

Dla  $\|d\vec{r}\| \rightarrow 0$  zaniedbujemy wyrazy wyższego rzędu. Wtedy powyższe równanie dla składowych  $v_k(\vec{r})$  przyjmuje postać:

$$v_k(\vec{r} + d\vec{r}) = v_k(\vec{r}) + \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$$

Zapiszmy to w nieco inny sposób

$$v_k(\vec{r} + d\vec{r}) = v_k + dv_k = v_k(\vec{r}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} \right) dx_\alpha + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} \right) dx_\alpha \quad (3.4)$$

Przyrost prędkości  $dv_k$  wynika z zachodzącego odkształcenia i obrotu. Aby otrzymać przyrost wynikający tylko z odkształcenia musimy odrzucić to, co odpowiada wyrazowi "obrotowemu" Przyjrzyjmy się równaniu (3.4) - wyraz "obrotowy" to trzeci w prawej stronie

tego równania. Pierwszy składnik,  $v_k(\vec{r})$  odpowiada wspólnemu ruchowi obydwu rozważanych punktów. Odształcenie wynika z przyrostu prędkości określonego następująco:

$$(dv_k)_{def} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} \right) dx_\alpha \quad (3.5)$$

Symbol “def” oznacza deformację, czyli, po prostu, odształcenie. Określeń tych będziemy używać przemiennie. Zapiszmy to samo równanie wektorowo z użyciem tensora prędkości odształcenia (prędkości deformacji):

$$(d\vec{v})_{def} = \mathbb{D} \cdot d\vec{r} \quad (3.6)$$

Z obydwu powyższych równań wynika, że macierz tensora  $\mathbb{D}$  określa się następująco

$$\dot{D}_{k\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} \right) \quad (3.7)$$

Tensor  $\mathbb{D}$  jest symetryczny, bo zamiana  $k$  i  $\alpha$  powoduje tylko przestawienie składników w prawej stronie.

Podobnie można określić tensor odształcenia. Jego macierz otrzymujemy zamieniając składowe pola prędkości na składowe pola wektorowego przemieszczenia. Tak otrzymany tensor określa się tylko przy małym odształceniu rozważanego ciała.

Duże odształcenia nie mogą być w ten sposób określone, bo trzeba uwzględnić składniki odrzucone w rozwinięciu pola przemieszczenia.

Prędkość odształcenia wynika z jego przyrostu w bliskich sobie chwilach, gdy przysrost czasu dąży do zera. Jasne, że dla krótko trwającego ruchu przyrost przemieszczenia nie może być wielki i tym samym małe odształcenia są wystarczające. Można więc ograniczyć się do wyrazu liniowego i składowe tensora prędkości odształcenia są całkowicie określone przez związki (3.7). Drugi z tensorów występujących w równaniu (3.4), czyli tensor  $\mathbb{O}$  o macierzy

$$\dot{O}_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

nazywamy tensorem prędkości obrotu. Elementarny wektor

$$d\vec{v}_{rot} = \mathbb{O} d\vec{r}$$

określa przyczynek prędkości wynikający z lokalnego obrotu. Oczywiście  $\mathbb{O}$  i  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{v}$  mogą być różne w różnych miejscach. Jest to możliwe w wyniku zachodzących odształceń rozważanego ciała.

## 3.2 Płyn liniowy

Płyn prosty to taka substancja, w której tensor naprężenia jest funkcją tensora prędkości odształcenia:

$$\mathbb{T} = f(\mathbb{D}) \quad (3.8)$$

Odształcenie płynu może być dowolne, bo nie zmienia naprężenia. Innymi słowy: płyn nie reaguje na odształcenie, które już zaistniało, ale reaguje na prędkość z jaką odształcenie zachodzi. Możemy stąd wywnioskować, iż ciało płynne nie ma konfiguracji własnej,

czyli nie ma po prostu własnego kształtu.

Funkcja  $f$  powinna być dostatecznie regularna. Przypuśćmy, że można określić jej rozwinięcie typu szeregu Taylora w otoczeniu zerowego  $\mathbb{D}$ . Możemy to uczynić wykorzystując analogię<sup>1</sup> do zwykłego szeregu w sposób następujący:

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(0) + \text{liniowa funkcja (jednorodna)} \mathbb{D} + \text{funkcja kwadratowa (jednorodna)} \mathbb{D} + \dots$$

Określenie poszczególnych składników takiego rozwinięcia jest związane ze zdefiniowaniem tensorowej funkcji tensora. Kilka prostych faktów, związanych z taką definicją, wynika z rozpatrzenia równania

$$\vec{b} = \mathbb{K} \cdot \vec{a}$$

wiążącego wektor  $\vec{a}$  z wektorem  $\vec{b}$ . Tensor  $\mathbb{K}$  jest zadany. Jest operatorem przekształcającym  $\vec{a}$  w  $\vec{b}$ . Można przyjąć, że dla pewnego  $\vec{a} = \vec{a}_0$  wynik przekształcenia, to znaczy wektor  $\vec{b}_0$  jest współliniowy z  $\vec{a}_0$ :

$$\vec{b}_0 = \lambda \vec{a}_0$$

czyli

$$\lambda \vec{a}_0 = \mathbb{K} \cdot \vec{a}_0 \quad (3.9)$$

Współliniowość jest właściwością geometryczną. Jeśli zmienimy układ współrzędnych, to zmianom ulegną składowe wektora  $\vec{a}_0$  i składowe tensora  $\mathbb{K}$ , ale współliniowość pozostanie. Związki ilościowe wynikające z tej właściwości nie będą zależeć od układu współrzędnych, czyli, jak powiadamy, będą niezmiennicze. Rozpiszmy równanie wektorowe (3.9)

$$(\mathbb{K} - \mathbb{I} \cdot \lambda) \vec{a}_0 = 0 \quad (3.10)$$

$\mathbb{I}$  oznacza macierz jednostkową. Niezerowe rozwiązanie wymaga, by wyznacznik główny zniknął - co prowadzi do równania zwanego równaniem charakterystycznym

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

Współczynniki  $I_1, I_2, I_3$  zależą od składowych tensora  $\mathbb{K}$ . W szczególności  $I_1 = K_{11} + K_{22} + K_{33}$ . Suma tych trzech elementów z głównej przekątnej nazywana jest śladem i oznaczana następująco:

$$I_1 = K_{11} + K_{22} + K_{33} = Tr(\mathbb{K}) \quad (3.11)$$

(Tr to skrót od angielskiego słowa "trace" = ślad.) Równanie charakterystyczne wynika ze współliniowości wektorów  $\vec{a}_0$  i  $\vec{b}_0$  i jest niezależne od układu współrzędnych. Współczynniki  $I_1, I_2, I_3$  są niezmiennie przy zmianie układu współrzędnych. Nazywamy je niezmiennikami głównymi.

Cayley i Hamilton<sup>2</sup> udowodnili, że każda macierz (w naszym przypadku macierz tensora) spełnia swoje równanie charakterystyczne. Mamy więc:

$$\mathbb{K}^3 = I_1 \mathbb{K}^2 - I_2 \mathbb{K} + I_3 \mathbb{I} \quad (3.12)$$

Każda potęga tensora może być wyrażona przez drugą i pierwszą potęgę oraz niezmienniki tego tensora.

Wróćmy teraz do rozwinięcia funkcji  $f$ . Wystąpią w nim tylko dwie potęgi tensora  $\mathbb{D}$ ,

<sup>1</sup> $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$

<sup>2</sup>np. G. Birghoff, S. MacLane: "Przegląd algebry współczesnej" PWN 1960 Warszawa



pierwsza i druga oraz niezmienniki, bo wszystkie wysokie potęgi zostały wyrażone przez niższe, na mocy równania (2.12). Dla wielu substancji przy umiarkowanych prędkościach odkształcenia wystarczy przybliżyć  $f$  funkcją liniową. Możemy zatem napisać:

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(0) + \mathbb{A} \cdot \dot{\mathbb{D}} + \mathbb{B} \cdot Tr(\dot{\mathbb{D}}) \quad (3.13)$$

$\mathbb{A}$  i  $\mathbb{B}$  nie mogą zależeć od  $\dot{\mathbb{D}}$ , bo  $\mathbb{T}$  jest liniową funkcją  $\dot{\mathbb{D}}$ .

Dla substancji izotropowej  $\mathbb{A}$  musi być wielkością skalarną. Również  $\mathbb{B}$  ma prostą postać: musi być skalarem mnożonym przez tensor jednostkowy. Obydwa skalary są niezależne od  $\dot{\mathbb{D}}$ . Napiszmy zgodnie z tradycją

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(0) + 2\mu \dot{\mathbb{D}} + (\mu' - \frac{2}{3}\mu) Tr(\dot{\mathbb{D}}) \cdot \mathbb{I} \quad (3.14)$$

Współczynniki  $\mu$  i  $\mu'$  nazywamy lepkością i drugą lepkością. Niektórzy dodają “dynamiczną”. Pozostaje określić  $\mathbb{T}(0)$ . Dla  $\dot{\mathbb{D}} = 0$   $\mathbb{T}|_0 = \mathbb{T}(0)$ . Jest tak - w szczególności - dla bezruchu. Wtedy  $\vec{v} = 0$  i pochodne prędkości są równe zeru.

W sytuacji gdy nie ma ruchu obowiązuje empiryczne prawo Pascala definiujące wektor siły powierzchniowej przez ciśnienie termodynamiczne  $p$ :

$$\vec{f} = -\vec{n} \cdot p$$

z definicji wektora  $\vec{f}$  wynika też

$$\vec{f} = -\vec{n} \cdot \mathbb{T}$$

Zachodzi więc równość:

$$\mathbb{T}(0) = -p \cdot \mathbb{I} \quad (3.15)$$

Przypomnijmy jeszcze, że

$$\dot{D}_{k\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} \right)$$

i, wobec tego

$$Tr(\dot{\mathbb{D}}) = \dot{D}_{11} + \dot{D}_{22} + \dot{D}_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = diw \vec{v} \quad (3.16)$$

Korzystając z powyższych informacji zapiszmy wyrażenie na tensor naprężenia

$$\mathbb{T} = -\mathbb{I}p + 2\mu \dot{\mathbb{D}} + \mathbb{I}(\mu' - \frac{2}{3}\mu) diw \vec{v} \quad (3.17)$$

Zapiszmy to dla składowych

$$T_{k\alpha} = -p\delta_{k\alpha} + \mu \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} \right) + \delta_{k\alpha}(\mu' - \frac{2}{3}\mu) diw \vec{v} \quad (3.18)$$

Tensor ten jest symetryczny. Pierwszy ze składników nazywamy ciśnieniowym, drugi związany jest z prędkością odkształcenia, a trzeci ze zmianą objętości. Rzeczywiście, na mocy równania ciągłości zachodzi związek

$$diw \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

Zmiana masy właściwej jest związana ze zmianą objętości właściwej, a więc i objętości płynu. Z tego powodu dla płynu o stałej masie właściwej (stałej gęstości) ostatni wyraz

znika.

Lepkość i druga lepkość zależą od temperatury. Dla gazów - w niewielkim stopniu - zależą również od ciśnienia. Przy umiarkowanych zmianach temperatury przyjmuje się stałość obydwu parametrów, co istotnie uprasza równania. (Rozważmy pochodną  $T_{k\alpha}$  względem współrzędnych wtedy gdy lepkości zależą od temperatury. W pochodnej takiej trzeba obliczyć  $\frac{\partial \mu}{\partial x_i}$ . Ale lepkość zależy od położenia za pośrednictwem temperatury, a więc jest tak:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_i} = \frac{d\mu}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}.$$

Zatem w wyrażeniu określającym pochodną  $T_{k\alpha}$  względem  $x_i$  pojawi się między innymi iloczyn

$$\frac{d\mu}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} \right)$$

Równanie stanie się złożone i nieprzejrzyste. Gdy  $\mu \approx const$  to  $\frac{d\mu}{d\theta} = 0$  i otrzymamy zapis istotnie prostszy.)

Równanie (3.15) określa naprężenia dla płynu liniowego. Płyn taki nazywamy płynem Newtona lub newtonowskim. Jest to analogon ciała liniowo sprężystego podlegającego prawu Hooke'a.

Dla wielu problemów przybliżenie liniowe (3.18) jest wystarczające. Lepsze przybliżenie uzyskuje się uzależniając lepkości od niezmienników tensora prędkości odkształcenia (i oczywiście temperatury). W skrajnie złożonych sytuacjach (zele, polimery) trzeba posłużyć się określeniem  $\mathbb{T}$  w postaci funkcji kwadratowej (dwuliniowej) tensora prędkości odkształcenia. Inną istotną komplikacją jest konieczność użycia tak zwanego tensora obrotu własnego. Tensor taki pojawia się w opisie płynu mikropolarnego. To płyn utworzony ze związku chemicznego zbudowanego z cząsteczek istotnie niesymetrycznych elektrycznie. Opisujemy jego ruch przez prędkość i dodatkowo przez tak zwany spin, będący wektorem własnej, mikroskopowej prędkości kątowej. (odwołanie do literatury A. Kucaba - Piętał i Grzegorza Łukaszewicza)

### 3.3 Równanie Naviera - Stokesa

Równanie ruchu płynu liniowego lepkiego (płynu Newtona) nazywa się równaniem Naviera - Stokesa. Aby je napisać wykorzystamy określenie (3.18) składowych tensora  $T_{k\alpha}$  oraz równanie (2.43) wraz z definicją składowych wektora  $div \mathbb{T}$ :

$$(div \mathbb{T})_k = \frac{\partial T_{\alpha k}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial T_{k\alpha}}{\partial x_\alpha}$$

bo oczywiście  $T_{k\alpha} = T_{\alpha k}$ . Obliczając divergencję  $\mathbb{T}$  trzeba zróżniczkować kolejno kilka wyrazów. Pierwszy z nich to

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p \delta_{\alpha k}) = \delta_{\alpha k} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial p}{\partial x_1} \delta_{1k} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \delta_{2k} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \delta_{3k}$$

$\delta_{\alpha k}$  dla  $\alpha \neq k$  jest zerem. Z trzech składników pozostanie ten, dla którego pierwszy indeks delty ma wartość taką jak drugi, czyli jest równy k:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p \delta_{\alpha k}) = \dots = \frac{\partial p}{\partial x_k} \quad (3.19)$$

Kolejny wyraz (przy stałym  $\mu$ ) to

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} = \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) v_k = \mu \left( \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_3^2} \right)$$

Suma trzech pochodnych drugiego rzędu względem współrzędnych nazywa się laplasjanem. Oznacza się go znakiem trójkąta "delta", czyli  $\Delta$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (3.20)$$

Wobec tego wyraz występujący przy  $\mu$  można zapisać po prostu tak:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} \right) = \mu \Delta v_k \quad (3.21)$$

Teraz przekształcimy człon ( $\mu$  jest, jak poprzednio, stałe):

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} = \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) v_\alpha = \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right),$$

bo kolejność różniczkowania w drugiej pochodnej można zamienić. Zauważmy, że indeks  $\alpha$  powtarza się, zatem możemy zapisać

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div } \vec{v}$$

Mamy więc

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\text{div } \vec{v}) \quad (3.22)$$

Ostatni wyraz przekształcamy tak jak pierwszy:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \delta_{\alpha k} \left( \mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{v} \right] = \dots = \left( \mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial x_k} (\text{div } \vec{v}) \quad (3.23)$$

Następnie dodajemy do siebie wyrazy określone przez (3.19), (3.21), (3.23). Zapiszmy otrzymane równanie dla  $k$ -tej składowej ( $k = 1, 2, 3$ )

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho F_k - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu \Delta v_k + \left( \frac{\mu}{3} + \mu' \right) \frac{\partial}{\partial x_k} (\text{div } \vec{v}) \quad (3.24)$$

Musimy pamiętać o definicji pochodnej substancjalnej prędkości. Przypomnijmy, że określa ją wyrażenie

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

Równanie (3.24) jest równaniem ruchu. Możemy je też przedstawić w postaci wektorowej:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \right) = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \left( \frac{\mu}{3} + \mu' \right) \text{grad } (\text{div } \vec{v}) \quad (3.25)$$

To samo równanie dla  $i$ -tej składowej w zapisie indeksowym jest następujące (dla wyrobienia wprawy czytelnika zamieniliśmy oznaczenia indeksów):

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \rho F_i - \frac{dp}{dx_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} v_i + \left( \frac{\mu}{3} + \mu' \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (3.26)$$

Jak każde równanie ruchu wiąże ono przyspieszenie ( w sensie pola przyspieszenia ) z polem sił zewnętrznych, polem sił ciśnieniowych i siłami wynikającymi z lepkości (są to specyficzne, właściwe dla płynu siły tarcia).

Podkreślamy, iż dla lepkości zależącej od temperatury równanie niezmiernie się komplikuje. Nie warto wypisywać go w postaci jawnej, lecz lepiej pozostawić je w formie wyrażonej równaniem (2.43) z dołączoną definicją tensora  $\mathbb{T}$  (lub jego macierzy  $T_{\alpha k}$ ).

Równanie (3.25)(lub (3.24)) nazywa się równaniem Naviera - Stokesa. Należy do nieliniowych (wyraz  $v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$  nie jest liniowy) równań różniczkowych cząstkowych. Zawiera trzy pola : wektorowe pole prędkości i dwa pola skalarne: ciśnienia i masy właściwej. To pięć niewiadomych, a mianowicie - trzy składowe prędkości i dwie wielkości termodynamiczne. Trzeba dołączyć zatem kolejne równania. Będą nimi równanie ciągłości, równanie energii i określenie energii wewnętrznej oraz wektora - strumienia ciepła  $\vec{q}$ . Otrzymamy w efekcie złożony, nieliniowy układ pięciu równań różniczkowych cząstkowych nieliniowych. Rząd tego układu jest wysoki. Mamy cztery równania rzędu drugiego i równanie rzędu pierwszego. Problem jest więc dziewiątego rzędu.

Istotne uproszczenie można uzyskać zakładając stałość masy właściwej  $\rho$ . W takiej sytuacji  $div \vec{v} = 0$ , co powoduje zmniejszenie ilości niewiadomych. W równaniu ruchu występują tylko cztery niewiadome: ciśnienie i trzy składowe pola prędkości. Zauważmy, że równanie ciągłości zawiera tylko pole prędkości, zatem mamy zamknięty układ równań utworzony przez cztery równania:

$$div \vec{v} = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad p + \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \Delta \vec{v}$$

Pomimo względnej prostoty układ ten nastęca wiele trudności. Aby uzyskać rozwiązanie trzeba zdefiniować pole prędkości w całym obszarze ruchu w chwili początkowej i podać prędkość na brzegu obszaru w całym czasie późniejszym. Innymi słowy: zadajemy warunek początkowy i warunek brzegowy. Warunki te formułuje się dla pola prędkości. Początkowe pole musi spełniać równanie ciągłości, a prędkość brzegowa (występująca w warunku brzegowym) musi dawać zbilansowaną masę, bo oczywiście obowiązuje zasada jej zachowania.

Otóż do dziś nie wiadomo, czy tak sformułowane zadanie ma rozwiązanie klasyczne (różniczkowalne w zwykły sposób) dla dowolnie dużych czasów przy poprawnie sformułowanych, ale dowolnych warunkach granicznych ( warunkach brzegowych i początkowych ).

Wiadomo tylko, że rozwiązanie takie istnieje tylko dla krótkich czasów (tuż po początku ruchu) jeśli ruch jest szybki i trójwymiarowy. Można natomiast dowieść istnienia rozwiązania klasycznego, gdy pola zależą od dwu zmiennych przestrzennych (albo, tym bardziej od jednej), jak również wtedy, gdy ruch jest powolny lub nie zależy jawnie od czasu. Ale przecież wszystkie zjawiska fizyczne zależą od czasu i trzech zmiennych określających położenie. Zatem nie znamy dowodu istnienia klasycznego rozwiązania realistycznie opisującego rzeczywistość fizyczną. Ponadto, jeśli układ równań ma opisywać zjawisko fizyczne, to rozwiązanie - jeśli istnieje - powinno być jedynym. Okazuje się, iż uproszczony

układ równań (3.27) może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Jest tak, gdy założymy dla uproszczenia, że ruch nie zależy jawnie od czasu.

Jeśli pole prędkości (i pole ciśnienia) nie zależy od  $t$  w sposób bezpośredni, to  $\partial \vec{v} / \partial t = 0$  i dostajemy równanie

$$v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \Delta \vec{v}$$

zamiast równania ruchu uprzednio przedstawionego (3.27). Równanie to może mieć wiele rozwiązań. Musimy wybrać właściwe. Wybór taki może być dokonany przy użyciu kryteriów nie związanych z samym równaniem. Każde z nich wynika z przyjęcia dodatkowego założenia. Wybierając je kierujemy się zgodnością wyniku z doświadczeniem. Jeśli zgodność taka zaistnieje, to można spodziewać się zbliżonej zgodności w innym niewiele różniącym się problemie. Ostatnim wymogiem nakładanym na poprawnie sformułowane zadanie rachunkowe jest - jak powiadamy - ciągła zależność rozwiązania od danych. Jeśli niewiele zmieniają się dane (parametry określające płyn, warunki formułowane dodatkowo - czyli warunek początkowy i warunek brzegowy), a rozwiązanie zależy w sposób ciągły od danych, to ulega tylko niewielkiej zmianie. W przeciwnym wypadku rozwiązanie nie ma sensu: wiele danych jest wynikiem pomiaru, zawsze prowadzonego ze skończoną dokładnością. Zatem, jeśli mała zmiana danych (na przykład w obrębie błędu pomiaru) powoduje istotną zmianę rozwiązania, to problem nie jest dobrze sformułowany w sensie matematycznym. Jeśli stosuje się obliczenia numeryczne - zawsze prowadzone ze skończoną dokładnością - to przypadkowe błędy zaokrągleń wprowadzają niekontrolowane zmiany rozwiązania. Przy braku ciągłej zależności od danych może pojawić się zniekształcenie rozwiązania. Problemu zaokrągleń nie można wyeliminować również dlatego, że liczby niewymierne i przestępne nie mogą być wyrażone w skończonej reprezentacji cyfrowej. Możliwość zniekształcenia rozwiązania w wyniku zaokrągleń narzuca istotne restrykcje na metody numeryczne aplikowane do zagadnień mechaniki płynów.

Jednocześnie wiadomo, że w ogromnej większości ruchów płynu nawet znikome zaburzenie pochodzące z zewnątrz może zmienić obraz przepływu. Pojawiające się zmiany nie znikają. Mogą pojawić się kolejne zaburzenia modyfikujące ruch. Zmiany te nie mają znacznych amplitud, natomiast ich przebieg czasowy jest bardzo złożony. Ruch o takich cechach pojawia się wtedy, gdy występuje niestateczność hydrodynamiczna. Pojawia się istotny problem: czy niestateczność hydrodynamiczna - będąca cechą wielu ruchów - może być oddzielona od ewentualnej niestateczności obliczeniowej nie prowadzącej do katastrofalnej zmiany rozwiązań? (Problem ten jest nadzwyczaj złożony i sprowadza się do rozstrzygnięcia pytania o różnice pomiędzy turbulencją i tzw. turbulencją numeryczną.) Badanie rozwiązań równań mechaniki płynów jest, jak powiedziano, wyjątkowo skomplikowane i, jak dotąd, na pytanie o istnieniu rozwiązania, o jego jednoznaczność i o ciągłą zależność od danych, - w ogólności - nie potrafimy udzielić odpowiedzi.

Podane równania można rozwiązywać metodami numerycznymi. Złożoność wielu zagadnień wymaga komputerów o wielkiej mocy obliczeniowej. Ocenia się, iż wyznaczenie ruchu gazu wokół samolotu wymaga przetworzenia  $\sim 10^{20}$  liczb. To wiele, nawet dla najlepszych komputerów.

Wyjściem jest używanie opisów uproszczonych. Uproszczenia mogą wynikać z założeń dotyczących kinematyki ruchu bądź z założeń upraszczających właściwości płynu.

Możemy na przykład zakładać, iż ruch nie zależy od czasu, nie zależy od pewnych zmiennych przestrzennych czy też jest osiowosymetryczny. Możemy zakładać, że lepkość nie

odgrywają ważną rolę jak również postulować stałość masy właściwej, co jak już wiemy jest równoważne pominięciu ściśliwości. Założenia ostatniego rodzaju - dotyczące cech fizycznych płynu - mogą dotyczyć części obszaru ruchu. W pozostałych częściach traktuje się płyn jako lepki albo ściśliwy czy też lepki i ściśliwy. Problemy związane z odrębnymi założeniami i połączenia rozwiązań opisujących ruchy różnych w istocie płynów na ogół nie sprawiają trudności, bo podobszary, w których czynimy różne założenia są z reguły dobrze określone geometrycznie. Dobrym przykładem rozdzielania złożonego zagadnienia jest problem szybkiego opływu bryły. W bezpośrednim otoczeniu jej powierzchni trzeba uwzględnić lepkość, albowiem związane z jej istnieniem tarcie wewnątrz płynu powoduje dyssypację energii mechanicznej i powstawanie oporu. Daleko od opływanej powierzchni - określenie "daleko" dotyczy skali zjawisk wywołanych lepkością - dyssypacja maleje i można pominąć lepkość. Okazuje się, że te dwa sprzężone ze sobą problemy są łącznie prostsze, niż wyjściowe zadanie wyznaczenia globalnego pola prędkości.

### 3.4 Równanie energii

Pozostaje dostosować ogólne równanie energii (2.50) do tensora naprężenia właściwego dla płynu Newtona i wykorzystać definicję wektora strumienia ciepła. Składowe tensora określają równanie (3.18), a wektor  $\vec{q}$  ma składowe  $q_i = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ , a pochodne wyrażamy w sposób następujący:

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

Przy stałej wartości przewodności cieplnej  $\lambda$  dostaniemy

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \theta = \lambda \Delta \theta$$

Rozwinięcie wyrażenia zawierającego tensor naprężenia jest trudniejsze. Do operacji

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (T_{ik} v_k)$$

trzeba podstawić składowe tensora  $\mathbb{T}$  określone równaniami (3.18). Pojawiają się trzy składniki. Pierwszy - ciśnieniowy - jest następujący:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (-p \delta_{ik} v_k) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) = -div(p \vec{v})$$

Faktycznie tak jest, gdyż  $\delta_{ik} v_k = \delta_{i1} v_1 + \delta_{i2} v_2 + \delta_{i3} v_3$ . Rachunek tego rodzaju przeprowadzaliśmy w paragrafie (1.7). Powtarzając go otrzymujemy  $\delta_{ik} v_k = v_i$ . Drugi składnik przekształcamy wykorzystując tożsamość

$$2\mathbb{D} \cdot \vec{v} = grad v^2 - \vec{v} \times rot \vec{v} \quad (3.28)$$

Aby wykazać jej prawdziwość dokonujemy mnożenia dla pierwszej składowej obydwu stron. Lewa strona to

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right|_{k=1} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

Po prawej stronie jest:

$$(\text{grad } v^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v})|_1 = 2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + 2v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + 2v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \left\{ v_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - v_3 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right\}$$

Redukujemy cztery wyrazy i stwierdzamy równość obydwu wyrażeń. Wobec tego drugi wyraz obliczanego członu jest następujący

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) v_i \right) = \mu \text{diw}(\text{grad } v^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v})$$

Trzeci wyraz nie nastęrcza trudności:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_k \left( \mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ki} \text{diw}(\vec{v} \text{diw} \vec{v}) \right)$$

Możemy teraz napisać równanie energii:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \text{diw}(p \vec{v}) + \text{diw} \left\{ \mu \text{grad } v^2 - \mu \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} + \left( \mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \vec{v} \text{diw} \vec{v} \right\} + \lambda \Delta Q + Q \quad (3.29)$$

Równanie to określa zmianę energii jednostki masy płynu (tzn. wielkości  $v^2/2 + u$ ) wynikającej z rozwijanej mocy sił zewnętrznych, mocy sił zewnętrznych, mocy sił ciśnieniowych, mocy wynikającej z istnienia lepkości, przewodzenia ciepła i jego źródeł znajdujących się w obrębie płynu.

# Rozdział 4

## Równowaga hydrostatyczna

Najprostsze zastosowanie równań ruchu płynu dotyczy statyki, to znaczy sytuacji niewystępowania pola prędkości. Brak ruchu oznacza brak przyspieszenia i brak sił wynikających z istnienia lepkości. Upraszczamy równanie (3.24) podstawiając  $\vec{v} = 0$ . Pozostaje w nim ciśnienie  $p$ , gęstość  $\rho$  i zadane, zewnętrzne pole sił  $\vec{F}$ , czyli:

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p \quad (4.1)$$

Jeśli równanie to nie jest spełnione, to oczywiście zachodzi ruch. Dla przypadku statycznego, przy zadanej sile masowej, wyznaczamy pole ciśnienie i pole masy właściwej. Jeśli założymy nieściśliwość (można tak uczynić przy dostatecznie małych zmianach ciśnienia dla większości cieczy), to jedyną niewiadomą pozostanie ciśnienie  $p$ . Gęstość  $\rho$  jest stała i oznaczymy ją symbolem  $\rho_0$ . Można wprowadzić tę - stałą - wielkość pod symbol różniczkowania:

$$\vec{F} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho_0} \right) \quad (4.2)$$

Prawa strona tego równania jest gradientem. W lewej występuje pole sił  $\vec{F}$ . Jego składowe są pochodnymi cząstkowymi pewnego skalaru. Skalar ten nazywamy potencjałem pola. Zachodzą związki:

$$F_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k}$$

Nie każde pole wektorowe można w tak prosty sposób określić. Jeśli dwukrotnie zróżniczkujemy  $\phi$  i przyrównamy pochodne z zamienioną kolejnością różniczkowania, to otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} (F_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} (F_i) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i}$$

Widzimy, że składowe pola siłowego muszą spełniać trzy równania:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0 \quad (4.3)$$

Oczywiście indeksy  $i, k$  zmieniają się od 1 do 3. Możemy równość (??) przedstawić w zapisie wektorowym jako

$$\text{rot} \vec{F} = 0 \quad (4.4)$$

Wniosek o znikaniu rotacji pola  $\vec{F}$  wynika z żądania, by istniał potencjał  $\Phi$ . Używając potencjału pola siłowego możemy zapisać równanie równowagi w postaci gradientu różnicy



tego potencjału i ilorazu ciśnienia i masy właściwej. Ponieważ gradient tej różnicy jest zerem, to:

$$\frac{p}{\rho} = \phi + const \quad (4.5)$$

Utwórzmy teraz formę:

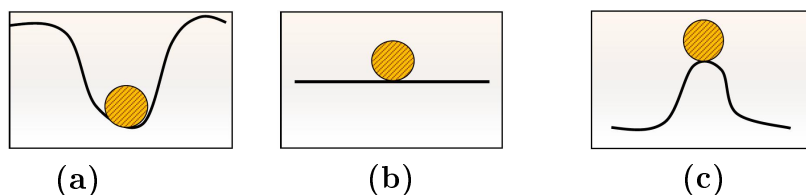
$$F_i dx_i = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

Ponieważ obowiązują równania (??), to powyższe wyrażenie jest różniczką pewnej funkcji  $\Phi$

$$F_i dx_i = d\Phi$$

Wynik całkowania tej formy różniczkowej nie zależy od linii, wzdłuż której prowadzimy całkowanie.

W przypadku zmiennej gęstości sytuacja jest trudniejsza: mamy dwa niewiadome pola skalarne - ciśnienia i masy właściwej. Pola te są powiązane równaniem stanu zawierającym dodatkowo temperaturę. Okazuje się, że mimo tych komplikacji można otrzymać warunek konieczny i wystarczający równowagi<sup>1</sup> Może to być jednak równowaga nietrwała, czyli taka, które przestaje istnieć przy pojawieniu się nawet dowolnie słabego zaburzenia. Taka równowaga nie ma znaczenia fizycznego. Oprócz równowagi nietrwałej i trwałej (w przypadku równowagi trwałej pojawiające się zaburzenie samoistnie zanika) rozważa się jeszcze równowagę obojętną, w której wprowadzone zaburzenie pozostaje niezmienione. Dobrym ideogramem tych trzech form równowagi jest schemat kulki w polu ciężenia:



**Rysunek 4.1.**

- (a) Równowaga trwała.
- (b) Równowaga obojętna
- (c) Równowaga nietrwała

W każdym z pokazanych na rysunku przypadków rozważamy zaburzenia ograniczone. Można bowiem sobie wyobrazić, że np. za wzniesieniem występuje głębokie zagłębienie odpowiadające równowadze trwałej - ale już w innej konfiguracji.

Przenieśmy przedstawioną ideę na przypadek równowagi hydrostatycznej. Wyznamy warunek istnienia równowagi obojętnej i, następnie, warunek trwałości równowagi. Oczywiście, rozważamy równowagę względem małych zaburzeń.

Wyobraźmy sobie, że przy równowadze obojętnej przesunięto dwie porcje płynu zamieniając ich położenia. Nie zmieni to równowagi. Jeśli ponowimy zamianę powracając do

<sup>1</sup>Jeśli napiszemy równania  $\frac{\partial(\rho F_k)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho F_i)}{\partial x_k} = 0$  i obliczymy pochodne iloczynów, a następnie pomnożymy otrzymane związki przez  $F_j$  ( $j \neq i, j \neq k, i = k$  nie jest interesujące) to otrzymamy warunek konieczny równowagi:  $\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{F} = 0$ . Jest to zarazem warunek dostateczny czyli całkowalności formy  $\rho F_k dx_k = d\phi$ , czyli istnienia równowagi hydrostatycznej. Patrz - np. "Równania różniczkowe" W. W. Stiepanow, PWN, Warszawa 1956

położenia pierwotnego - ale być może inną drogą - to stwierdzimy, że nie zaszły jakiegokolwiek zmiany i równowaga obojętna trwa nadal. Zawarty w obydwu porcjach płyn podlegał podczas przemieszczeń przemianom termodynamicznym. Ponieważ powrót do położenia wyjściowego nie zmienił stanu termodynamicznego, to zachodzące przemiany były odwracalne. Odwracalność oznacza stałość entropii każdej dowolnej porcji płynu - a więc stałość entropii właściwej.<sup>2</sup> Otrzymaliśmy pierwszy warunek konieczny występowania równowagi obojętnej: w płynie entropia właściwa jest wszędzie taka sama, czyli, w skrócie, jednorodna.

Wykorzystamy teraz równanie Gibbsa:  $Tds = di - \frac{1}{\rho}dp$  by znaleźć dogodną postać równania równowagi. Ponieważ entropia jest stała, więc można napisać:

$$0 = di - \frac{1}{\rho}dp|_{s=const}$$

co w postaci równoważnej jest związkiem pomiędzy gradientami

$$\frac{1}{\rho} grad p|_s = grad i|_s \quad (4.6)$$

Symbol  $i$  oznacza entalpię właściwą

$$i = u + \frac{p}{\rho} = c_v\theta + \frac{p}{\rho} = c_p\theta \quad (4.7)$$

Równanie równowagi może być teraz przepisane następująco (??) napiszemy

$$\vec{F} = grad i$$

co implikuje drugą część warunku koniecznego istnienia równowagi:

$$rot\vec{F} = 0$$

Dowód, iż  $s = const$  jest wraz ze znikaniem rotacji pola siłowego warunkiem dostatecznym pozostawiamy zainteresowanym.

W efekcie przeprowadzonych rozważań otrzymaliśmy związek:

$$i = const + \phi \quad (4.8)$$

równoważny wyrażeniu określającemu temperaturę:

$$\theta = \theta_0 + \frac{\phi}{c_p} \quad (4.9)$$

Stałą całkowania nazwaliśmy  $\theta_0$ . Jest to temperatura w miejscu zerowej wartości potencjału  $\phi$ . (Funkcja  $\Phi$  jest określona z dokładnością do stałej addytywnej. Można przyjąć, że ma zerową wartość w "dogodnym" miejscu.) Przypomnijmy jeszcze, że  $c_p = \frac{k}{k-1}R$ ,  $kc_v = c_p$  a  $k$  jest wykładnikiem izentropii. Stała gazowa indywidualna  $R$  wiąże się z uniwersalną stałą gazową  $B$  ( $B = 8315 \frac{J}{kmol \cdot K}$ ) wzorem  $R \frac{B}{\mu}$ , a  $\mu$  jest masą kilomola. Przypadek stałości

<sup>2</sup>entropia jest wielkością ekstensywną, dla dowolnego ciała wyrażamy ją całką z entropii właściwej. Stosujemy znany lemat o gubieniu całek.

$\rho$  określony równaniem (??) wynika oczywiście z warunku ogólniejszego, ważnego dla dowolnej gęstości. Otóż - podstawiając do równania Gibbsa wyrażenie określające entalpię  $i$  otrzymamy

$$0 = du + pd \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

Ponieważ  $\rho = \rho_0 = const$ , to  $u = const$  i dalej  $i = \frac{p}{\rho} + const$ , co po podstawieniu do równania określającego entalpię poprzez potencjał pola siłowego sprowadza je do przypadku omawianego na wstępie. Jak widać, dla równowagi płynu o stałej masie właściwej konieczna jest jednorodność entropii  $s$ , co uprzednio, przy założeniu stałej gęstości płynu, było pominięte. Dysponując znanymi związkami pomiędzy parametrami termodynamicznymi obowiązującymi dla stałej entropii i równaniem (??) możemy napisać

$$p = p_0 \left( 1 + \frac{\phi}{c_p \theta_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.10)$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{\phi}{c_p \theta_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.11)$$

Pierwszy z tych wzorów może być użyty do określenia zmian ciśnienia w atmosferze dla raczej niewielkich zmian wysokości przy równowadze obojętnej i temperaturze opisanej równaniem (??). Nie uwzględniliśmy bowiem promieniowania słonecznego i podczerwonego powierzchni Ziemi oraz przemian fazowych związanych z parą wodną<sup>3</sup> Jeśli założyć, że  $\theta = \theta_o = const$  to biorąc  $k \rightarrow 1$  i  $\frac{k}{k-1} = x \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$p = p_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\phi}{x R \theta_0} \right)^x = p_0 \exp \left( \frac{\phi}{R \theta_0} \right)$$

Jest to tak zwany “wzór barometryczny” określający ciśnienie w polu potencjalnym i w stałej temperaturze.

Z wyrażenia (??) i stwierdzenia, że gęstość  $\rho$  jest proporcjonalna do liczby cząstek składnika mieszaniny wynika zależność:

$$n_i = n_{0i} \left( 1 + \frac{\phi}{c_p \theta_0} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

n nazywamy gęstością liczbową cząsteczek składnika mieszaniny. Wyrażenie to pozwala przeanalizować ważny proces techniczny. Jak wiadomo, rozdzielenie izotopów nie jest możliwe na drodze chemicznej. Jednym ze sposobów ich rozdzielenia wykorzystywanych w przemyśle jest użycie wirówki. W wirującej mieszaninie cząsteczki gazu zawierające lżejszy izotop gromadzą się w sąsiedztwie osi wirowania urządzenia. Należy używać takiego związku chemicznego, w którym oprócz separowanego pierwiastka występują lekkie inne składniki. Wtedy masy kilomolowe - a więc i stałe gazowe oraz wyrażenia  $\frac{\phi}{c_p \theta_0}$  mają względnie duże różnice wartości. Drugą przesłanką efektywności jest utrzymywanie możliwie niskiej temperatury.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Podstawiając  $\phi = -gz$ , co odpowiada grawitacji, otrzymamy  $\frac{(k-1)gz}{kR} \approx 0.0098 \frac{^\circ K}{m}$ . Rzeczywisty spadek temperatury wynosi nieco więcej, bo ok.  $0.01 \frac{^\circ K}{m}$ . Dokładniejsze parametry atmosfery Ziemi opisują tabele tzw. ATMOSFERY STANDARDOWEJ.

<sup>4</sup>Problemem jest wzbogacenie uranu naturalnego w lekki, “wybuchowy” izotop  $U^{235}$ . W uranie naturalnym dominuje  $U^{238}$  (99.28 procent). Inny izotop  $U^{234}$  występuje w śladowych ilościach. Również wybuchowy  $U^{233}$  jest wytwarzany sztucznie, w reaktorach jądrowych.

Jak się okaże, dowolne utrzymywane sztucznie pola temperatury może doprowadzić do równowagi nietrwałej i w rezultacie pojawienie się ruchu, co niweczy proces rozdzielania. Dodajmy jeszcze, że nieodpowiednie dla równowagi pole temperatury powoduje ruch nazywany konwekcją naturalną. Warunek występowania równowagi trwałej i - granicznie - obojętnej jest więc warunkiem niewystępowania konwekcji naturalnej.

Rozważmy płyn w równowadze i ponownie myślowo przesuńmy jego porcję. Zmianę ciśnienia powoduje tylko ta składowa przemieszczenia, która jest zgodna z kierunkiem pola siłowego. Rozważane przemieszczenie powoduje zmianę gęstości. Obliczmy tą zmianę

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right) dp + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right) d\theta \quad (4.12)$$

Jeśli przemieszczenie ma miejsce w równowadze obojętnej, to

$$d\rho = d\rho|_s = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right) dp|_s + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right) d\theta|_s$$

Indeks  $|_s$  oznacza, że przyrosty parametrów użytych jako zmienne niezależne odpowiadają stałości entropii. Dla równowagi trwałej odpowiednia zmiana gęstości jest również określona wzorem(?), natomiast pochodne w nawiasach oblicza się na podstawie równania  $\rho = \rho(p, \theta)$ , czyli na podstawie odpowiednio zapisanego równania stanu termodynamicznego. Dla gazu doskonałego będzie to równanie Clapeyrona  $\rho = \frac{p}{R\theta}$ . Obliczone pochodne nie zależą od tego, jaką przyjęto dodatkową hipotezę dotyczącą równowagi. Dalej: w obu przypadkach zachodzi to samo równanie równowagi, a więc zawsze występuje ten sam przyrost ciśnienia:

$$dp = dp|_s = \frac{1}{\rho} d\vec{F} \cdot \vec{r}$$

Odejmując  $d\rho|_s$  i  $d\rho$  otrzymamy różnicę zmian gęstości w równowadze obojętnej i w równowadze trwałej:

$$d\rho|_s - d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\theta} (d\theta|_s - d\theta)$$

Jeżeli  $d\rho|_s > d\rho$  to przemieszczona porcja płynu samoistnie, zgodnie z definicją równowagi trwałej, powróci do położenia poprzedniego. Dla większości substancji pochodna  $\partial\rho/\partial\theta$  jest ujemna<sup>5</sup>, to warunkiem trwałości równowagi jest nierówność

$$d\theta > d\theta|_s$$

Przypominamy, że rozważane różniczkowe przyrosty temperatury zachodzą wzdłuż kierunku wyznaczonego przez pole siłowe. Ponieważ znamy rozkład temperatury dla równowagi obojętnej (?), to

$$d\theta|_{\vec{F}} > \frac{d\phi|_{\vec{F}}}{c_p} \quad (4.13)$$

gwarantuje równowagę trwałą. Symbol  $|_{\vec{F}}$  oznacza przyrost skalarów wzdłuż linii wyznaczonej przez lokalny kierunek pola siłowego. Jest oczywiste, że w kierunkach prostopadłych do  $\vec{F}$  temperatura musi pozostać stała. Dla atmosfery ziemskiej, gdzie  $\phi = -gz = -gx_3$  (oś  $x_3$  kierujemy przeciwnie do ciężenia, czyli "do góry") otrzymamy nierówność

$$\frac{d\theta}{dz} > -\frac{(k-1)g}{kR} \quad (4.14)$$

<sup>5</sup>Odstępstwem cechuje się woda dla temperatury z przedziału  $0^\circ - 4^\circ$ . Ma to istotne znaczenie dla życia pod lodem.

gwarantującą niewystępowanie lokalnych ruchów pionowych w atmosferze. W skrajnym przypadku - inwersji- temperatura rośnie z wysokością, Nad powierzchnią Ziemi pojawia się zjawisko nazywane smogiem. Nie potrafimy zwalczać go aktywnie.

# Rozdział 5

## Dynamika płynów

### 5.1 Płyny nielepkie

Pierwszą teorią przybliżoną, którą poznamy, jest tak zwana teoria płynu nielepkiego. Aby otrzymać opis takiego - hipotetycznego - płynu trzeba założyć, że

$$\mu = 0, \quad \mu' = 0 \quad (5.1)$$

Tensor naprężenia ma składowe zależne wyłącznie od ciśnienia:

$$T_{k\alpha} = -p\delta_{k\alpha} \iff \mathbb{T} = -p \cdot \mathbb{I} \quad (5.2)$$

Zauważmy, że określenie  $\mathbb{T}$  nie zależy od ruchu. Siły wewnętrzne - tylko ciśnienia - w spoczynku i w ruchu są zawsze prostopadłe do powierzchni, na którą działają. Mówimy wtedy o braku tarcia. Tarcie powoduje występowanie składowej stycznej siły powierzchniowej. W płynie pozbawionym lepkości składowej tej nie ma.

Równanie ruchu otrzymamy podstawiając zerowe lepkości do równania (3.24). Otrzymujemy:

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho F_k - \frac{\partial p}{\partial x_k} \quad (5.3)$$

To samo równanie zapisane wektorowo ma postać następującą:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad } p \quad (5.4)$$

Nazywamy je równaniem Eulera.

Zastanówmy się teraz nad równaniem energii. Założenie zerowej lepkości wymaga pewnej analizy. Dotyczy ona mechanizmów tarcia w płynach. Efekt tarcia wynika z właściwości molekularnych substancji. Jak wiadomo, w gazach odległości międzycząsteczkowe wielokrotnie przekraczają dystans istotnego oddziaływania sił przyciągania lub odpychania (gdy odległości między cząsteczkami są małe). Wobec tego można uważać, że ruchy cząsteczek są - w większości przypadków - niezależne, a ich wzajemne oddziaływanie zachodzi jedynie podczas przypadkowych zderzeń. Zderzenie oznacza zbliżenie cząstek na odległość istotnego wzrostu siły międzycząsteczkowego odpychania. Przy małej wzajemnej odległości siła ta wzrasta do wielkich wartości radykalnie zmieniając ruch zbliżających się do siebie cząsteczek. Istotna zmiana ruchu zbliżających się cząstek to zderzenie. Zachowany jest wtedy łączny pęd i energia, a środek masy układu nie zmienia swego ruchu.

Przypuśćmy, że w poruszającym się gazie prędkość zmienia się wraz z położeniem. Wydzielimy myślowo dwie bliskie sobie warstwy. Występuje różnica ich prędkości. Przez prędkość rozumiemy ruch uśredniony zbioru cząstek tworzących warstwę w otoczeniu danego miejsca. Ale poruszające się ruchami przypadkowymi cząsteczki gazu przemieszczają się również między warstwami. Wobec tego dochodzi do wymiany pędu pomiędzy warstwami. Makroskopowym opisem tej wymiany jest zależna od prędkości odkształcenia - a więc pochodnych prędkości - siła tarcia. Przekazywanie pędu odbywa się przez zderzenia z cząsteczkami w warstwie, do której trafiły przemieszczające się cząsteczki z innej warstwy. W zderzeniach takich wymieniana i przekazywana jest również energia. Miarą energii kinetycznej przypadkowego ruchu molekuł jest temperatura. Wymiana energii przez wymianę cząsteczek o różnych prędkościach ruchu chaotycznego to w makroskopowym opisie przewodzenie ciepła. Jeśli zaniedbamy lepkość, a więc efekty związane z wymianą pędu, to trzeba również zaniedbać przewodzenie ciepła.

Dla cieczy mechanizm powstawania naprężeń stycznych jest całkowicie inny. Odległości międzycząsteczkowe są na tyle małe, by siły międzycząsteczkowe miały znaczące wartości. Cząsteczki przyjmują taką konfigurację, by siły te wzajemnie się redukowały. Mówimy, że ciecz ma strukturę quasikrystaliczną. Deformująca się ciecz zaburza taką strukturę, co wiąże się z powstaniem makroskopowych sił wewnętrznych. Temperatura jest miarą energii związanej z drganiami cząsteczek względem położenia równowagi. Zaniedbanie lepkości oznacza założenie, że nie zachodzą zmiany mikroskopowej konfiguracji cząsteczek. Zatem płyny nielepkie nie powinny przewodzić ciepła.

Nawiasem mówiąc: zwiększenie temperatury gazu oznacza wzrost energii kinetycznej ruchów cieplnych i tym samym wzrost wymiany pędu. A to manifestuje się wzrostem lepkości<sup>1</sup>.

Dla cieczy wzrost temperatury oznacza wzrost energii drgań cząsteczek w sieci pseudokrystalicznej. Taką "rozedrganą" sieć łatwiej zaburzyć. Lepkość w tym wypadku maleje. Wracając do głównego wątku piszemy:  $\vec{q} = 0$ . Brak przewodzenia ciepła oznacza znikanie wektora przewodzenia ciepła i, wobec tego, równanie energii (2.51) zapisujemy następująco:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \text{div}(p \vec{v}) \quad (5.5)$$

Zaniedbaliśmy w tym równaniu  $Q$ . Wydaje się, że przy założeniu braku przewodzenia ciepła istnienie wewnętrznych źródeł ciepła może doprowadzić do wielkich trudności, gdyż przy "braku odpływu" wydzielonego ciepła temperatura mogłaby się nadmiernie podnieść.

Rozważmy teraz tensor naprężeń. Z pełnej formy tego tensora pozostał wyłącznie składnik ciśnieniowy  $-p\mathbb{I}$ . Dla pełnego opisu ruchu trzeba jeszcze napisać równanie ciągłości i zdefiniować zależności termodynamiczne między energią wewnętrzną i gęstością.

## 5.2 Całki równania Eulera i równania energii

Przyjmując pewne założenia można znaleźć tzw. całki pierwsze równania Eulera i równania energii. Określenie "całka pierwsza" równania różniczkowego oznacza związek pomiędzy funkcjami i ich pochodnymi niższego rzędu niż występujące w równaniu. Równania

<sup>1</sup>Skala prędkości molekularnych jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z temperatury. W przybliżeniu -  $\mu \sim \sqrt{T}$

są rzędu pierwszego, więc ich całki pierwsze nie będą zawierały pochodnych. Znamy dwie całki równania Eulera. Pierwsza nazywa się “równaniem Bernoulliego”, a druga całką Cauchy’ego - Lagrange’a.

Podajmy założenia prowadzące do tych równań:

- potencjalność pola sił masowych  $\vec{F}$  co oznacza, że  $\vec{F} = \text{grad } \Phi$ ,
- barotropowość płynu, to znaczy zaistnienie związku wyłącznie pomiędzy ciśnieniem i masą właściwą

$$\rho = \rho(p) \quad (5.6)$$

Jak wiadomo z termodynamiki dla substancji jednoskładnikowej i jednofazowej zachodzi równanie stanu przedstawione poniższym związkiem:

$$\rho = \rho(p, \theta) \quad (5.7)$$

Jeśli z góry znana jest przemiana termodynamiczna tzn. inny związek pomiędzy parametrami termodynamicznymi to można wyrugować z obydwu temperaturę  $\theta$  i otrzymać równanie (??).

Przekształćmy równanie Eulera wykorzystując barotropowość i potencjalność sił masowych. Wprowadzamy funkcję ciśnienia taką, że:

$$dP(p) = \frac{dp}{\rho(p)} \quad (5.8)$$

Gdy zróżniczkujemy to równanie po zmiennych przestrzennych otrzymamy

$$\frac{\partial P(p)}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}.$$

Wykorzystując powyższe przekształcenie możemy napisać równanie Eulera w następującej formie:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \text{grad} [\Phi - P(p)] \quad (5.9)$$

Całka Cauchy’ego-Lagrange’a dotyczy ruchów, w których pole prędkości ma potencjał, to znaczy

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi \quad (5.10)$$

i może zależeć od czasu.

Przepiszmy teraz pochodną substancjalną dla potencjalnego pola prędkości

$$\begin{aligned} \frac{dv_k}{dt} &= \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} / 2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Zamieniliśmy tu kolejność różniczkowania i zauważyli, że iloczyn pochodnych potencjału  $\varphi$  daje, po zsumowaniu względem  $i$ , kwadrat prędkości. Używając pochodnych zamiast gradientu w (??) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} [\Phi - P] \quad (5.11)$$



Równość ta oznacza, że wyrażenia w nawiasach kwadratowych mogą się różnić - co najwyżej - o funkcję zależną wyłącznie od czasu. Zatem możemy napisać:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P(p) - \Phi = f(t) \quad (5.12)$$

Jest to właśnie “całka Cauchy’ego Lagrange’a”. Funkcja  $f(t)$  nie zależy od położenia, a więc “zmienia się jednakowo w całym obszarze ruchu”. Jeśli ruch nie zależy od czasu w sposób bezpośredni to  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  i  $f(t) = const$ . Dostajemy w takiej sytuacji równanie

$$\frac{v^2}{2} + P(p) - \Phi = const \quad (5.13)$$

Stała  $const$  jest wszędzie taka sama.

Równanie Bernoulliego otrzymujemy dla ruchu ustalonego. Piszemy w tym wypadku równanie Eulera dla składowych:

$$v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} [P(p) - \Phi]$$

i mnożymy je przez  $v_k$  (sumowanie będzie względem indeksu  $k$ ):

$$v_i v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = v_k \frac{\partial}{\partial x_k} [P - \Phi]$$

ale

$$v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v_k v_k}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

Zauważmy też, że

$$v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \left( v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \frac{v^2}{2} = v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

Tym samym można napisać:

$$v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{v^2}{2} + P(p) - \Phi \right] = \vec{v} \cdot grad \left( \frac{v^2}{2} + P(p) - \Phi \right) = 0$$

Równanie to oznacza prostopadłość wektora  $\vec{v}$  i wektora  $\left( \frac{v^2}{2} + P(p) - \Phi \right)$ . Skoro gradient wyrażenia w nawiasie jest prostopadły do prędkości, to

$$\frac{v^2}{2} + P(p) - \Phi = const|_{l,pradu} \quad (5.14)$$

bo kierunek prędkości jest zgodny z kierunkiem stycznej do linii prądu. Prostopadłość gradientu do danej linii odpowiada stwierdzeniu, że różniczkowana funkcja zmienia się w kierunku prostopadłym, natomiast wzdłuż linii prądu nie ulega zmianom (rzut gradientu na tę linię jest zerowy).

Powyższe równanie (??) jest nazywane równaniem Bernoulliego. Porównajmy je z wyprowadzonym już wcześniej równaniem Cauchy - Lagrange’a (??). Zauważmy, że dla przypadku ruchu potencjalnego stała występująca w równaniu (C-L) ma taką samą wartość wszędzie. Dla ruchu niepotencjalnego stała Bernoulliego (tak się nazywa  $const$  w (??)) jest

zachowana na linii prądu, a dla ruchu potencjalnego ma taką samą wartość na wszystkich liniach prądu. Z tego wynika, że ruchy potencjalne i ruchy niepotencjalne istotnie różnią się.

Można udowodnić, że

$$v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} \quad (5.15)$$

Tożsamość ta pozwala napisać równania Eulera tak:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} + \text{grad} \left[ \frac{v^2}{2} + P(p) - \Phi \right] = 0$$

Zakładamy przy tym barotropowość i potencjalność sił masowych. Oznaczmy symbolem  $B$  wyrażenie w nawiasie kwadratowym:

$$B = \frac{v^2}{2} + P(p) - \Phi \quad (5.16)$$

To suma energii kinetycznej właściwej, energii potencjalnej właściwej i wielkości  $P(p)$ . Ta ostatnia wielkość jest też pewną postacią energii. Jeśli  $B$  jest stałą (wszędzie taką samą) to jej gradient jest zerem i wtedy

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = 0$$

Gdy ruch jest ustalony, to  $\vec{v} \times \text{rot} \vec{v} \equiv 0$  (bo  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \equiv 0$ ). Wykluczając przypadek  $\vec{v} = 0$  mamy  $\text{rot} \vec{v} = 0$  lub wszędzie prostopadłość wektorów  $\vec{v}$  i  $\text{rot} \vec{v}$ . Prostopadłość musi zachodzić tam gdzie  $\text{rot} \vec{v} \neq 0$ . Możemy stwierdzić: jeśli stała w równaniu Bernoulliego jest taka sama dla wszystkich linii prądu, to albo  $\text{rot} \vec{v} = 0$  albo wektor ten jest prostopadły do wektora prędkości. Prostopadłość zachodzi wszędzie, gdzie  $\text{rot} \vec{v} \neq 0$ . Może tak być tylko wtedy, gdy rotacja prędkości nie znika na powierzchni, a nie w obszarze trójwymiarowym (na linii dla ruchu na płaszczyźnie). Taką powierzchnią jest - na przykład - powierzchnia utworzona przez punkty materialne płynu spływające ze skrzydła samolotu albo z łopatki turbiny.

Przejdźmy teraz do równania energii (??). Zakładamy potencjalność sił masowych  $\vec{F}$  i korzystamy z definicji pochodnej substancjalnej potencjału:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{F}$$

Dostajemy wtedy:

$$\rho \vec{F} \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \cdot \text{grad} \Phi = \rho \left[ \frac{d\Phi}{dt} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \quad (5.17)$$

Energia wewnętrzna właściwa  $u$  wiąże się z entalpią

$$u = i - \frac{p}{\rho}$$

Obliczmy teraz pochodną czasową energii wewnętrznej

$$\rho \frac{d}{dt} u = \rho \frac{d}{dt} \left( i - \frac{p}{\rho} \right) = \rho \frac{di}{dt} - \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

A następnie pochodną substancjalną ciśnienia

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(p\vec{v}) - p \text{div}\vec{v}$$

Zapiszmy to samo używając zapisu skróconego:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (p v_k) - p \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

Na mocy równania ciągłości dostaniemy

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div}\vec{v}$$

Połączmy podane wyżej wyrażenia i wstawmy je do równania energii. Otrzymamy wtedy:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + i - \Phi \right) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.18)$$

Dla ruchu ustalonego  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv 0$ . Ponadto, jeśli ruch jest ustalony to z równania ruchu wynika, że gradient ciśnienia - a więc  $i$  i ciśnienie nie zależą od czasu. Zatem również  $\frac{\partial p}{\partial t} \equiv 0$ . Uwzględniając te informacje możemy zapisać:

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + i - \Phi \right) = 0 \quad (5.19)$$

Z powyższego równania wynika, że w kierunku wyznaczonym przez wektor prędkości - a więc wzdłuż linii prądu - wyrażenie w nawiasie jest stałe:

$$\frac{v^2}{2} + i - \Phi = \text{const}|_{l,\text{pradu}} \quad (5.20)$$

Wyrażenie

$$\frac{v^2}{2} + i - \Phi = e \quad (5.21)$$

jest energią jednostkowej masy. Ta wielkość - przy podanych założeniach - jest stałą wzdłuż linii prądu. Jeśli porównać  $B$  i  $e$  to stwierdzimy, że

$$P(p) = i + \text{const}|_{l,\text{pradu}} \quad (5.22)$$

(Stała wynika z odjęcia dwu innych wielkości stałych dla linii prądu.) Nieznaną stałą usuwamy różniczkując powyższe równanie

$$dP = di$$

Przypomnijmy sobie, że funkcja ciśnienia  $dP = dp/\rho$  (równanie ??) i wobec tego

$$di - \frac{dp}{\rho} = 0$$

Jednocześnie różniczka ciepła wymienianego w przemianie równowagowej ma postać:

$$dq = Tds = di - \frac{dp}{\rho}$$

Można wywnioskować, iż równoczesne spełnienie równania Bernoulliego i równania wyrażającego zachowanie energii implikuje izentropowość. Zauważmy też, że  $s = \text{const}$  implikuje  $P = i + \text{const}$ . Możemy sformułować następujące stwierdzenie: jeśli z trzech poniższych zdań

- zachodzi równanie Bernoulliego
- zachodzi zachowanie energii
- przemianą termodynamiczną jest izentropa

dwa są prawdziwe, to trzecie również jest prawdziwe.

Sytuacja, w której wartość energii  $e$  jest taka sama na zbiorze linii prądu wychodzących z pewnego obszaru jest nazywana “ruchem homoenergetycznym”. Taki ruch może implikować bezwirowość. Wystarczy by przemianą termodynamiczną była izentropa i aby entropia była identyczna na wszystkich liniach prądu. Wtedy - na mocy przeprowadzonej dyskusji - mamy  $\text{rot}\vec{v} = 0$  i, tym samym, potencjalność pola prędkości.

### 5.3 Reakcje dynamiczne

Reakcjami dynamicznymi nazywa się siły z jakimi działa płynący płyn na kontaktujące się z nim ciało sztywne. Wyznaczenie tych sił jest proste wtedy, gdy znany jest ruch płynu. Wystarczy zastosować twierdzenie o zmianie pędu układu materialnego. Układ tworzy ruchomy płyn, a działające na niego siły ( od kontaktujących się z nim ciał stałych) zmieniają pęd. Znając ruch znamy zmianę pędu, a więc i działające siły.

Przystępujemy do rachunków. Zaniedbujemy grawitację, gdyż na ogół nie zmienia ona istotnie sił. Zapiszmy równanie ciągłości pomnożone przez prędkość i równanie ruchu:

$$v_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0$$

$$\rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_\alpha = \frac{\partial T_{\alpha k}}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{\alpha k} p) + \frac{\partial T_{\alpha k}^L}{\partial x_k}$$

Napisaliśmy równanie w formie indeksowej. Sumowanie odbywa się względem  $k$ . W pierwszym równaniu divergencja  $\rho\vec{v}$  to:  $\text{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k)$ . Mnożymy je przez  $v_\alpha$ . W drugim równaniu napisanym dla składowej  $v_\alpha$  mamy sumowanie względem  $k$  po obydwu stronach znaku równości. Tensor  $T_{\alpha k}^L$  oznacza część lepka tensora naprężenia. Po dodaniu otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_\alpha v_k + \delta_{k\alpha} p) = \frac{\partial T_{\alpha k}^L}{\partial x_k} \quad (5.23)$$

To nowa postać równania. Nazywamy ją “zachowawczą”. Wielkość  $\rho v_\alpha v_k + \delta_{k\alpha} p$  nazywana jest **tensoriem strumienia pędu**. Oznacza się go - na ogół - literą  $\Pi$ :

$$\Pi_{\alpha k} = \rho v_\alpha v_k + \delta_{k\alpha} p \quad (5.24)$$

Jest to tensor symetryczny, bo  $\Pi_{\alpha k} = \Pi_{k\alpha}$ .

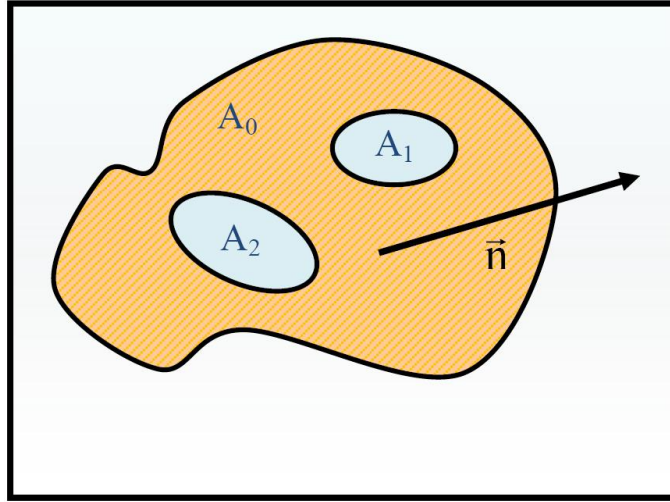
Przenieśmy teraz  $\delta_{k\alpha} p$  na prawą stronę powracając do postaci wyjściowej naszego równania:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_\alpha v_k) = \frac{\partial T_{\alpha k}}{\partial x_k} \quad (5.25)$$

Dla ruchu ustalonego pochodna czasowa znika. Pozostaje:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_\alpha v_k) = \frac{\partial T_{\alpha k}}{\partial x_k} \quad (5.26)$$

Weźmy zamkniętą powierzchnię  $A$  będącą sumą części szczelnej  $A_0$  (to brzegi ciał stałych takich jak na przykład rury) i otworów  $A_1, A_2, \dots$  przenikalnych dla płynu. Łącznie  $A_0 + A_1 + A_2 + \dots$  jest powierzchnią zamkniętą. Normalna  $\vec{n}$  jest skierowana na zewnątrz.



**Rysunek 5.1.** Powierzchnia zamknięta z otworami przenikalnymi dla płynu

Twierdzenie GGO pozwala napisać

$$\int_{wne\text{trze}} \frac{\partial}{\partial x_k}(\dots) d\Omega = \int_{A_0+A_1+A_2+\dots} n_k(\dots) dA$$

Przekształćmy w taki sposób równanie(??). Po lewej stronie równania pojawi się w całce powierzchniowej wyrażenie

$$n_k \rho v_k v_\alpha = \rho v_\alpha (n_k v_k) = \rho v_\alpha (\vec{v} \cdot \vec{n})$$

Iloczyn  $\vec{n} \cdot \vec{v}$  znika na szczelnej części powierzchni.

Po prawej stronie mamy (po użyciu GGO):

$$\int_{A_0} n_n T_{\alpha k} dA + \int_{A_1+A_2+\dots} n_k T_{\alpha k} dA = \int_{wne\text{trze}} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{\alpha k} d\Omega \quad (5.27)$$

Pierwsze wyrażenie to siła działająca na płyn na szczelnej części powierzchni. Przeciwna do niej - to reakcja. Należy jeszcze uwzględnić ciśnienie na zewnątrz powierzchni.

Zakładamy, że jest stałe. Oznaczmy je  $p_0$ . Stałe ciśnienie na zewnątrz zamkniętej powierzchni daje zerową siłę. Możemy to zapisać następująco:

$$\int_{A_0} n_\alpha p_0 dA + \int_{A_1+A_2+\dots} n_\alpha p_0 dA = 0 \quad (5.28)$$

Dodajmy do siebie równania (??)+ (??), skorzystajmy z (??) i zapiszmy wyrażenie dla składowej reakcji  $R_\alpha$

$$-R_\alpha + \int_{A_1+A_2+\dots} (n_k T_{\alpha k} + n_\alpha p_0) dA = \int_{A_1+A_2+\dots} \rho (\vec{n} \cdot \vec{v}) v_\alpha dA$$

Z reguły pomija się składnik lepki w “otworach” pozostawiając tam ciśnienie. Oznacza to, że przez “wloty” i “wyloty” płyn płynie strumieniami zbliżonymi do jednorodnych. Z tensora naprężenia zostaje nam składnik ciśnieniowy. Dostaniemy zatem  $T_{\alpha k} = T_{\alpha k}^L - p\delta_{\alpha k} \approx -p\delta_{\alpha k}$  oraz  $n_k(-p\delta_{\alpha k}) = -pn_k\delta_{\alpha k} = -n_\alpha p$ .

Pod całką z lewej strony równania dostajemy zatem wyrażenie  $-n_\alpha p + n_\alpha p_0 = -n_\alpha(p - p_0)$ . Gdy przeniesiemy przekształcony człon ciśnieniowy otrzymamy końcowy wzór na reakcję dynamiczną:

$$R_\alpha = \int_{A_1+A_2+\dots} [\rho(\vec{n} \cdot \vec{v})v_\alpha + n_\alpha(p - p_0)] dA \quad (5.29)$$

Oczywiście w sytuacji znaczącej niejednorodności strumieni płynu w “otworach”  $A_1$ ,  $A_2$  itd, trzeba uwzględnić składniki lepkie. Szczęśliwie są to sytuacje szczególne. Z reguły obszar niejednorodności strumieni jest niewielki i dotyczy sąsiedztwa brzegu strumieni.

## 5.4 Ruch cieczy przez rurę

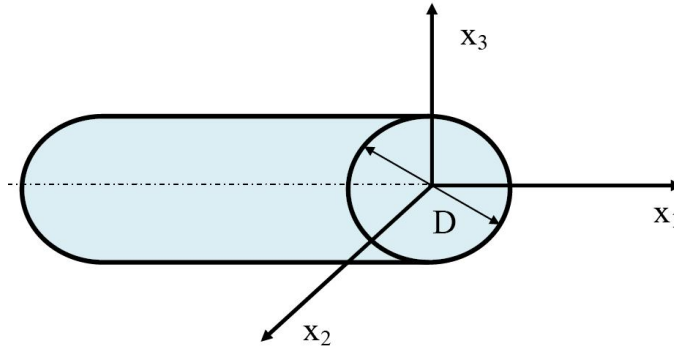
Ten ważny z technicznego punktu widzenia przypadek ruchu cieczy może być badany analitycznie.

Rozważmy przypadek skrajnie uproszczony, a mianowicie ruch przez “nieskończenie długą” rurę. Termin “rura” oznacza wnętrze walca o zadanym przekroju. Zakładamy, że walec ten jest tak długi, iż założenie nieograniczonej rozciągłości dobrze przybliży rzeczywistość. Skoro długość przewodu rury jest wielka, to pole prędkości powinno być w każdym przekroju takie samo. Nie można wyróżnić jakiegokolwiek specyficznego miejsca. Kierujemy oś  $x_3 = z$  wzdłuż rury (osie  $x_1 = x$  i  $x_2 = y$ ) ustawiamy w przekroju rury.

Skoro pole prędkości jest takie samo w każdym przekroju - to nie zależy od zmiennej  $z$ . Ponadto dla długiej rury można założyć, że nie występują składowe poprzeczne prędkości. Pozostaje zatem  $v_3 = v$ , a  $v_1 = v_2 = 0$ . Również pochodna  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . Napiszmy równanie Naviera - Stokesa w kierunku osi  $z$  uwzględniając powyższe fakty. Lewa strona równania równa jest zero, pozostaje zatem

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Nie napisaliśmy członu  $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ , bo  $v$  nie zależy od  $z$ . Równanie ciągłości jest oczywiście spełnione. Sprawdzamy to licząc divergencję pola prędkości  $\vec{v}$ .



**Rysunek 5.2.** Ruch płynu przez nieskończenie długą rurę

Przenieśmy człon ciśnieniowy naszego równania na lewą stronę i zapiszmy je w następującej formie

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.30)$$

Pozostałe dwa równania (w kierunku  $x$  i  $y$ ) - wobec faktu, że  $v_1 = 0$  i  $v_2 = 0$  upraszczają się do postaci:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Z równań tych wynika, że ciśnienie nie zależy od  $x$  i  $y$ . Może zależeć tylko od  $z$ . Przeanalizujmy równanie (??). Lewa strona tego równania jest funkcją tylko zmiennej  $z$ , prawa strona zależy natomiast od  $x$  i  $y$ . Zauważmy, że gdy zmieniamy tylko  $z$  to nie zmienia się prawa strona, lub gdy zmieniamy na przykład  $x$  nie zmienia się lewa strona. Możemy zatem zamiast pochodnej cząstkowej po  $z$  napisać :

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \quad (= \text{const})$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = -\gamma \quad (= \text{const})$$

Po scałkowaniu pierwszego z równań dostajemy

$$p = p_0 - \gamma z \quad (5.31)$$

co oznacza, że ciśnienie spada liniowo wzdłuż przewodu w kierunku osi  $z$ . Drugie równanie dzielimy przez  $\mu$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = -\frac{\gamma}{\mu} \quad (5.32)$$

Dla punktów na brzegu - na ścianie rury - ciecz lepka ma zerową prędkość.

$$v|_{\text{brzeg}} = 0 \quad (5.33)$$

Zauważmy, że należy rozwiązać równanie typu

$$\Delta v = \text{wielkosc znana}$$

Równanie to nazywane jest równaniem Poissona z warunkiem brzegowym typu Dirichleta

$$v|_{\text{brzeg}} = \text{zadana} = 0$$

Problem taki dla dowolnego kształtu obszaru (przekroju rury) rozwiązuje się numerycznie. Dla pewnych prostych kształtów - łatwo znaleźć rozwiązanie analityczne. Najprościej rozwiązać problem dla przekroju kołowego.

Zapiszmy laplasjan we współrzędnych biegunowych. Oto wynik:

$$\Delta v = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v(r, \theta)$$

W przypadku, gdy brzeg jest symetryczny można spodziewać się symetrii środkowej pola prędkości. Symetria taka oznacza niezależność pola od kąta  $\theta$ . Zatem człon laplasjanu pola prędkości, gdzie występuje druga pochodna po kącie  $\theta$  znika. Uwzględniając ten fakt zapiszmy równanie (??) we współrzędnych biegunowych.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma}{\mu}$$

Całkowanie jest elementarne. Mnożymy powyższe równanie stronami przez  $r$  i całkujemy, a następnie dzielimy przez  $r$ . Dostajemy wyrażenie na pochodną  $dv/dr$ :

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{r}{2} + \frac{\text{const}}{r}.$$

Aby wyeliminować wyniki нефизичные (dla  $r \rightarrow 0$  pojawiłby się "szpic" na wykresie funkcji  $v(r)$  - bo pochodna wielka), przyjmujemy  $\text{const} = 0$  i pochodna  $dv/dr$  ma rozsądny przebieg.

Całkujemy ponownie i w wyniku dostajemy:

$$v = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{r^2}{4} + B$$

$B$  jest stałą. Obliczamy ją wiedząc, że dla  $r = R$   $v = 0$ . Ostateczny wzór na prędkość przyjmuje następującą postać:

$$v = \frac{\gamma}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (5.34)$$

Ze wzoru wynika, że pole prędkości ma kształt paraboloidy

Obliczmy teraz wydatek

$$Q = \int_{\text{przekroj}} v dA$$

Całkowanie wykonamy we współrzędnych biegunowych.

Element pola  $dA$  to  $r d\theta dr$ :

$$dA = r dr d\theta$$



zatem

$$Q = \int_0^{2\Pi} \int_0^R \frac{\gamma}{4\mu} (R^2 - r^2) r dr d\theta$$

Całkowanie względem kąta daje czynnik  $2\Pi$ . Dostajemy więc

$$Q = 2\Pi \frac{\gamma}{4\mu} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

W wyniku otrzymujemy

$$Q = \frac{\Pi\gamma}{8\mu} R^4 = \frac{\Pi\gamma D^4}{128\mu}$$

$D$  jest oczywiście średnicą. Zapiszemy ten wynik inaczej, uwzględniając fakt, że  $\gamma$  wiąże się ze spadkiem ciśnienia:

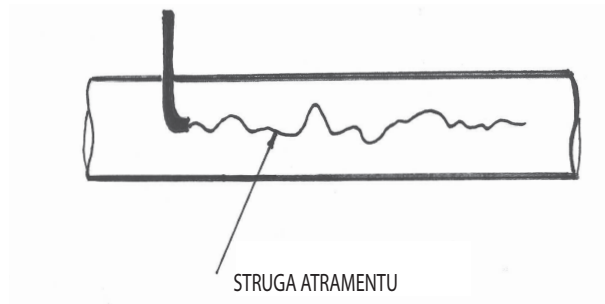
$$Q = \frac{\Pi}{128\mu} \left| \frac{\Delta p}{\Delta z} \right| D^4 \quad (5.35)$$

To wyrażenie nosi nazwę wzoru Hagen - Poiseuille'a. Doświadczenie potwierdza go dla ruchów powolnych. Przy ruchu szybkim wydatek jest mniejszy, niż ten wynikający ze wzoru.

## 5.5 Doświadczenie Reynoldsa

Około 130 lat temu Osborne Reynolds przeprowadził proste doświadczenie. Do przezroczystej rury, w której płynęła ciecz dolał atramentu i obserwował co się będzie działo.

Okazało się, że dla powolnych przepływów (małych wydatków) struga układała się jak na szkicu (ma kształt linii prostej równoległej do rury). Przy większej prędkości (wzroście



**Rysunek 5.3.** Struga dla małych prędkości

wydatku) struga jest pofalowana. Wynika to z faktu, że pojawiają się w tym przypadku składowe poprzeczne pola prędkości. Zależą one, tak jak i składowa wzdłużna od zmiennej  $z$  (prowadzonej wzdłuż rury).

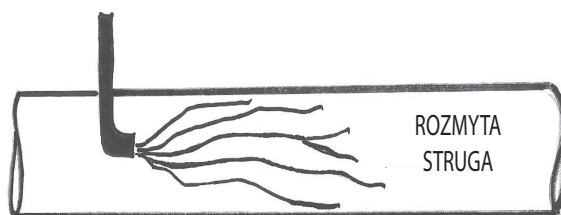
Wyprowadzając wzór Hagen - Poiseuille'a zakładaliśmy, że pole prędkości :

1. jest ustalone
2. znikają jego składowe poprzeczne

3. nie zależy od zmiennej  $z$
4. ma osiowa symetrię

W przypadku, gdy przepływ jest szybki (ma dużą prędkość) te założenia nie są zrealizowane. Są one spełnione dla ruchów dostatecznie powolnych.

Jeżeli zwiększona zostaje prędkość (choćby przez odkręcenie zaworu) to, dla dostatecznie dużej prędkości średniej obraz ruchu jest taki jak na poniższym rysunku Struga



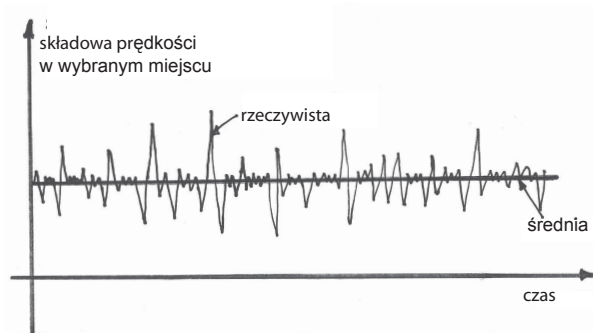
**Rysunek 5.4.** Struga atramentu dla dużych prędkości

atramentu zostaje gwałtownie “rozmyta” i wymieszana z płynącą rurą cieczą.

Reynolds znalazł mechanizm cząsteczkowy dyfuzji gazu w gazie. Przypomnijmy to zjawisko. Znajdujące się w nieustannym ruchu cieplnym cząsteczki gazu nośnego zderzają się z cząsteczkami gazu dyfundującego. Cząsteczki takiego gazu (mowa o gazie dyfundującym) wykonują ruchy chaotyczne (na kształt ruchów Browna). W wyniku takich ruchów dyfundant rozprasza się, a prędkość cząsteczek dyfundanta zmienia się losowo.

Reynolds zauważył, że przyjmując hipotezę o chaotycznej zmienności pola prędkości otrzymamy nieregularne, przypominające rozproszenie dyfuzyjne, “rozmycie” strugi. To rozmycie zachodzi gwałtownie. Tak, jak gdyby ruchy dyfuzyjne były wielce intensywne.

Postulat Reynoldsa był następujący: przebieg czasowy dowolnej składowej prędkości jest chaotycznie zmienny. Zmiany zachodzą wokół średniej stałej, lub łagodnie zmiennej w czasie. Możemy napisać:



**Rysunek 5.5.** Wykres zmiany składowej prędkości w czasie

$$v = \langle v \rangle + v'$$

$\langle v \rangle$  oznacza **średnią czasową**, a  $v'$  niedużą wielkość losową (przypadkową) nazywaną **pulsacją**. Średnia pulsacji jest zerowa

$$\langle v' \rangle = 0$$

Powtarzając doświadczenie otrzymamy inną niewielką losową pulsację. Średnia nie ulegnie zmianie.

Jakie są konsekwencje występowania pulsacji?

Następuje intensywne wymiana masy, pędu i energii pomiędzy sąsiednimi warstwami płynu. Ta wymiana (gdy jest ruch - to przy wymianie masy następuje wymiana pędu i wymiana energii) zachodzi przez przenoszenie skończonych porcji płynu. Gdy pulsacje nie występują (ruch jest powolny) występuje również wymiana masy, pędu i energii między warstwami, lecz tylko na drodze wymiany molekuł płynu. Gdy ruch jest szybki i pojawiają się pulsacje wymiana rośnie wielokrotnie, gdyż do zjawisk molekularnych dołącza się efekt chaosu kinematycznego.

Reynolds nazwał ruch, w którym występują pulsacje, ruchem **turbulentnym**. Powtórzmy: **jest to ruch, w którym pomiędzy sąsiednimi warstwami zachodzi wymiana masy, pędu i energii na drodze wymiany elementów płynu (porcji)**.

**W ruchu bez pulsacji wymiana masy, pędu i energii zachodzi na drodze molekularnej**. Taki ruch Reynolds nazwał **laminarnym**. Po pojawieniu się czułych przyrządów pomiary prędkości potwierdziły hipotezę Reynoldsa.

## 5.6 Bezwymiarowe równania Naviera - Stokesa i podobieństwo dynamiczne

Każda wielkość fizyczna ma, oprócz wartości liczbowej swój wymiar. Wymiar określa, czym dana wielkość jest. Współrzędna położenia punktu w przestrzeni oprócz wielkości liczbowej ma wymiar "metrów", "centymetrów", lub też "cali". Użycie różnych jednostek podstawowych zmienia wartość liczbową tej samej wielkości. Oczywiście prawa fizyki nie zależą od używanego systemu jednostek podstawowych albo systemu miar. Równania wyrażające prawa powinny dać się zapisać w sposób uniwersalny, nie zależący od tego, jakie jednostki podstawowe są używane. Taka postać równań, która nie zależy od używanych jednostek nazywa się postacią bezwymiarową. Określenie wielkości bezwymiarowej nie wymaga podania wymiaru. Wystarczy wielkość liczbową. Sądźmy więc, że użycie takich wielkości uprości rozważania. Będzie też uniwersalizacją zapisu, bo to co zapiszemy obowiązuje w każdym systemie miar.

Wprowadzimy skale wymiarowe. Będą to skale długości, czasu, prędkości i ciśnienia. Zapiszemy następnie wielkości fizyczne jako kombinację skal i wielkości bezwymiarowych. Weźmy skalę długości, oznaczmy ją symbolem  $L$  i zapiszmy wektor długości  $\vec{r}$

$$\vec{r} = L \cdot \vec{r}'$$

( $\vec{r}'$  jest wektorem bezwymiarowym).

Podobnie zapiszemy czas

$$t = T \cdot t'$$

(gdzie  $t'$  to czas bezwymiarowy, a  $T$  - skala czasu)  
i prędkość

$$\vec{v} = U \cdot \vec{v}'$$

( $U$  to skala prędkości  $\vec{v}'$  - prędkość bezwymiarowa).

Czytelnik może postulować, by  $U = L/T$ . Tak może być - ale nie musi. Używamy przecież metrów, sekund a prędkość lubimy mierzyć kilometrami na godzinę!

Wprowadzimy jeszcze skalę ciśnienia  $p_0$  i ciśnienie bezwymiarowe  $p'$ , oraz skalę sił masowych. Ta ostatnia to  $g$  - przyspieszenie ziemskie. Siła  $\vec{F}$  jest jednostkową siłą masową (działa na 1 kg). Jej wymiar wynika z podzielenia jednostki - newtona -N przez kg. W wyniku dostajemy  $m/s^2$  i jest to wymiar  $g$ .

$$\vec{F} = g \cdot \vec{F}'$$

( $\vec{F}$  to bezwymiarowa siła masowa).

Napiszmy teraz równanie Naviera- Stokesa podstawiając wielkości wyrażone przez skale i zmienne bezwymiarowe. (Zakładamy w tym przypadku  $\rho = const.$ . Rachunki są prostsze, a wynik taki, jak gdyby  $\rho \neq const.$  W przypadku zmienności masy właściwej trzeba wprowadzić jej skalę.)

$$\frac{\partial (U v_k')}{\partial (T t')} + U v_\alpha' \frac{\partial}{\partial (L x'_\alpha)} (U v_k') = g F_k' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial (L x'_\alpha)} (p_0 p') + \nu \left[ \frac{\partial^2 (U v_k')}{\partial (L x'_1)^2} + \dots \right]$$

Dalsze człony laplasjanu zostały wykropkowane, oczywiście należałoby zapisać je w sposób analogiczny do członu pierwszego.

Skale są stałymi, więc wyprowadzamy je przed znaki różniczkowania. Można również podzielić równanie przez dowolną kombinację skal. Podzielmy przez  $U \cdot U/L = U^2/L$  czyli czynnik stojący przy drugim wyrazie po lewej stronie. Dostajemy w wyniku:

$$\left( \frac{L}{U T} \right) \frac{\partial v_k'}{\partial t'} + v_\alpha' \frac{\partial}{\partial x_\alpha'} v_k' = \frac{gL}{U^2} F_k' - \frac{p_0}{\rho U^2} \frac{\partial p'}{\partial x_k'} + \frac{\nu}{U L} \left[ \frac{\partial^2 v_k'}{\partial (x_1')^2} + \frac{\partial^2 v_k'}{\partial (x_2')^2} + \frac{\partial^2 v_k'}{\partial (x_3')^2} \right]$$

Pojawiły się bezwymiarowe kombinacje skal. Oto one i ich nazwy

$$\frac{L}{U T} = \frac{1}{St} \quad St - \text{liczba Strouhala}$$

$$\frac{gL}{U^2} = \frac{1}{Fr} \quad Fr - \text{liczba Froude'a}$$

$$\frac{p_0}{\rho U^2} = \frac{1}{Eu} \quad Eu - \text{liczba Eulera}$$

$$\frac{\nu}{U L} = \frac{1}{Re} \quad Re - \text{liczba Reynoldsa}$$

Napiszmy równanie ruchu używając powyżej zdefiniowanych liczb bezwymiarowych:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial v_k'}{\partial t'} + v_\alpha' \frac{\partial}{\partial x_\alpha'} v_k' = \frac{1}{Fr} F_k' - \frac{1}{Eu} \frac{\partial p'}{\partial x_k'} + \frac{1}{Re} \Delta' v_k' \quad (5.36)$$

Wszystkie niewiadome i zmienne niezależne są bezwymiarowe, a liczby  $St$ ,  $Fr$ ,  $Eu$  i  $Re$  noszą nazwę liczb podobieństwa albo parametrów kryterialnych.

Przypuśćmy teraz, że w obszarach podobnych geometrycznie wprowadzono skalę, właściwą dla poszczególnych obszarów. Jeśli okaże się, że liczby podobieństwa będą (w każdym z przypadków) takie same, to równania dla bezwymiarowych funkcji również się nie różnią. Rozwiązania równań będą identyczne (w swych bezwymiarowych dziedzinach) gdy dodatkowo takie same będą bezwymiarowe warunki brzegowe i bezwymiarowe warunki początkowe.

Jeśli bezwymiarowe funkcje opisujące kompletnie zjawiska są równe to mówimy o zjawiskach podobnych albo o podobieństwie zjawisk.

W naszym przypadku mamy podobieństwo przepływów nazywane czasem podobieństwem dynamicznym przepływów.

Sformułujmy podstawowe warunki jakie muszą wystąpić by to zjawisko miało miejsce:

- obszary ruchu są podobne geometrycznie
- liczby podobieństwa są takie same
- bezwymiarowe warunki brzegowe i bezwymiarowe warunki początkowe są identyczne

Jeśli znamy bezwymiarowe pola prędkości, ciśnienia ... itp, to można je uznać za opis klasy zjawisk podobnych.

Jeśli mamy bezwymiarowe pole ciśnienia i pole prędkości (też bezwymiarowe) dla przepływu cieczy przez rurę okrągłą, to pole to można zastosować do wszystkich rur podobnych geometrycznie przy identycznych liczbach podobieństwa.

Rura o skończonej długości jest podobna do innej rury gdy przekroje są podobne i długości, mierzone wymiarem właściwym dla przekroju, są takie same.

Dla rur okrągłych mamy podobieństwo geometryczne gdy  $L_1/D_1 = L_2/D_2 = \dots = D_i/L_i$ .

Jeśli ruch jest ustalony (liczba Strouhala nie występuje) i odrzucimy siły zewnętrzne, to pozostają liczby Reynoldsa i Eulera. Możemy wybrać skalę ciśnienia tak, by liczba Eulera była zawsze taka sama.

Niech  $p_0 = \rho U^2$  wtedy  $Eu_1 = Eu_2 = 1$ . Pozostaje liczba Reynoldsa. To jedyna liczba podobieństwa charakteryzująca ruch przez długą rurę.

$$Re = U \cdot D/\nu$$

Bierzemy za skalę długości średnicę  $D$  rury.  $U$  jest prędkością średnią. Dla małych  $Re$  ( $\leq 2300$ ) ruch jest laminarny. Z kolei dla  $Re \geq 10^4$  występuje tylko ruch turbulentny.

Są dwie krytyczne liczby Reynoldsa. Dla  $Re < Re_{krytI}$  występuje w przepływie tylko ruch laminarny, dla  $Re > Re_{krytII}$  tylko turbulentny. W przedziale pośrednim mogą istnieć albo ruch laminarny albo turbulentny. Podane powyżej wartości liczb krytycznych dotyczą ruchu w rurze okrągłej. Dla innych kształtów wartości tych liczb są oczywiście inne.

Przy innych rodzajach przepływu **ruch laminarny występuje zawsze przy małych liczbach Reynoldsa, a dla dużych liczb Reynoldsa ruch jest turbulentny.**

Zastanówmy się teraz nad interpretacją fizyczną liczb podobieństwa.

Określmy w tym celu skalę "siły bezwładności" wynikającej z przyspieszenia konwekcyjnego. (Siła bezwładności jest pseudosiłą - dlatego cudzysłów, gdyż wynika z nieinercjalności układu, a nie z bezpośredniego oddziaływania między ciałami fizycznymi.) Jest

to ułamek  $U^2/L$  o wymiarze  $m/s^2$ . Zapiszmy teraz kolejne liczby podobieństwa używając tej skali:

Liczba Strouhala

$$St = \frac{U^2/L}{U/T} = (\text{skala sił bezwładności})/(\text{skala sił przyspieszenia lokalnego})$$

Liczba Froude'a

$$Fr = \frac{U^2/L}{g} = (\text{skala sił bezwładności})/(\text{skala sił masowych})$$

Liczba Eulera

$$Eu = \frac{U^2/L}{p_0/(\rho L)} = (\text{skala sił bezwładności})/(\text{skala sił ciśnieniowych})$$

Liczba Reynoldsa

$$Re = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = (\text{skala sił bezwładności})/(\text{skala sił lepkościowych})$$

Zastanówmy się co oznacza określenie - mała liczba Reynoldsa?

W takim ruchu siły wynikające z lepkości mają duże wartości, pojawia się więc "duży opór" i zarazem "mocne tłumienie" wszelkich zaburzeń powstałych w płynie.

## 5.7 Ruch turbulentny w rurze

Przepiszmy wzór Hagena - Poiseuille'a (??)

$$Q = \frac{\Pi}{128 \mu} \left| \frac{\Delta p}{\Delta l} \right| D^4$$

i wyznaczmy spadek ciśnienia  $\Delta p$  potrzebny do uzyskania ruchu o wydatku  $Q$ :

$$\Delta p = \frac{4 \cdot 32}{\mu} \left( \frac{\Delta l}{D} \right) \frac{Q}{\Pi D^2} \frac{1}{D}$$

Prędkość średnią wyrażmy w sposób następujący:

$$U = \frac{4Q}{\Pi D^2},$$

a liczbę Reynoldsa zapiszmy, używając lepkości dynamicznej  $\mu$  (związek między lepkością kinematyczną i dynamiczną :  $\nu = \mu/\rho$ )

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

Wyznaczmy z powyższego wzoru lepkość  $\mu$

$$\mu = \frac{\rho U D}{Re}$$

i wstawmy ją do wyrażenia na spadek ciśnienia. W rezultacie otrzymamy

$$\Delta p = \frac{32}{Re} \rho U^2 \frac{\Delta l}{D}.$$

Można zapisać to nieco inaczej

$$\Delta p = \lambda(Re) \cdot \left( \frac{\rho U^2}{2} \right) \cdot \frac{\Delta l}{D} \quad (5.37)$$

Czynnik  $\frac{\rho U^2}{2}$  (jednomian ten występuje w równaniu Bernoulliego i energii) ma wymiar ciśnienia, a pozostałe wielkości, tj  $\lambda$  i  $\frac{\Delta l}{D}$  są bezwymiarowe. Łatwo też zauważyć, że  $\lambda = 64/Re$ . Wzór (??) określa spadek ciśnienia wzdłuż rury. Jest zgodny z doświadczeniem dla ruchu laminarnego ta znaczy dla małych liczb Reynoldsa.

Gdy ruch jest turbulentny - to założenia prowadzące do wzoru Hagena - Poiseuille'a nie są realizowane. W wyniku

1. braku osiowej symetrii
2. zależności prędkości od zmiennej wzdłużnej
3. istnienia poprzecznych składowych prędkości
4. zmienności  $\vec{v}$  w czasie

spadek ciśnienia jest inny niż ten określony wzorem (??).

Aby wyznaczyć  $\Delta p$  należało by rozwiązać równanie Naviera - Stokes'a dla ruchu turbulentnego, wykluczając uczynione założenia. Niestety nie potrafimy tego zrobić. Zatem aby poradzić sobie z tym zadaniem musimy skorzystać z doświadczenia.

Pewien uczony z Getyngi - **Nikuradse** dokonał precyzyjnych pomiarów spadków ciśnienia wzdłuż rur. Badał rury gładkie i chropowate.

Z teorii bezwymiarowego równania Naviera -Stokesa, biorąc za skalę ciśnienia wielkość  $\rho U^2$  dostajemy

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = \frac{1}{Re} \Delta' v'_z$$

Oznacza to, iż spadek ciśnienia będzie zależał od liczby Reynoldsa i chropowatości, czyli geometrii przewodu (chropowatość to kształt!). Zatem

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho U^2} = const - f(Re, s)$$

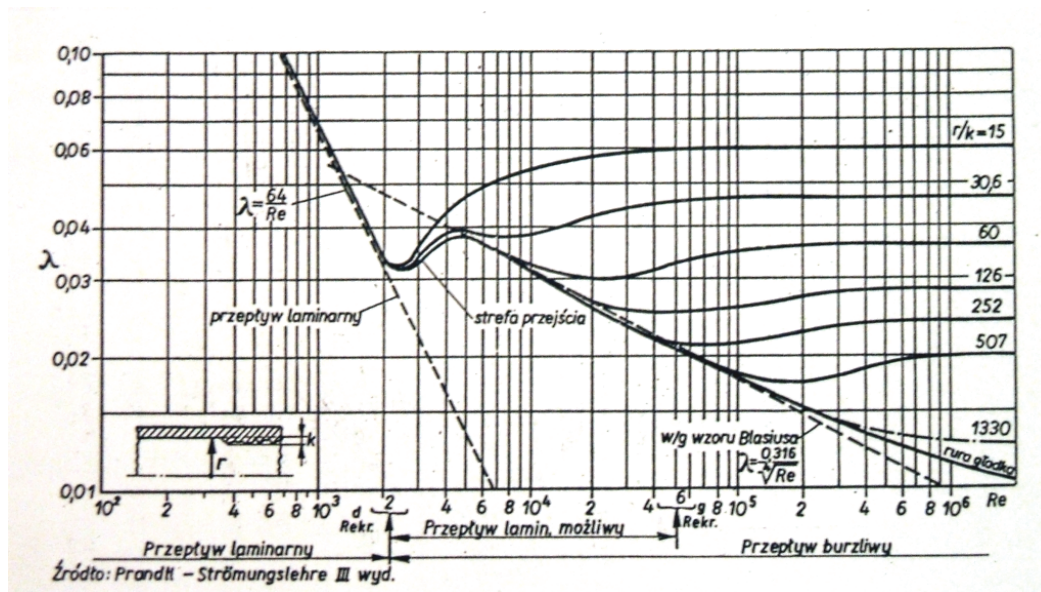
Niech  $z' = z/D$ ,  $\Delta z/D = \Delta l/D$  a  $\lambda = 2f$ .

Otrzymamy wtedy

$$|\Delta p| = \lambda(Re, s) \frac{\rho U^2}{2} \frac{\Delta l}{D}$$

Wyniki otrzymane przez Nikuradsego przedstawia wykres równoległej do rury ). Skala logarytmiczna pozwala zmieścić duży zakres zmienności zmiennych. Można też przekształcić do wygodnej postaci wzory typu

$$\lambda = const \cdot Re^m$$



Rysunek 5.6. Wykres Nikuradsego

bo po zlogarytmowaniu mamy

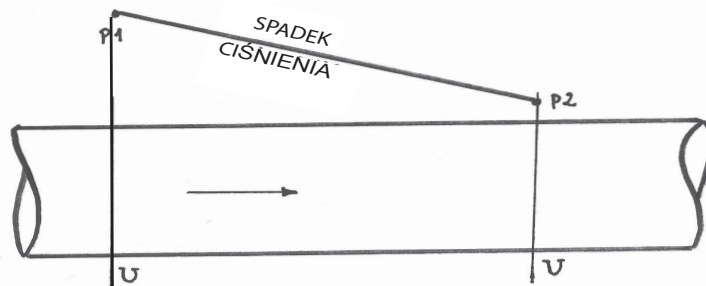
$$y = \ln \lambda = \ln(\text{const}) + m(\ln Re) = aX$$

przy oznaczeniu osi symbolami X i Y. Jeśli znamy wydatek to łatwo możemy obliczyć prędkość średnią i liczbę Reynoldsa. Wyznaczamy następnie współczynniki  $\lambda$  (nazywane **współczynnikami strat na długości przewodu**) i obliczamy spadki ciśnienia w poszczególnych odcinkach rury.

Przyjrzyjmy się równaniu energii

$$\frac{\rho U^2}{2} + p_1 = \frac{\rho U^2}{2} + p_2 + \Delta p$$

i zinterpretujmy czym jest spadek ciśnienia. Zmierzone ciśnienie  $p_2$  jest mniejsze niż  $p_1$ .



Rysunek 5.7. Spadek ciśnienia wzdłuż rury

Spadek wynosi  $\Delta p$ . Lewa strona (w równaniu energii) to energia mechaniczna jednostki masy w przekroju 1. W przekroju 2 energia mechaniczna jednostki masy jest mniejsza.



Ubytek wynosi właśnie  $\Delta p$ . Wyraziliśmy zatem ubytek energii mechanicznej spadkiem ciśnienia. Wynika on z istnienia tarcia lepkiego (wywołanego lepkością). Energia mechaniczna została nieodwracalnie przekształcona na ciepło. Nie można dokonać przemiany odwrotnej. Powstałe ciepło w części zostało rozproszone, a w części podgrzało płynącą ciecz. Energia mechaniczna jest dyssypowana wzdłuż rury. Umiemy ją wyrazić - po prostu przez spadek ciśnienia co odpowiada równaniu (??). Powtórzmy je dla przypomnienia

$$\Delta p = \lambda \cdot \left( \frac{\rho U^2}{2} \right) \cdot \frac{\Delta l}{D} \quad (5.38)$$

Jeśli w rozważanej rurze istnieje istotna zmiana kształtu typu rozszerzenie, zwężenie, zawór, filtr czy też tak zwane "kolanko" (zakręt), to można się spodziewać w tym miejscu dodatkowego spadku ciśnienia. Ten spadek ciśnienia można określić doświadczalnie. Ponieważ wyrażenie  $\rho U^2/2$  ma wymiar ciśnienia, to

$$\Delta p = \zeta \frac{\rho U^2}{2}$$

$\zeta$  jest eksperymentalnie wyznaczonym współczynnikiem straty lokalnej. Całkowita zdysypowana energia mechaniczna to suma

$$\Delta e_{dys} = \sum \left( \lambda \cdot \frac{\rho U^2}{2} \cdot \frac{\Delta l}{D} \right)_i + \sum \left( \zeta \frac{\rho U^2}{2} \right)_j \quad (5.39)$$

Możemy teraz napisać proste równanie wyrażające zsumowanie rozmaitych energii. Otaczamy rurę powierzchnią bilansową i zapisujemy

$$e_1 + \Delta e_p = e_2 + \Delta e_{dys} \quad (5.40)$$

Po prawej stronie mamy energię jednostki objętości cieczy (o masie  $= \rho$ ) i energię dostarczoną przez (ewentualnie działającą) pompę. Po prawej stronie równania jest energia  $e_2$  i energia zdysypowana wewnątrz powierzchni bilansowej, określona przez wzór (??).

Rozpatrujemy dwa typy zagadnień związanych z przepływem w rurze. Zakładamy, że znana jest geometria rury, własności płynu itp. Pierwsze z zagadnień - proste - polega na wyznaczeniu przyczyn ruchu wtedy, gdy znany jest wydatek. Przez przyczyny ruchu rozumiemy różnicę poziomów, lub różnicę ciśnień albo przyrost ciśnienia w pompie. Jeśli znamy wydatek  $Q$  płynący rurą, to możemy obliczyć prędkości. Znamy więc też prędkości i odczytane współczynniki  $\lambda$ . Możemy zatem policzyć  $\Delta e_{dys}$ .

#### UWAGA

Jeśli w miejscu występowania straty lokalnej występują dwie różne prędkości (rura rozszerza się) to we wzorze  $\Delta p = \zeta \rho U^2/2$  występuje WIEKSZA z dwu różnych prędkości. Po wyznaczeniu  $\Delta e_{dys}$  można łatwo określić niewiadomą, bo wszystkie wyrażenia w (??) są znane.

Jeśli nieznaną jest wydatek to nie znamy a priori prędkości, liczb Reynoldsa oraz współczynników  $\lambda$ .

Problem jednak daje się rozwiązać. Każdą z prędkości można wyrazić przez wydatek

$$U_i = \frac{4Q}{\pi D_i^2} = \alpha Q$$

a następnie obliczyć  $Re_i$

$$Re_i = \frac{4Q}{\pi D_i \nu} = \beta_i Q$$

Współczynniki liczbowe  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  są znane. Niestety, nie można w łatwy sposób wyrazić współczynników  $\lambda$  przy pomocy wydatku. Wiadomo jednak, że przy znacznej zmianie  $Re$  a więc i znacznej zmianie  $Q$ ,  $\lambda$  nie zmienia się znacząco. Postępujemy tak: zakładamy wydatek  $Q$ , obliczamy  $U_i$ ,  $Re_i$  i odczytujemy  $\lambda$ . Znamy pierwsze przybliżenie  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Mamy równanie typu

$$\left( \frac{\rho U^2}{2} + p + \rho g H \right)_1 + \Delta p_p = \left( \frac{\rho U^2}{2} + p + \rho g H \right)_2 + \sum \lambda_i \frac{\rho U_i^2}{2} \frac{\Delta L_i}{D_i} + \sum \zeta_j \frac{\rho U_j^2}{2}$$

$\lambda_i$  określone jest w sposób przybliżony.

Powyższe równanie przepisujemy w nieco innej formie:

$$Q = f(stale, \lambda_1(Q), \lambda_2(Q), stale)$$

oczywiście  $\lambda$  zależą od  $Q$ .

Stosujemy iteracje

$$Q_{n+1} = f(stale, Q_n, stale)$$

Ponieważ  $\lambda(Q)$  zmienia się niewiele, to  $f(\dots Q \dots)$  też zmienia się nieznacznie. Przypomnijmy, że równanie typu  $x = f(x)$  można rozwiązać iteracyjnie gdy  $|f'| < 1$ . W naszym przypadku tak właśnie jest (funkcja  $f(Q)$  ma znikomą pochodną ze względu na własności  $\lambda = \lambda(Re)$  i  $Re = Re(Q)$ )

Zauważmy, że wydatek  $Q$  i używane prędkości  $U_i$  są wielkościami integralnymi (wydatek  $Q$  dotyczy całego przekroju rury) albo średnimi (wtedy  $U_i = Q/(i - ty \text{ przekroj})$ ). Zastanówmy się zatem jak wygląda rozkład prędkości w warunkach rzeczywistych. Otóż wiadomo, że dla małych liczb  $Re$  - gdy ruch jest laminarny - rozkład prędkości jest paraboloidalny.

Dla ruchu turbulentnego średnia czasowa z prędkości ma inny rozkład niż średnia w ruchu laminarnym. Przypominamy:  $Re = \frac{UD}{\nu}$ . Wielka wartość liczby Reynoldsa (dla zadanej średnicy) wynika z niewielkiej wartości  $\nu$ . Odrzucamy bowiem absurdalny przypadek nieograniczonego  $U$ . Jak widać dla wielkich liczb Reynoldsa lepkość jest znikoma. Rozkład prędkości w rurze powinien być zbliżony do takiego jaki jest dla płynu nielepkiego. A w takim płynie prędkość jest wszędzie stała. Nie ma przyklepiania płynu do nieruchomej rury.

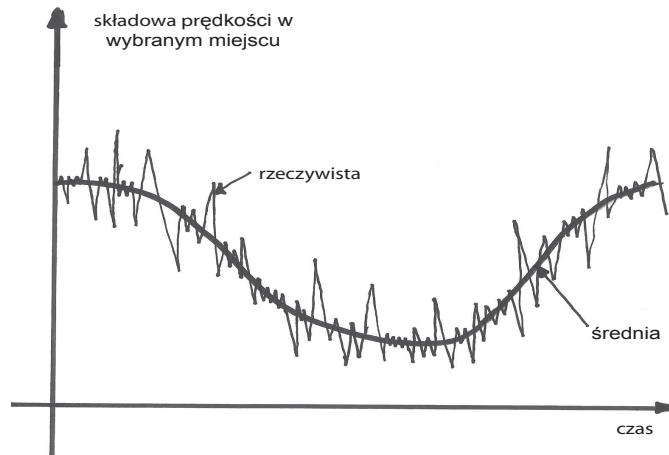
Dla wielkich liczb Reynoldsa płyn ma znikomą małą lepkość. Płyn jednak przyklepia się do rury. Rozkład prędkości jest więc prawie prostokątny z zerem na brzegu i ostrym wzrostem do stałej wartości w bardzo cienkim polu przybrzeżnym.

Dla mniejszych, choć "turbulentnych" wartości  $Re$  rozkład prędkości ma profil pośredni - między profilem dla wielkich liczb  $Re$  a występującym dla ruchu laminarnego. Im niższa liczba Reynoldsa tym bardziej "parabolizuje" się profil prędkości.

## 5.8 O turbulencji

Przypomnijmy czasowy przebieg prędkości w punkcie dla ruchu turbulentnego. Wyróżniliśmy tam prędkość średnią, prędkość rzeczywistą i pulsację. Powtórzmy szkic dla zmiennej

w czasie średniej. Mamy łagodnie zmienną w czasie średnią  $\langle v \rangle$  i szybkozmienną w cza-



**Rysunek 5.8.** Przebieg składowej prędkości w punkcie

się niewielką pulsacją  $v'$ . Prędkość rzeczywistą zapisujemy jako sumę prędkości średniej i pulsacji

$$v = \langle v \rangle + v'$$

Zachodzi też rzecz następująca

$$\langle v \rangle = \langle \langle v \rangle + v' \rangle = \langle \langle v \rangle \rangle + \langle v' \rangle$$

bo operacja uśredniania jest liniowa. Średnia ze średniej będzie średnią. Zatem jeśli  $\langle \langle v \rangle \rangle = \langle v \rangle$  to  $\langle v' \rangle \equiv 0$ . Pulsacja ma więc zerową średnią. Ponadto znika ona w otoczeniu brzegu ciała sztywnego. Na brzegu takiego ciała  $v = 0$  i wobec tego i  $v' = 0$ . A w otoczeniu brzegu pulsacja musi maleć do zera, tak jak prędkość. Otwarta jest wielkość tego otoczenia: maleje ono przy wzroście liczby Reynoldsa.

W jaki sposób określa się wartość średnią? Uśrednienie przede wszystkim musi wyeliminować pulsację, a nie może skasować, lub zniekształcić zmienności średniej. Czas uśredniania musi być duży w stosunku do czasu charakterystycznego dla zmian pulsacji i mały w porównaniu z czasem charakteryzującym zmiany średniej. Czy taki czas istnieje? To dość poważny problem, bo tak naprawdę jak określić jaką część prędkości (lub innej wielkości) jest pulsacją, a jaka średnią. Tu - na pomoc - przychodzi nauka o procesach przypadkowych. Przebieg wielkości (np. składowej prędkości) w czasie jest w ruchu turbulentnym przypadkowy. Oznacza to, iż jeśli wykonamy ponownie doświadczenie, to otrzymamy inny przebieg, niż był w poprzednim przypadku. Oczywiście może być bardzo wiele realizacji (przypadków). Liczy się zatem średnią z nich aby otrzymać ogólny obraz zmian danej wielkości. Oznaczmy średnią prędkości symbolem  $\{v\}$ . Postawmy też pytanie - czy średnia względem realizacji  $\{v\}$  i średnia po czasie  $\langle v \rangle$  są sobie równe? Taka sytuacja pojawia się gdy zachodzi **ergodyczność**. To po prostu równość średniej czasowej z jednego przebiegu i średniej ze zbioru przebiegów. Nie ma dowodu o ergodyczności turbulencji. Ale istnieją przesłanki doświadczalne świadczące, iż tak jest. Założenie ergodyczności znacznie upraszcza operacje różniczkowania

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \{v\}$$

Tak oczywiście jest, bo suma pochodnych równa jest pochodnej sumy. To samo zachodzi dla pochodnych względem czasu. Możemy teraz pomyśleć o wyznaczeniu równań opisujących średnie. Nie są ważne wielkości rzeczywiste, bo przy nowym przypadku wartości te będą inne, a średnie są zawsze takie same. Jeśli chcemy oszacować odchyłkę konkretnej realizacji od średniej, to musimy spodziewać się, że mała odchyłka nie zdarza się często. Nierówność mówiąca o prawdopodobieństwie odchyłki od średniej nosi nazwę **nierówności Czebyszewa** (na imię miał Onufry) i wygląda następująco:

$$\text{Prawdopodobieństwo}(| \text{wielkość} - \text{średnia wielkości} |) > \epsilon \leq \frac{\text{variancja}}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Zatem “wielkie odchyłki” są nieprawdopodobne i “trafienie średnią w rzeczywistość” jest zupełnym szczęściem.

Napiszmy teraz równanie Naviera - Stokesa podstawiając do niego średnie. Wcześniej wiedząc, że  $\partial v_k / \partial x_\alpha$  zapiszemy równość

$$v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_i = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha v_i)$$

Zatem

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha v_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i$$

Podstawmy teraz  $v_i = \langle v_i \rangle + v_i'$  i uśrednijmy. Średnie pulsacji znikają. Pozostanie nam

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\langle v_\alpha \rangle \langle v_i \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \Delta \langle v_i \rangle + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (-\langle v_i' v_\alpha' \rangle)$$

Otrzymaliśmy równanie określające  $\langle v_i \rangle$ . Do niego dochodzi równanie ciągłości dla średnich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_i \rangle = 0.$$

Mamy cztery niewiadome: średnią z ciśnienia  $\langle p \rangle$  i trzy składowe średnie prędkości  $\langle v_i \rangle$ . Są też cztery równania. Pojawił się też kłopotliwy wyraz  $\langle v_i' v_\alpha' \rangle$  przedstawiający średnie z iloczynu. Należałoby go określić przy pomocy czasu, położenia i niewiadomych. Żeby to zrobić potrzebna jest dodatkowa hipoteza, ale ogólnej hipotezy nie ma. Powód wynika z tego, że turbulencja jest własnością ruchu (a nie własnością fizyczną płynu) i w dodatku losową. Czy można określić wielkość losową na podstawie wielkości nielosowej w sposób ogólny? Generalnie nie potrafimy tego zrobić. Można to uczynić dla szczególnych ruchów. Wykorzystując pomiary określa się lokalnie  $\langle v_i' v_\alpha' \rangle$  dla zbliżonych przypadków. Takie określenie nazywamy “**hipotezą domknięcia**” a wielkość  $\langle v_i' v_\alpha' \rangle$  **tensorem Reynoldsa**.

Powodem turbulencji jest **niestateczność**.

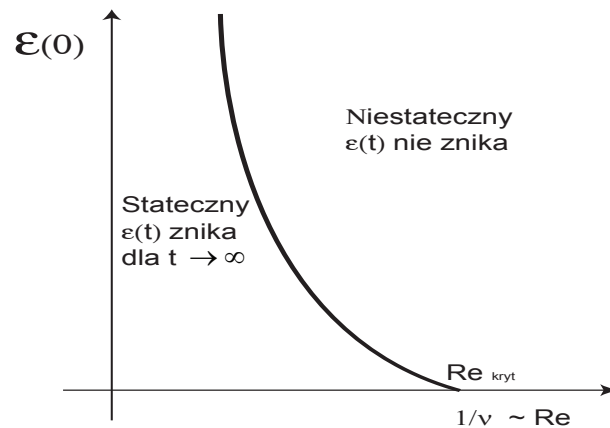
Weźmy pewne pole prędkości i wprowadźmy do niego małe zaburzenie. Może ono zanikać z upływem czasu, rosnać lub pozostawać niezmiennione. Określmy miarę takiego zaburzenia. Jest nią

$$\epsilon(t) = \int (\delta \vec{v} \cdot \delta \vec{v})$$

$\delta \vec{v}$  oznacza zaburzenie prędkości.

Jeśli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$$



**Rysunek 5.9.** Mapa zachowania się zaburzeń

to ruch jest stateczny co oznacza, że miara zaburzenia, a więc zaburzenia znikają. Mapa określająca zachowanie zaburzeń przedstawiona jest na szkicu.

Jak widać, dla  $Re > Re_{kryt}$  każde (nawet o zerowej amplitudzie zaburzenie) nie zanika. Zaburzeń o małych miarach jest zawsze i wszędzie bez liku. Dla dostatecznie dużych liczb Reynoldsa następuje nieustanna zmiana formy ruchu. Takie ruchy, z nieustanną zmiennością wywołaną przypadkowymi zaburzeniami powodują złożony w czasie, przypadkowy (bo zaburzenia zewnętrzne są przypadkowe) ruch zwany turbulentnym. Uważa się, że kłopoty z turbulencją (choć należą do mechaniki klasycznej) są porównywane z kwantową teorią pola grawitacyjnego.

Choć wiemy wiele o turbulencji - to do tej pory nie umiemy jej dobrze opisać. Dobrze - na gruncie mechaniki, a więc nauki bardzo rozwiniętej i nie mającej innych wielkich problemów. Takim problemem pozostaje - w sferze poznania - mechanika turbulencji.

# Bibliografia

[1] R. Sikorski, "Funkcje rzeczywiste" T II, PWN 1959, Warszawa

[2]