

# WYKŁAD 11

## WZÓR HAGENA-POISEUILLE'A, DOŚWIADCZENIE REYNOLDSA, RÓWNANIA BEZWYMIAROWE



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

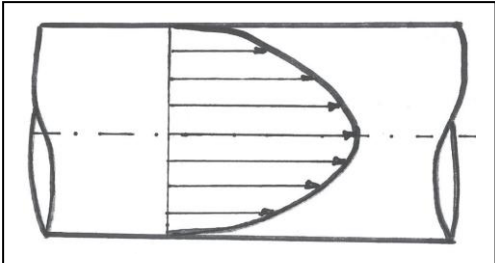
**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## Policzmy wydatek płynący rurą

$$Q = \oint_A \vec{n} \cdot \vec{v} \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_1 \, dA \quad (dA = r \, dr \, d\theta)$$

Wiemy, że prędkość w rurze wyraża się wzorem:

$$v_1 = -\frac{dp/dx_1}{4\mu} (R^2 - r^2)$$


Podstawiając to wyrażenie pod całkę dostajemy:

$$Q = \frac{\pi \left| \frac{\Delta p}{\Delta x} \right| R^4}{8\mu} = \frac{\pi \left| \frac{\Delta p}{\Delta x} \right| D^4}{128\mu}$$

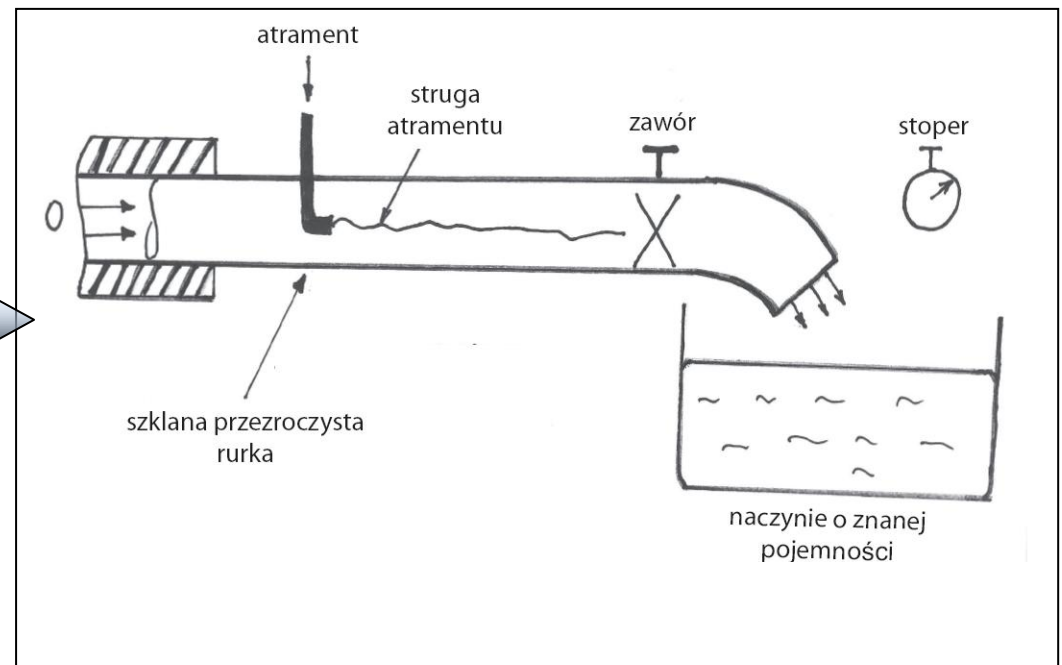
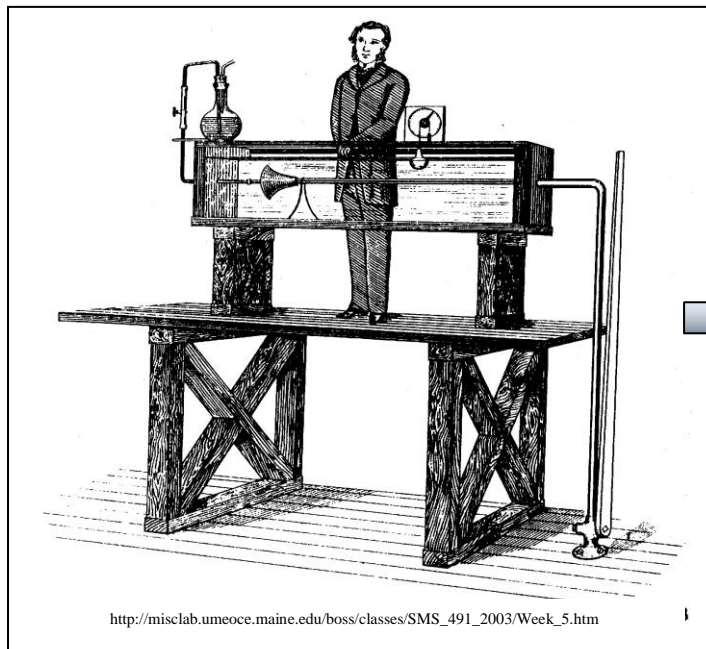
Jest to wzór  
Hagena - Poiseuille'a

D – oznacza średnicę rury.

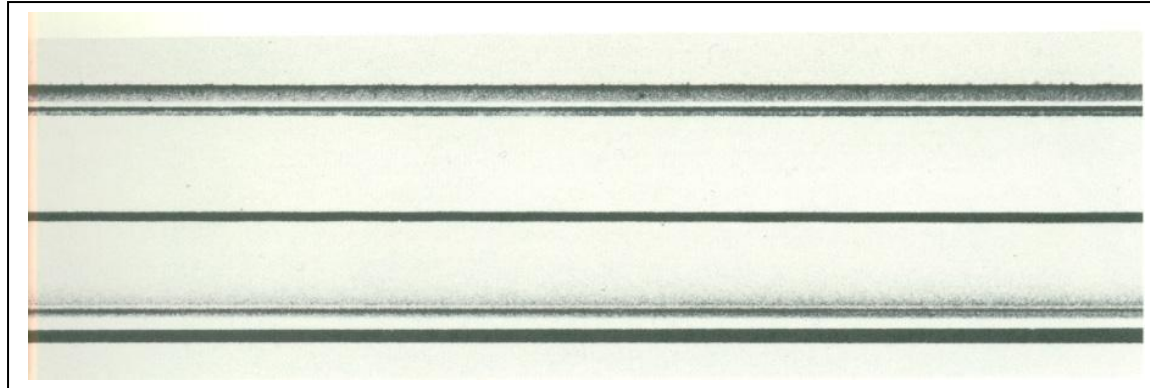
**Wzór Hagen – Poiseuille’a określa wydatek w zależności od spadku ciśnienia, rodzaju cieczy i geometrii przewodu. Wzór ten jest poprawny tylko dla ruchów bardzo powolnych! Dla ruchów szybkich, przy dużych wydatkach pomiary i obliczenia dają radykalnie różne wyniki**

## DOŚWIADCZENIE REYNOLDSA

**Osborne Reynolds wykonał elementarne doświadczenie: do szkalnej rury wprowadził strugę barwnika.**

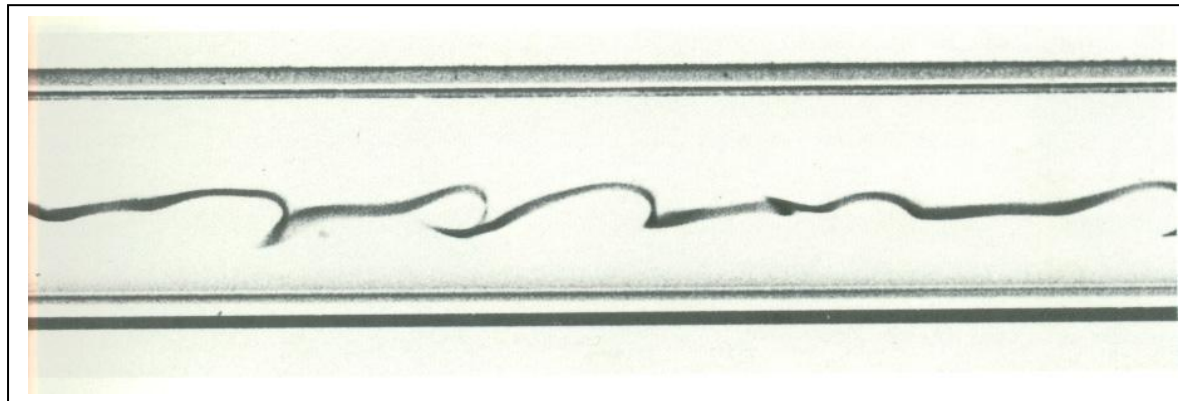


1. Małe wydatki – ruch powolny. Pole prędkości jest paraboloidalne, występuje tylko składowa wzdłużna.



<http://www.uic.edu/classes/me/me536/gallery.html>

2. Ruch szybszy. Pole prędkości ma składowe poprzeczne, zależy też od składowej wzdłużnej.



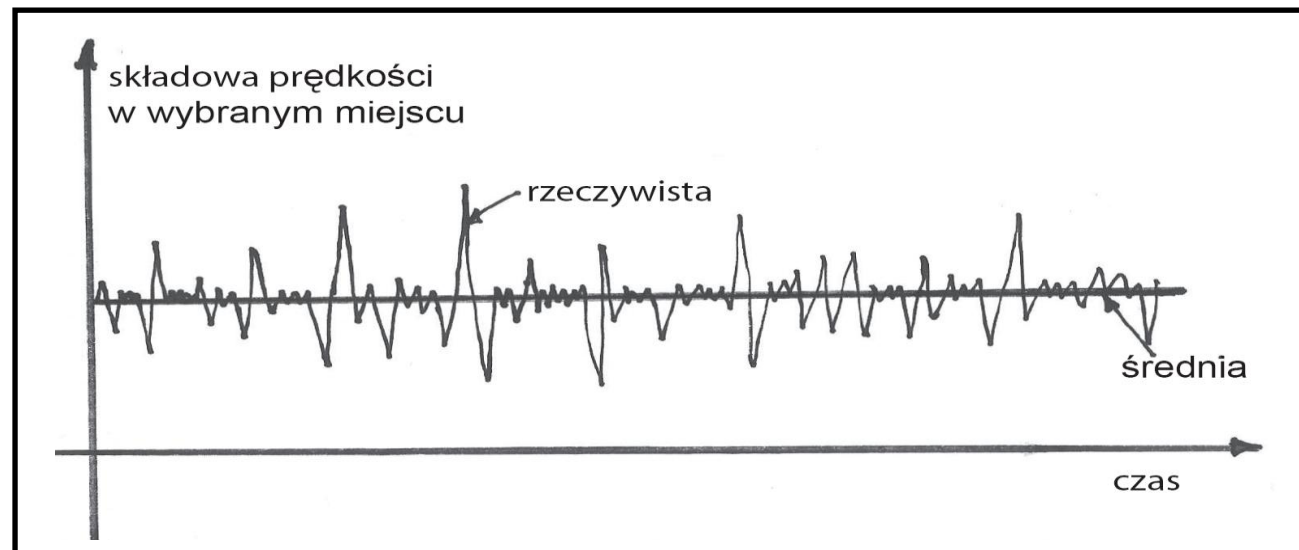
<http://www.uic.edu/classes/me/me536/gallery.html>

### 3. Ruch szybki. Cząstki atramentu zachowują się podobnie do cząstek dyfundującego gazu.



<http://www.uic.edu/classes/me/me536/gallery.html>

### Zachodzą znaczące losowe zmiany prędkości



# RUCH LAMINARNY I TURBULENTNY

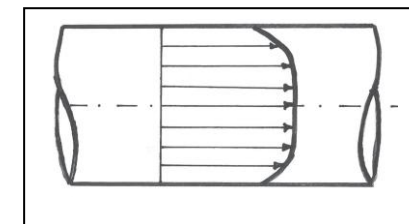
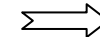
Ruch powolny, bez pulsacji prędkości nazywa się ruchem laminarnym.

W ruchu tym wymiana masy, pędu i energii zachodzi na drodze molekularnej.

Dla takiego ruchu w rurze możemy korzystać ze wzoru Hagen – Poiseuille'a.

Ruch szybki, dla którego zachodzą znaczące losowe zmiany prędkości, a między sąsiednimi warstwami płynu zachodzi wymiana masy, pędu i energii na drodze wymiany elementów płynu to ruch turbulentny

Profil prędkości średniej w rurze dla ruchu turbulentnego



## RÓWNANIA BEZWYMIAROWE I PODOBIEŃSTWO

$$t = T \cdot t', \quad x_k = Lx'_k, \quad p = p_0 p', \quad v_k = Uv'_k$$

**T** – skala czasu, **L**- skala długości, **p<sub>0</sub>** – skala ciśnienia,  
**U** – skala prędkości.

Wielkości promowane nie mają wymiaru.

Wstawmy podane zależności do równania ciągłości.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial (Uv'_k)}{\partial (Lx'_k)} = \left( \frac{U}{L} \right) \frac{\partial v'_k}{\partial x'_k} = 0$$

Bezwymiarowe równanie ciągłości: →

$$\frac{\partial v'_k}{\partial x'_k} = 0$$

Bezwymiarowe równanie ruchu dla j – tej składowej

$$\frac{L}{UT} \frac{\partial v'_j}{\partial t} + v'_k \frac{\partial v'_j}{\partial x'_k} = \left( \frac{gL}{U^2} \right) F'_j - \left( \frac{p_0}{\rho U^2} \right) \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + \left( \frac{\mu}{\rho UL} \right) \Delta' v'_j$$

**Zapiszmy to równanie używając pewnych liczb bezwymiarowych:**

$$\frac{1}{St} \frac{\partial v'_j}{\partial t} + v'_k \frac{\partial v'_j}{\partial x'_k} = \frac{1}{Fr} F'_j - \frac{1}{Eu} \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + \frac{1}{Re} \Delta' v'_j$$



# LICZBY PODOBIENSTWA

Liczba  
Strouhala

$$St = \frac{UT}{L} = \left( \frac{\text{skala sil bezwladnosci}}{\text{skala sil przyspieszenia loka ln ego}} \right)$$

Liczba  
Froude'a

$$Fr = \frac{U^2}{gL} = \left( \frac{\text{skala sil bezwladnosci}}{\text{skala sil masowych}} \right)$$

Liczba  
Eulera

$$Eu = \frac{\rho U^2}{p_0} = \left( \frac{\text{skala sil bezwladnosci}}{\text{skala sil cisnieniowych}} \right)$$

Liczba  
Reynoldsa



$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \left( \frac{\text{skala sił bezwładności}}{\text{skala sił lepkości}} \right)$$

Liczby - Strouhala, Frouda, Eulera i Reynoldsa, czyli odpowiednio St, Fr, Eu, Re noszą nazwę liczb podobieństwa albo parametrów kryterialnych.

Dwa zjawiska są podobne dynamicznie gdy:

- obszary ruchu są podobne geometrycznie
- liczby podobieństwa są takie same
- bezwymiarowe warunki brzegowe i bezwymiarowe warunki początkowe są identyczne

