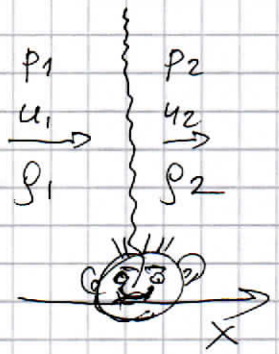
Dotychczas zakładaliśmy, że poruszający się gaz podlega przemianie izentropowej! Można było tak zrobić, albowiem przy założonej ciągłości pól prędkości, ciśnienia, temperatury itd. mamy lokalną równowagę termodynamiczną. **Wszędzie.** Dodajmy, że oprócz ciągłości pól — milcząco — założyliśmy ciągłość pochodnych. Bo użyliśmy równań w których występują pochodne.

A jeśli **nie zakładać ciągłości?** Nie można użyć równań w których występują pochodne tam, gdzie są nieciągłości. Nie można też posługiwać się przemianą izentropową. **Bo brak równowagi.**

Nieciągłość może wystąpić dla pewnej wartości współrzędnej x. Jest niezmienna w czasie — bo ruch jest ustalony. Przy ruchu w którym wszystkie funkcje opisujące pola prędkości, ciśnienia itd. zależą tylko od współrzędnej x nieciągłość zachodzi na płaszczyźnie $x = const$



Wiążemy układ odniesienia z tą powierzchnią — to znaczy z płaszczyzną nieciągłości.

Dla obserwatora umiejscowionego w tym układzie mamy następujące prawa zachowania:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \qquad (I)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \qquad (II)$$

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} \qquad (III)$$

Równanie te wyrażają zachowanie strumienia masy, pędu i energii. (Powierzchnia nieciągłości jest płaszczyzną. Nie traci się na niej masa, nie działa siła zewnętrzna i nie jest dostarczana moc.)
Jeśli znamy p_1, ρ_1 i u_1 to można wyznaczyć p_2, ρ_2 i u_2

Zanim przystąpimy do przekształceń prowadzących do p_2, ρ_2 i u_2 zbadamy wypisany układ równań.
Po pierwsze: **Wyrugujemy prędkości i otrzymamy związek termodynamiczny opisujący przemianę.**

W tym celu podzielimy równanie (II) przez (I) i wynik dzielenia zapiszemy tak:

$$u_2 - u_1 = \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2}$$

Równanie (III) zawiera kwadraty prędkości. Rozłożymy ich różnicę i podstawiamy $u_2 - u_1$:

$$(u_2 + u_1)\left(\frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2}\right) = \frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)$$

Wykonujemy działanie w lewej stronie. Zawsze można wykorzystać równanie (I) tak, by usunąć ilorazy prędkości. (Na przykład: $u_2 \frac{p_1}{\rho_1 u_1} = u_2 \frac{p_1}{\rho_2 u_2} = \frac{p_1}{\rho_2}$)
Oto wynik:

$$\frac{p_1}{\rho_2} - \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_1} = \frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)$$

Wykonujemy rachunki: $\frac{2k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{k-1} p_2/\rho_2$ itp. i następnie obliczamy p_2/p_1:

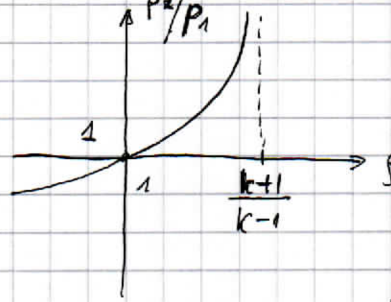
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1}\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$ To jest wynik rachunków...

Równanie to opisuje **adiabatę** (bo energia jest stała).

To **adiabata Hugoniota.**

Oczywiście, dla $\rho_2/\rho_1 = 1$ mamy $p_2/p_1 = 1$. Gdy ρ_2/ρ_1 wzrasta — rośnie też p_2/p_1.

Jeśli $\rho_2/\rho_1 \to \frac{k+1}{k-1}$ to $\frac{p_2}{p_1} \to \infty$. Mamy asymptotę pionową...



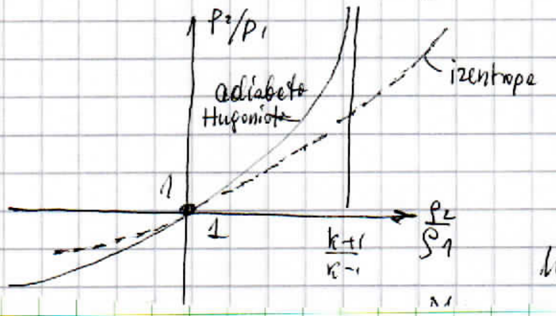
Porównajmy tę przemianę z izentropą, czyli ze związkiem:
$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k.$$
Dla $\rho_2 = \rho_1$, czyli dla $\xi = 1$ równanie
$$y = \xi^k$$
po zróżniczkowaniu daje $y'|_{\xi=1} = k$

Różniczkujemy funkcję
$$y = \frac{\frac{k+1}{k-1}\xi - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \xi}$$
i otrzymujemy dla $\xi = 1$ również $y'|_{\xi=1} = k$

To oznacza, że ogólnie funkcje są zgodne wraz z pochodnymi. Czytelnik może stwierdzić, że $y''|_{\xi=1} = k(k-1)$ dla izentropy i tyle samo dla adiabaty Hugoniota. A więc
$$\left(\frac{p_2}{p_1}\Big|_H - \frac{p_2}{p_1}\Big|_I\right)_{\frac{\rho_2}{\rho_1}\to 1} = \text{const}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)^3 + \dots$$

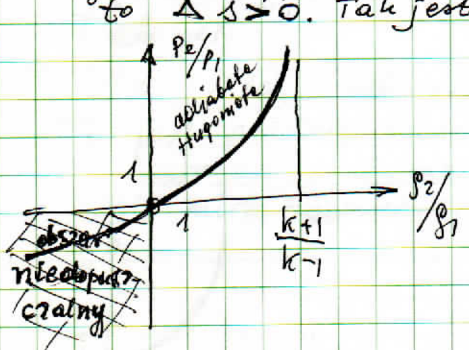
Mówimy: funkcje te są zgodne do rzędu drugiego albo — ich wykresy są ściśle styczne...

Izentropa nie ma asymptoty pionowej. A dla $\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$ ma większą wartość niż adiabata Hugoniota. Odwrotnie, niż dla $\rho_2/\rho_1 > 1$.



Zmiana entropii ΔS jest proporcjonalna do wyrażenia $\ln p_2/p_1 - k\ln \rho_2/\rho_1$
$$\Delta S \sim \ln\frac{p_2}{p_1} - k\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$
Weźmy pewną wartość $\rho_2/\rho_1 = A$.

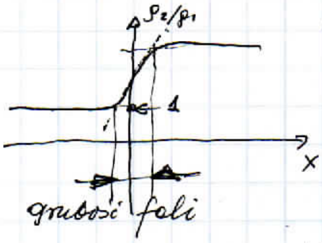
Zmiana entropii jest taka: $\Delta S \sim \ln\frac{p_2}{p_1} - k\ln A = \ln\frac{p_2}{p_1} - \text{Const}$.
Dla izentropy $\ln p_2/p_1 = k\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} = k\ln A = \text{const}$. Wtedy $\Delta S = 0$.
Jeśli p_2/p_1 dla badanej przemiany przewyższa $\frac{p_2}{p_1}$ uzyskane dla izentropy, przy tym samym A, to $\Delta S > 0$. Tak jest dla $\rho_2/\rho_1 > 1$ w adiabacie Hugoniota. (Spójrz na wykres...)



Odwrotnie jest przy $\rho_2/\rho_1 < 1$. Zmiana ciśnienia jest mniejsza, niż w izentropie.
Wniosek: $\Delta S < 0$.
Układ termodynamiczny w którym zachodzi adiabata Hugoniota jest izolowany (energia jest niezmienna).
A więc **zgęszczeniowa** część adiabaty Hugoniota jest dopuszczalna termodynamicznie.
A część rozprężeniowa — narusza II zasadę termodynamiki i nie może być zrealizowana...

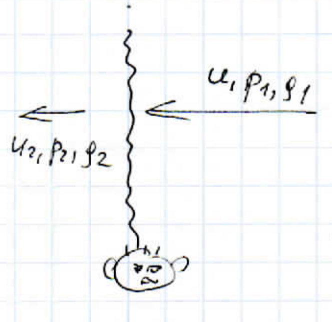
Rozwiązanie nieciągłości – TYLKO ZGĘSZCZENIOWE – jest nazywane **FALĄ UDERZENIOWĄ.**

Fale uderzeniowe występują w rzeczywistości w formie zmian gęstości, ciśnienia, prędkości, temperatury na niewielkiej odległości. Określenie umownej grubości fali jest następujące:



do rozkładu ρ_2/ρ_1 wyznaczamy styczną w miejscu, w którym zachodzi "połowa zmiany". Przecięcia stycznej z $\rho_2/\rho_1 = 1$ i ρ_2/ρ_1 "za" falą określają omawianą grubość. To wielkość równa kilku-kilkunastu drogom swobodnym cząsteczki. Grubość jest niewielka dla silnych fal (ρ_2/ρ_1 znaczne) i maleje dla ρ_2/ρ_1 bliskiemu jedności.

Rozważymy bardzo silną falę (np. powstałą przy wybuchu nuklearnym) poruszającą się w atmosferze. Dla takiej fali $\rho_2/\rho_1 \approx \kappa+1/\kappa-1$. Umieszczamy obserwatora w układzie związanym z falą.



Prędkość z jaką fala się porusza to prędkość, którą obserwator określa jako u_1, z którą gaz napływa do fali...
Obowiązuje – nie mal – ten związek: $\rho_2/\rho_1 = \kappa+1/\kappa-1$
Wobec tego $\rho_2/\rho_1 = u_1/u_2$ i $p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2\left(1 - \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 u_1^2}\right)$

Podstawiamy oszacowanie dla stosunku gęstości i otrzymujemy

$$p_2 - p_1 = \frac{2}{\kappa+1}\rho_1 u_1^2.$$

Przy wybuchu w atmosferze fala ma kształt powierzchni kulistej. Jej promień to

$$R \approx 1.08\left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{1/5}$$

E jest energią wybuchu, ρ masą właściwą powietrza. Prędkość fali to $\frac{dR}{dt}$.
Czytelnik wyliczy wartości skoku ciśnienia dla bomb o energiach wydzielonych przy wybuchach 1, 10 i 66*) megaton. Jedna megatona to równoważnik miliona ton trotylu (TNT). Dane dotyczące trotylu są w internecie.

Znając przemianę termodynamiczną zachodzącą w fali uderzeniowej wyznaczymy związki kinematyczne.

W tym celu zapiszemy równanie energii w takiej formie:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \left(\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1}\right)_{M=1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_2}{\rho_2}$$

Można to przepisać w formie dwóch równań.

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}a_*^2$$

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}a_*^2$$

bo $\left(\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1}\right)_{M=1} = \frac{a_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{\kappa-1} = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}a_*^2.$

Odejmujemy równania po podzieleniu przez $\frac{u_1}{2}$ i $\frac{u_2}{2}$ odpowiednio.
Wynik:

$$u_1 - u_2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2}\right) = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}a_*^2\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)$$

*) 66 megatonowa bomba eksplodowała 30 X 1961r. Standardowa bomba B61 występująca w arsenale Stanów Zjednoczonych może mieć 20 megaton. (Ma regulowaną energię wybuchu). 66 mogła mieć 100MT!

Z równania pędu znajdujemy iloraz $\frac{p}{\rho u}$:

$$p_1+\rho_1 u_1^2 = p_2+\rho_2 u_2^2 \rightarrow \rho_1 u_1\left(u_1+\frac{p_1}{\rho_1 u_1}\right)=\rho_2 u_2\left(u_2+\frac{p_2}{\rho_2 u_2}\right)$$

co, po skróceniu przy wykorzystaniu równania $\rho_1 u_1=\rho_2 u_2$ daje związek

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1}-\frac{p_2}{\rho_2 u_2}=u_2-u_1$$

Teraz eliminujemy wielkości termodynamiczne z "odjętego" równania energii:

$$u_1-u_2+\frac{2k}{k-1}(u_2-u_1)=\frac{k+1}{k-1}a_*^2\left(\frac{u_2-u_1}{u_1 u_2}\right)$$

Wykonujemy odejmowanie w lewej stronie: $\frac{2k}{k-1}-1=\frac{k+1}{k-1}$ i otrzymujemy

$$\frac{k+1}{k-1}(u_2-u_1)=\frac{k+1}{k-1}a_*^2\left(\frac{u_2-u_1}{u_1 u_2}\right)$$

Oczywiście $u_2 \neq u_1$, bo dla $u_2=u_1$ nie występuje nieciągłość.

A więc otrzymaliśmy:

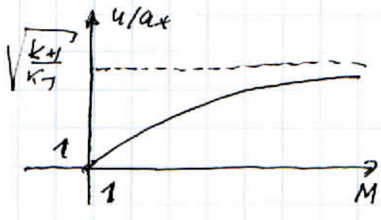
$$u_1 u_2 = a_*^2$$

RÓWNANIE PRANDTLA

Podkreślamy, że u_1 i u_2 są określone względem fali uderzeniowej. Wyznaczymy związek pomiędzy liczbą Macha, a stosunkiem u/a_*. Otóż:

$$\frac{u^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2 \rightarrow 1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{M^2}=\frac{k+1}{k-1}\left(\frac{a_*}{u}\right)^2$$

Widać, że dla $M=1$ $a_*=u=u_*$ (czego należało się spodziewać) oraz, że dla $M\to\infty$ $u/a_* \to \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2}$. Dalej $\frac{u}{a_*}$ jest monotonicznie rosnącą funkcją M. (Dla $M<1$ odpowiednią część wykresu łatwo narysować. Widać, że przy $u=0$ $u/a_*=0$ ...)



Ponieważ $u_2=\frac{\rho_1}{\rho_2}u_1$ i $\frac{\rho_1}{\rho_2}<1$, to $u_2<u_1$. A więc ze związku Prandtla wnioskujemy, że

$$u_1>a_* \text{ i } u_2<a_*$$

Tym samym $M_1>1$ i $M_2<1$. Ostatnie stwierdzenie to rezultat faktu, że dla $u=a$ $(=a_*)$ $M=1$...

Zależność $u_2/a_* = 1/(u_1/a_*)$ można przekształcić do formuły $M_2=M_2(M_1)$.

Jasne, że $M_2(1)=1$. A dla $M_1\to\infty$, co oznacza, że $\left(\frac{u_1}{a_*}\right)^2=\frac{k+1}{k-1}$ otrzymamy $(u_2/a_*)^2=\frac{k-1}{k+1}$ i, po prostych rachunkach, otrzymamy

$$M_2^2\Big|_{M_1=\infty}=\frac{k-1}{2k}$$

To najmniejsza wartość liczby Macha za falą uderzeniową. Zależność $M_2(M_1)$ jest monotonicznie malejąca.

Z równania $p+\rho u^2=const$ (to równanie pędu) łatwo otrzymać relację:

$$p\left(1+\frac{\rho}{p}u^2\right)=p\left(1+\frac{k u^2}{k\frac{p}{\rho}}\right)=p(1+kM^2)=const$$

A więc:

$$p_1(1+kM_1^2)=p_2(1+kM_2^2)$$

Dla temperatury otrzymamy, na podstawie równania energii znaną zależność

$$T_1\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)=T_2\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)$$

Wyraża ona stałość entalpii całkowitej – czyli niezmienność temperatury T_0.

Pozostaje wyznaczyć zmianę ciśnienia spiętrzenia. Otóż – ze wzorów wiążących p_2/p_1 w fali uderzeniowej i relacji $p/p_0 = \left(\frac{1}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{k/k-1}$ wynika wyrażenie:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_{01}} = \left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}$$

Użycie tego wzoru (przy obliczeniach prowadzonych "ręcznie") jest uciążliwe. Lepiej, po prostu, obliczyć wartości czynników i rezultaty pomnożyć. Zobaczony zbiór wyników ułatwia zadanie...

Fala uderzeniowa jest nieciągłością. Nie zachodzi więc lokalna równowaga termodynamiczna. To oznacza – przy stałości energii – wzrost entropii. Rozpatrzmy schemat ruchu w którym – w wyniku jakiegoś procesu – wzrasta entropia. A więc $s_2 - s_1 = \Delta s > 0$.

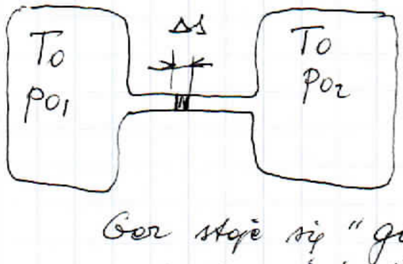
Pojawia się tu problem określenia stanów "przed zmianą" i "po zmianie". Przypominamy, że ruch jest niezależny od czasu. A więc "przed" i "po" nie powinno dotyczyć upływu czasu, lecz tego, czy zjawisko zaistniało czy też nie zaistniało.

W rozważanym przypadku mamy sytuację: gaz – to znaczy rozważana "porcja" gazu – nie przepłynęła przez nieciągłość, co odpowiadało stanowi ① i, po przepłynięciu przez nią mamy stan ②.
Zmiana entropii oznacza, że termodynamicznie stan ② jest całkowicie inny niż stan ① i bez ingerencji z zewnątrz, stan ① nie może ponownie zaistnieć...
Zmiana entropii Δs jest, jak wiemy, proporcjonalna do wyrażenia $\ln p_2/p_1 - k \ln \rho_2/\rho_1$ *). A więc

$$\Delta s \sim \ln\frac{p_2}{p_1} - k\ln \rho_2/\rho_1$$

Ale – przy zachowaniu energii dla stanu ① jest $p_{01} = \rho_{01} R T_0$ i analogicznie, dla stanu ② $p_{02} = \rho_{02} R T_0$, bo $T_{01} = T_{02} = T_0$! A więc po zatrzymaniu ruchu przed zmianą entropii i po [illegible] mamy:

$$\Delta s \sim \ln\frac{p_{02}}{p_{01}} - k\ln \rho_{02}/\rho_{01} = \ln\frac{p_{02}}{p_{01}} - k\ln\frac{p_{02}}{p_{01}} = (1-k)\ln\frac{p_{02}}{p_{01}}$$



bo $\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}}$. Ponieważ $k > 1$, to wobec $\Delta s > 0$ stwierdzamy, że $\mathbf{p_{02} < p_{01}}$ pomimo stałej energii...
Spadek ciśnienia spiętrzenia oznacza utratę zdolności do wykonania pracy przez gaz.
Gaz staje się "gorszy" mechanicznie... Jak bowiem wiadomo, wykonanie pracy wiąże się z rozprężeniem gazu.
Stwierdzamy też, że spadek ciśnienia spiętrzenia powoduje wzrost objętości właściwej ($= 1/\rho$) gazu. Po zmianie entropii – przy jej wzroście – zbiornik potrzebny do przechowania gazu musi mieć zwiększoną objętość w stosunku do zbiornika zasilającego instalację...
Wykonując szczegółowe rachunki możemy uzyskać rezultat

$$\Delta s \sim (M_1 - 1)^3 + \dots$$

Pełny "wzór" jest niesympatycznie długi. Zwłaszcza, gdy chcemy napisać go w formie $\Delta s(M_1)$...

---

*) $ds = \frac{dq}{T} = c_v\frac{dT}{T} + \frac{p}{T}d\left(\frac{1}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{ds}{c_v} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} + (k-1)\rho\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{dp}{p} - k\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{\Delta s}{c_v} = \ln\frac{p_2}{p_1} - k\ln \rho_2/\rho_1$
bo: $dT/T = dp/p - d\rho/\rho$, $\frac{p}{RT} = \rho$, $c_v = \frac{R}{k-1}$, $d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}d\rho$.

Prostopadła fala uderzeniowa , k = 1,4