INFORMATYKA II: INSTRUKCJA 2
Całkowanie numeryczne

1 Słowem wstępu

Całkowanie numeryczne jest jednym z podstawowych algorytmów używanych w obliczeniach inżynierskich. Pamiętajmy, że całkowanie numeryczne zawsze dotyczy obliczania całki oznaczonej (jedno- bądź wielowymiarowej). Nigdy natomiast nie dotyczy obliczania całki nieoznaczonej. Wynikiem jego działania jest wartość całki, a w żadnym razie wzór funkcji pierwotnej.

2 Algorytmy całkujące

Wśród dwóch podstawowych algorytmów, jakim będziemy się zajmować jest metoda trapezów oraz metoda Simpsona.

Ćwiczenia

1. Napisz program obliczający metodą trapezów całkę oznaczoną o wzorze

$$g(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

Algorytm całkowania metodą trapezów jest zaimplementowany. Znajdziesz go w funkcji `trapez` w pliku `kwad.cpp`. Nagłówek funkcji `trapez` ma następującą postać.

```
double trapez(double a, double b, double (*fun)(double x), int n)
```

Argumenty a, b i n to odpowiednio dolna i górna granica całkowania oraz liczba przedziałów, na które dzielony jest obszar całkowania. Zwróć uwagę na trzeci argument. Jest to wskaźnik do funkcji. Dzięki temu procedura `trapez` jest w stanie w taki sam, ogólny sposób liczyć całkę z dowolnej funkcji. Po nazwie (wskaźniku do funkcji) wie, której funkcji ma użyć do obliczania wartości funkcji podcałkowej. Poprawne wywołanie to np. `trapez(a, b, sin, n);` lub `trapez(1, 5, sqrt, 100);`. Możesz też użyć tej procedury do przecałkowania funkcji, którą wcześniej zdefiniowałeś, np. `trapez(a, b, MojaFunkcja, 50);` pod warunkiem, że we wcześniejszym miejscu w kodzie ta funkcja jest określona. Np. tak:

```
double MojaFunkcja(double x) // funkcja musi byc typu double
                             // i miec 1 argument typu double
{
   return x*x+sin(x);
}
```

Aby zrealizować zadanie z punktu 1, wykonaj następujące czynności:

- Napisz funkcję obliczającą `f(x)` oraz funkcję obliczającą całkę w sposób analityczny (przecałkuj na papierze). Umieść ich prototypy przed funkcją główną oraz załącz plik nagłówkowy `kwad.h` z funkcjami całkującymi.
- Czytaj z klawiatury a, b oraz n - liczbę podziałów.
- Obliczaj całkę numerycznie `cn` oraz analitycznie `ca` przez wywołanie odpowiednich funkcji.
- Obliczaj błąd $\Delta = |c_n - c_a|$.
- Wpisuj do pliku krok całkowania oraz wartość całki policzonej analitycznie oraz numerycznie.

2. Przetestuj ten program dla

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

dla $a = 1$, $b = 5$ oraz $a = 0.1$ i $b = 5$.

3. Rozszerz ten program tak, aby zapisywał do pliku kolejne wierwsz odpowiadające $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^m$.

4. Wynik przedstaw graficznie, korzystając z Excela.

5. Rozszerz program tak, aby dodatkowo używał metody Simpsona. Wymaga to tylko kosmetycznych zmian. Cały potrzebny szkielet już masz. Metoda Simpsona jest zaimplementowana w procedurze `simpson(double a, double b, double(*fun)(double x), int n)`.

6. Przedstaw wyniki graficznie.

Wskazówki odnośnie wskaźników do funkcji

Przeanalizuj poniższy kod ilustrujący użycie wskaźników do funkcji. Jakie wartości przyjmują zmienne `y1` i `y2`?

```
//funkcja: y = 2*x
double fun1(double x)
{
   return 2*x;
}

// funkcja: y = -x
double fun2(double x)
{
   return -x;
}

// funkcja zwaraca y^2
double kwadrat(double xx, double (*pf)(double))
{
   return pf(xx)*pf(xx);
}

void main()
{
   double y1 = kwadrat(2., fun1);
   double y2 = kwadrat(2., fun2);
}
```

3 Dla ciekawych

Procedury trapezów i Simpsona to dość elementarne procedury. W programach obliczeniowych, które wymagają wykonywania całkowań wielokrotnie (często wiele milionów razy - o takich metodach, np. metodzie elementów skończonych - stosowanej choćby w wytrzymałości konstrukcji - będziesz się uczyć na wyższych latach) trzeba używać procedur najbardziej wydajnych obliczeniowo. Jedną klasę takich metod, które osiągają dużą dokładność przy niewielkiej liczbie punktów, w których obliczana jest funkcja podcałkowa (o tych punktach mówimy *węzły kwadratury*) stanowią kwadratury Gaussa.

3.1

Kwadratura Gaussa jest w oryginalnej postaci zdefiniowana dla następującej całki oznaczonej (zawsze w przedziale $x = [-1, 1]$).

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Całkę w sposób przybliżony oblicza się wg następującego wzoru:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

gdzie w_i to kolejne wagi kwadratury, x_i to węzły kwadratury, a n oznacza liczbę węzłów, w których będzie ewaluowana wartość funkcji podcałkowej. Aby policzyć całkę kwadraturą Gaussa, trzeba znać położenia węzłów i wartości wag. Można je obliczyć (istnieją odpowiednie procedury) lub też dla wybranych wartości n można je znaleźć w internecie[1]. Położenia węzłów i wartości wag dla $n = 5$ są podane w poniższej tabeli.

Tablica 1: Węzły i wagi kwadratury Gaussa dla $n = 5$

w_i	x_i
-0.9061798459386639927976269	0.2369268850561890875142640
-0.5384693101056830910363144	0.4786286704993664680412915
0.0	0.5688888888888888888888889
0.5384693101056830910363144	0.4786286704993664680412915
0.9061798459386639927976269	0.2369268850561890875142640

3.2 Ćwiczenie

Zaimplementuj w dowolny sposób (choćby w pętli - niekoniecznie w osobnej procedurze) metodę całkowania za pomocą kwadratury Gaussa. Porównaj ją z poprzednimi metodami. Ilu podziałów w metodzie trapezów lub Simpsona musisz użyć, aby osiągnąć dokładność całkowania osiąganą przez kwadaturę Gaussa opartą na pięciu węzłach?

[1] Wystarczy do wyszukiwarki wpisać hasło „Legendre Gauss nodes and weights". Da się je znaleźć choćby pod adresem www.holoborodko.com/pavel/numerical-methods/numerical-integration/