PODSTAWY MATEMATYCZNE

ALGEBRA WEKTORÓW I TENSORÓW

Baza ortonormalna w E^3 : $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & if \quad i = j \\ 0 & if \quad i \neq j \end{cases}$$

Każdy wektor w E^3 może być wyrażony jako liniowa kombinacja wersorów bazowych

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \equiv a_i\boldsymbol{e}_i$$ - konwencja sumacyjna (Einsteina)

$$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3]$$ - kanoniczne utożsamienie (izomorfizm) E^3 i R^3

ILOCZYN SKALARNY (WEWNĘTRZNY) WEKTORÓW

Niech $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$ i $\boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{e}_j$. Iloczynem skalarnym wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nazywamy liczbę

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \equiv (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_i b_j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$

Ponieważ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) = a_i$, zatem $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$

ILOCZYN WEKTOROWY

Definiujemy operację $\times$ w działaniu na wersorach bazy w następujący sposób:

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \ , \ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \ , \ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2,$$

$$\underbrace{\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i}_{\text{nie sumujemy!}} = \boldsymbol{0} \ , \quad \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_i$$

Zakładając liniowość tek operacji względem obu argumentów, rozszerzamy tę operację na dowolne wektory z E^3:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{e}_i \times b_j \boldsymbol{e}_j = a_i b_j \, \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e}_3$$

Praktyczny sposób obliczania iloczynu wektorowego

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3$$

SYMBOL ALTERNUJĄCY (ALTERNATOR, SYMBOL LEVI-CIVITY)

$$\in_{ijk} = \begin{cases} 0 \;\; gdy \;\; i=j \;\; lub \;\; i=k \;\; lub \;\; j=k \\ 1 \;\; gdy \;\; \{i,j,k\} \;\; jest\ premutacją\ parzystą \;\; \{1,2,3\} \\ -1 \;\; gdy \;\; \{i,j,k\} \;\; jest\ permutacją\ nieparzystą \;\; \{1,2,3\} \end{cases}$$

Np. $\in_{213} = -1 \quad , \quad \in_{311} = 0 \quad , \quad \in_{231} = 1.$

Iloczyn wektorowy wektorów ***a*** and ***b*** może być zapisany w postaci

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \in_{ijk} a_j b_k \boldsymbol{e}_i$$

Inna użyteczna operacja to **iloczyn mieszany** trójki wektorów

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \in_{ijk} a_i b_j c_k$$

Wyznacznik macierzy *A* (dim **A** = 3): $\det \boldsymbol{A} = \in_{ijk} a_{1,i} a_{2,j} a_{3,k}$

TENSORY KARTEZJAŃSKIE 2-EGO RZĘDU W E^n

Tensory jako dwuliniowe przekształcenia $E^n \times E^n \to R$

Dwuliniowość oznacza:
$$T(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = \alpha_1 T(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \alpha_2 T(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}),$$
$$T(\boldsymbol{x}, \alpha_1 \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \boldsymbol{y}_2) = \alpha_1 T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + \alpha_2 T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2).$$

Dla dowolnych wektorów $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ możemy napisać równość

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = T(x_i \boldsymbol{e}_i, y_j \boldsymbol{e}_j) = x_i y_j T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = t_{ij} x_i y_j$$

M**acierz** $\boldsymbol{T}$ taka, że $[\boldsymbol{T}]_{ij} = t_{ij}$ jest reprezentacją tensora w względem wybranej bazy w $\boldsymbol{E}^n$ (w wybranym układzie odniesienia).

Wybrane operacje na tensorach:

Dodawanie $T = T_1 + T_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 \;\Rightarrow\; t_{ij} = t_{ij}^1 + t_{ij}^2$

Mnożenie przez skalar $T = \beta T_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{T} = \beta \boldsymbol{T}_1 \;\Rightarrow\; t_{ij} = \beta t_{ij}^1$

Iloczyn $T = T_1 T_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{T}_2 \;\Rightarrow\; t_{ij} = t_{ik}^1 t_{kj}^2$

Iloczyn skalarny (Frobeniusa) $T_1 : T_2 := t_{ij}^1 t_{ij}^2 \quad (\textit{podwójne sumowanie}\,!)$

Bazowe funkcjonały liniowe (kowektory) w $E^3 \to R$: $e_i(\boldsymbol{e}_j) := \delta_{ij}$

Iloczyn tensorowy kowektorów bazowych (kowersorów):

$$(e_i \otimes e_j)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := e_i(\boldsymbol{x}) e_j(\boldsymbol{y}) = e_i(x_k \boldsymbol{e}_k) e_j(y_m \boldsymbol{e}_m) =$$
$$= x_k y_m e_i(\boldsymbol{e}_k) e_j(\boldsymbol{e}_m) = x_k y_m \delta_{ik} \delta_{jm} = x_i y_j$$

Możemy zapisać równość

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = t_{ij} x_i y_j = t_{ij}(e_i \otimes e_j)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad \text{lub} \quad T = t_{ij}\, e_i \otimes e_j .$$

Morał: Przestrzeń tensorów 2-ego rzędu tworzy 9-wymiarową przestrzeń liniową.

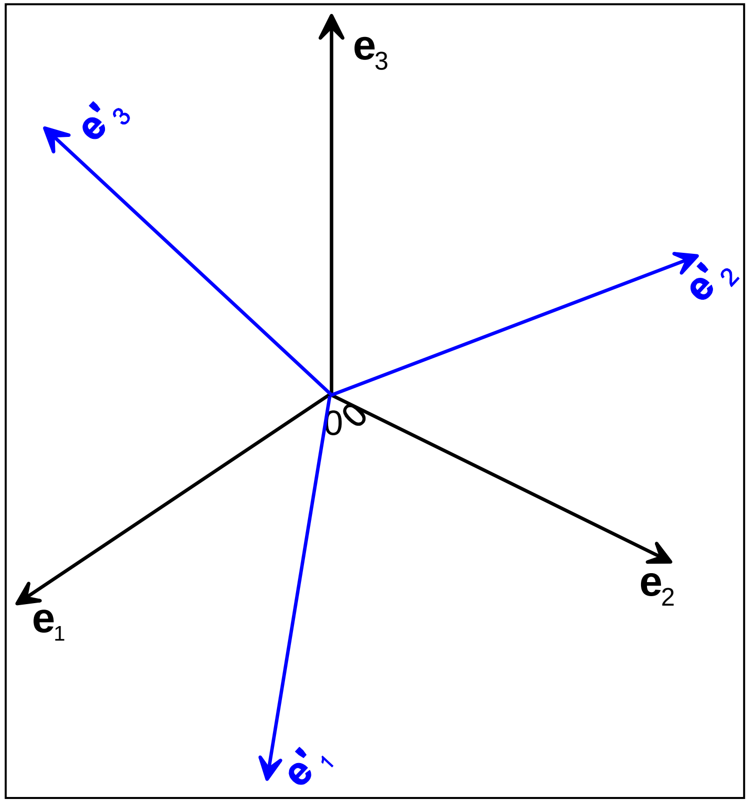
Tensor symetryczny: $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

Tensor antysymetryczny (lub skośnie symetryczny): $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

W dowolnej bazie reprezentacja macierzowa tensora symetrycznego jest macierzą symetryczną ($t_{ij} = t_{ji}$), a antysymetrycznego – macierzą antysymetryczną ($t_{ij} = -t_{ji}$).

ORTOGONALNE TRANSFORMACJE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Niech $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ będą wersorami innej bazy w $\boldsymbol{E}^3$ (rysunek). Wersory te można przedstawić jako kombinacje liniowe wersorów bazy pierwotnej (starej).



Niech $\boldsymbol{e}'_i = z_{ik}\boldsymbol{e}_k \quad , \quad \boldsymbol{e}'_j = z_{jm}\boldsymbol{e}_m.$

Warunek ortonormalności nowej bazy (primowanej) to:

$$(\boldsymbol{I})_{ij} = \delta_{ij} = (\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = z_{ik} z_{jm} (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_m) = z_{ik} z_{jm} \delta_{km} = \\ = z_{ik} z_{jk} = (\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^T)_{ij} = (\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})_{ij} .$$

Wnioskujemy, że transformacja bazy (układu współrzędnych) zachowuje ortonormalność wtedy i tylko wtedy, gdy definiująca tę transformację macierz $\boldsymbol{Z}$ spełnia warunek $\boldsymbol{Z}^{-1} = \boldsymbol{Z}^T$, **czyli jest macierzą ortogonalną**.

Jasnym jest, że transformacja zadana przez taką macierz to de facto **sztywny obrót**.

Każdy wektor $\boldsymbol{x}$ z $\boldsymbol{E}^3$ może być przedstawiony jako kombinacja wersorów z bazy starej lub nowej

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i = x'_i \boldsymbol{e}'_i .$$

Wobec tego
$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i = x'_i\, z_{ij}\, \boldsymbol{e}_j = x'_j\, z_{ji}\, \boldsymbol{e}_i \ ,$$

co oznacza, że

$$x_i = z_{ji} x'_j = (\boldsymbol{Z}^T)_{ij}\, x'_j = (\boldsymbol{Z}^{-1})_{ij}\, x'_j \qquad \text{i} \qquad x'_i = (\boldsymbol{Z})_{ij}\, x_j .$$

Otrzymaliśmy regułę transformacji współrzędnych wektora przy zmianie bazy.

Rozważmy **tensor** T i jego reprezentacje względem obu baz – starej i nowej. Mamy

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = t_{ij} x_i y_j = t'_{ij} x'_i y'_j .$$

Mamy

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = t_{ij} x_i y_j = t_{ij}\, z_{ki} x'_k\, z_{mj}\, y'_m = x'_k\, \underbrace{z_{ki} t_{ij}}_{(\boldsymbol{ZT})_{kj}}\, z_{mj}\, y'_m =$$

$$= x'_k\, \underbrace{(\boldsymbol{ZT})_{kj} (\boldsymbol{Z}^T)_{jm}}_{(\boldsymbol{ZTZ}^T)_{km}}\, y'_m = x'_k\, \underbrace{(\boldsymbol{ZTZ}^T)_{km}}_{t'_{km}}\, y'_m = x'_k t'_{km} y'_m$$

Z przeprowadzonego rachunku wynika, że macierz reprezentująca T względem nowej bazy wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{Z}^T = \boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{Z}^{-1}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób regułę transformacji reprezentacji macierzowych dla tensorów kartezjańskich 2-ego rzędu.

TENSORY 2-EGO RZĘDU JAKO TRANSFORMACJE LINIOWE $E^3 \to E^3$

Rozważmy tensor T i dwa dowolne wektory $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$.

Mamy
$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_i \underbrace{t_{ij} y_j}_{w_i} = x_i w_i = \underbrace{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})}_{\text{iloczyn skalarny}}.$$

Zauważmy, że wektor $\boldsymbol{w}$ może być zapisany jako wynik działania pewnej transformacji $\mathfrak{T}$, a mianowicie $\boldsymbol{w} = \mathfrak{T}\boldsymbol{y}$.

Transformacja $\mathfrak{T} : E^3 \to E^3$ jest liniowa i może być zdefiniowana poprzez swoje działanie na wersory bazy
$$\mathfrak{T}\boldsymbol{e}_j = t_{ij}\boldsymbol{e}_i$$
Istotnie, dla każdego wektora $\boldsymbol{w}$ mamy

$$\boldsymbol{w} = \mathfrak{T}\boldsymbol{y} = \mathfrak{T}(y_j\boldsymbol{e}_j) = y_j\,\mathfrak{T}\boldsymbol{e}_j = t_{ij}\,y_j\boldsymbol{e}_i = w_i\boldsymbol{e}_i.$$

Równoważność pomiędzy tensorami 2-ego rzędu a odwzorowaniami liniowymi wynika z następujących formuł

$$\mathfrak{T} \to T:\; T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := (\boldsymbol{x},\mathfrak{T}\boldsymbol{y}) \quad , \quad T \to \mathfrak{T}:\; \mathfrak{T}\boldsymbol{y} := T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_i.$$

WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE TENSORA 2-EGO RZĘDU. NIEZMIENNIKI TENSORA.

Zagadnienie na wartości i wektory własne:

1-sze sformułowanie: wyznacz $\lambda \in C$ i niezerowy wektor **w** takie, że $\mathfrak{T}\boldsymbol{w} = \lambda\,\boldsymbol{w}$, lub
2-gie sformułowanie: wyznacz $\lambda \in C$ i niezerowy wektor **w** takie, że $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \lambda\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ dla każdego wektora **x** z $\boldsymbol{E}^3$.

Równoważnie, mamy

$$(t_{ij}v_j - \lambda v_i)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; p_T(\lambda) = \det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0.$$

Wartości własne są pierwiastkami **wielomianu charakterystycznego** $p_T(\lambda)$.

Ważna własność:
Wartości własne tensora symetrycznego są liczbami rzeczywistymi. Ponadto, wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym takiego tensora są ortogonalne (prostopadłe).

Wielomian charakterystyczny jest niezmiennikiem, tj. nie zależy od wyboru bazy!

$$p_T(\lambda) = \det(\boldsymbol{T}' - \lambda\boldsymbol{I}) = \det(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}^{-1} - \lambda\boldsymbol{I}) = \det[\boldsymbol{Z}(T - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{Z}^{-1}] =$$
$$= \det\boldsymbol{Z}\cdot\det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\cdot\det\boldsymbol{Z}^{-1} = \det\boldsymbol{Z}\cdot\det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\cdot(\det\boldsymbol{Z})^{-1} = \det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})$$

W przypadku **3D** mamy $$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3$$

którego współczynniki zwane są **niezmiennikami tensora**

$$J_1 = tr\,T := t_{ii} \equiv t_{11} + t_{22} + t_{33}$$ (“tr” znaczy *trace*, po polsku **ślad** …),

$$J_2 = \tfrac{1}{2}[(tr\,T)^2 - tr\,T^2]$$

$$J_3 = \det T.$$

Zachodzą następujące związki pomiędzy niezmiennikami tensora, a jego wartościami własnymi (wzory Viete’a dla wielomianu 3-ego stopnia)

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad , \quad J_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \quad , \quad J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

TWIERDZENIE CAYLEYA-HAMILTONA

Każda kwadratowa macierz **A** spełnia swój własny wielomian charakterystyczny $p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ w tym sensie, że ma miejsce równość $p_A(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

Dowód:

Dla dowolnej macierzy nieosobliwej **M** mamy $\boldsymbol{M}^{-1} = \left(\det \boldsymbol{M}\right)^{-1} (cof\, \boldsymbol{M})^T$. Zatem $\boldsymbol{M}(cof\, \boldsymbol{M})^T = \det \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{I}$. Niech $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$. Wówczas $\boldsymbol{B}(\lambda) := [cof\,(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})]^T$ jest wielomianem macierzowym stopnia nie wyższego niż n -1 (n – wymiar **A**)

$$\boldsymbol{B}(\lambda) = \lambda^{n-1} \boldsymbol{B}_{n-1} + \lambda^{n-1} \boldsymbol{B}_{n-1} + \ldots + \lambda \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_0$$

Wobec tego

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\left(\lambda^{n-1} \boldsymbol{B}_{n-1} + \lambda^{n-1} \boldsymbol{B}_{n-1} + \ldots + \lambda \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_0\right) =$$

$$= \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{I} = (\lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + c_1 \lambda + c_0) \boldsymbol{I}$$

Powyższa równość jest spełniona dla każdej liczby λ, **zatem współczynniki macierzowe po obu stronach równości muszą być identyczne.**

Z porównania wynika, że

$$-\boldsymbol{B}_{n-1} = \boldsymbol{I}$$
$$-\boldsymbol{B}_{k-1} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_k = c_k \boldsymbol{I} \quad , \; k = n-1, n-2, .., 1$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_0 = c_0 \boldsymbol{I}$$

Pomnóżmy (z lewej strony) pierwszą równość przez $\boldsymbol{A}^n$, drugą - przez $\boldsymbol{A}^{n-1}$ i tak dalej, pozostawiając bez zmian ostatnią. Następnie dodajmy stronami wszystkie otrzymane w ten sposób równości. Zauważmy, że po lewej stronie pojawią się pary składników różniących się tylko znakiem!

Ostatecznie otrzymamy:

$$0 = \boldsymbol{A}^n + c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \ldots + c_1 \boldsymbol{A} + c_0 \boldsymbol{I} \equiv p_A(\boldsymbol{A})$$

zgodnie z dowodzoną formuła.

Dla macierzy o wymiarze równym 3 mamy w szczególności

$$-\boldsymbol{T}^3 + J_1 \boldsymbol{T}^2 - J_2 \boldsymbol{T} + J_3 \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}.$$

Relację tę można wykorzystać do obliczania macierzy odwrotnej (jak?). Jej prawdziwe znaczenie polega jednak na tym, że **implikuje ona możliwość wyrażenia trzeciej i wyższych potęgi macierzy $\boldsymbol{A}$ przez $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{A}^2$**.

WAŻNA TOŻSAMOŚĆ

Dowiedziemy, że $$\in_{ijk}\in_{k\beta\gamma}=\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma}-\delta_{i\gamma}\delta_{j\beta}$$

<u>**Dówód:**</u>

Zacznijmy od oczywistej tożsamości $$\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Permutujemy wiersze …… $$\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}=\in_{ijk}.$$

a następnie kolumny ….. $$\begin{vmatrix}\delta_{i\alpha} & \delta_{i\beta} & \delta_{i\gamma}\\ \delta_{j\alpha} & \delta_{j\beta} & \delta_{j\gamma}\\ \delta_{k\alpha} & \delta_{k\beta} & \delta_{k\gamma}\end{vmatrix}=\in_{ijk}\in_{\alpha\beta\gamma}.$$

Połóżmy teraz k = α i zsumujmy ...

Oto rezultat
$$\begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{i\beta} & \delta_{i\gamma} \\ \delta_{jk} & \delta_{j\beta} & \delta_{j\gamma} \\ \delta_{kk} & \delta_{k\beta} & \delta_{k\gamma} \end{vmatrix} = \in_{ijk} \in_{k\beta\gamma} \text{ , czyli}$$

$$\in_{ijk} \in_{k\beta\gamma} = \delta_{ik}(\delta_{j\beta}\delta_{k\gamma} - \delta_{k\beta}\delta_{j\gamma}) - \delta_{i\beta}(\delta_{jk}\delta_{k\gamma} - \underset{3}{\delta_{kk}}\,\delta_{j\gamma}) + \delta_{i\gamma}(\delta_{jk}\delta_{k\beta} - \underset{3}{\delta_{kk}}\,\delta_{j\beta}) =$$

$$= \delta_{j\beta}\delta_{i\gamma} - \delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} - \delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} + 3\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} + \delta_{j\beta}\delta_{i\gamma} - 3\delta_{j\beta}\delta_{i\gamma} = \delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} - \delta_{j\beta}\delta_{i\gamma}$$

Ćwiczenie: Wykorzystując powyższą tożsamość udowodnij, że

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

WAŻNE OPERATORY RÓŻNICZKOWE (KARTEZJAŃSKI UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH)

Gradient pola skalarnego $f = f(t, \boldsymbol{x})$

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right] = \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \qquad \text{(wektor !)}$$

∇ - operator „nabla”

Dywergencja pola wektorowego $\boldsymbol{w} = w_i(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$

$$div\,\boldsymbol{w} \equiv \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{w}}_{\text{formalny iloczyn skalarny}} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \frac{\partial w_j}{\partial x_j} \qquad \text{(skalar !)}$$

Rotacja pola wektorowego $\boldsymbol{w} = w_i(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$ (wektor !)

$$rot\,\boldsymbol{w} \equiv \underbrace{\nabla \times \boldsymbol{w}}_{\substack{\text{formalny} \\ \text{iloczyn wektorowy}}} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right]\boldsymbol{e}_1 + \left[\frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right]\boldsymbol{e}_2 + \left[\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right]\boldsymbol{e}_3 =$$

$$= \epsilon_{ijk}\frac{\partial w_k}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k$$

Gradient pola wektorowego $\boldsymbol{w} = w_i(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$

$$Grad\,\boldsymbol{w} \equiv \underset{\substack{\text{formalna} \\ \text{diada}}}{\nabla \boldsymbol{w}} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

(tensor 2-ego rzędu !)

Dywergencja pola tensorowego $T = t_{ij}(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$

$$Div\,T \equiv \underset{\substack{\text{formal iloczyn} \\ \text{macierz–wektor}}}{\nabla \cdot T} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i$$

(wektor !)

Laplasjan pola skalarnego $f = f(t, \boldsymbol{x})$

$$\Delta f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}$$

Laplasjan pola wektorowego $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(t, \boldsymbol{x}) = w_i(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{\Delta w} \equiv \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{w})}_{\substack{\text{dywergencja} \\ \text{tensora } \nabla \boldsymbol{w}}} \equiv \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{w}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{w}) = \underbrace{\Delta w_j}_{\substack{\text{Laplasjan} \\ \text{pola skal. } w_j}} \boldsymbol{e}_j = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_k \partial x_k} \boldsymbol{e}_j$$

UWAGA: tylko w kartezjańskim układzie współrzędnych składowe Laplasjanu pola wektorowego są równe skalarnym Laplasjanom składowych tego pola!

UŻYTECZNE FORMUŁY RACHUNKU OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH

1) $\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$

2) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{w}) = \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{w} + \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{w}$

3) $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{w}) = \nabla\varphi\times\boldsymbol{w} + \varphi\nabla\times\boldsymbol{w}$

4) $\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{w})$

5) $\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}) = \nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} - \nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} + (\nabla\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} - (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{w}$

6) $\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}) = \nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} + \nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{w}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$

7) $\nabla(\tfrac{1}{2}u^2) \equiv \tfrac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) = \nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$

8) $\nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi$

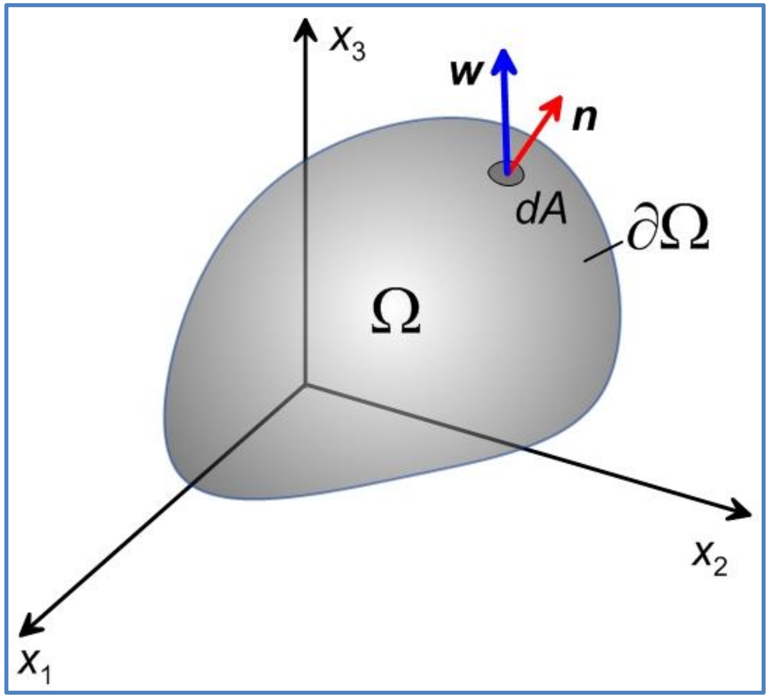
9) $\nabla\times\nabla\varphi \equiv \boldsymbol{0}$, $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{w}) = 0$

10) $\boldsymbol{\Delta w} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{w})$

Ćwiczenie: wykazać prawdziwość podanych formuł posługując się rachunkiem indeksowym.

WAŻNE TWIERDZENIA CAŁKOWE

TWIERDZENIE GREENA-GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO (GGO)



Rozważmy pole wektorowe $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ zdefiniowane w trójwymiarowym obszarze Ω ograniczonym dostatecznie regularnym brzegiem $\partial\,\Omega$. Wówczas ma miejsce równość

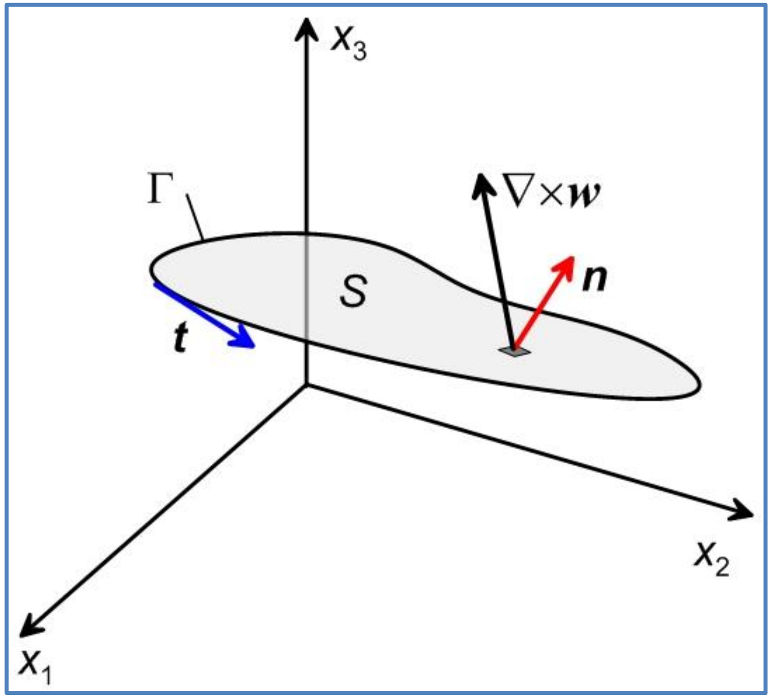
$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \underbrace{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{n})}_{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}=w_n} dS}_{\text{Strumien pola } \boldsymbol{w} \text{ przez brzeg}} = \int_{\Omega} \underbrace{\nabla\cdot\boldsymbol{w}}_{\text{dywergencja pola } \boldsymbol{w}} \, d\Omega$$

Istnieje „dualna" wersja tego twierdzenia, a mianowicie

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w}\, dS = \int_{\Omega} \underbrace{\nabla\times\boldsymbol{w}}_{\text{rotacja pola } \boldsymbol{w}} d\Omega$$

ĆWICZENIE: wyprowadź dualne twierdzenia GGO z jego formy podstawowej.

TWIERDZENIE STOKESA

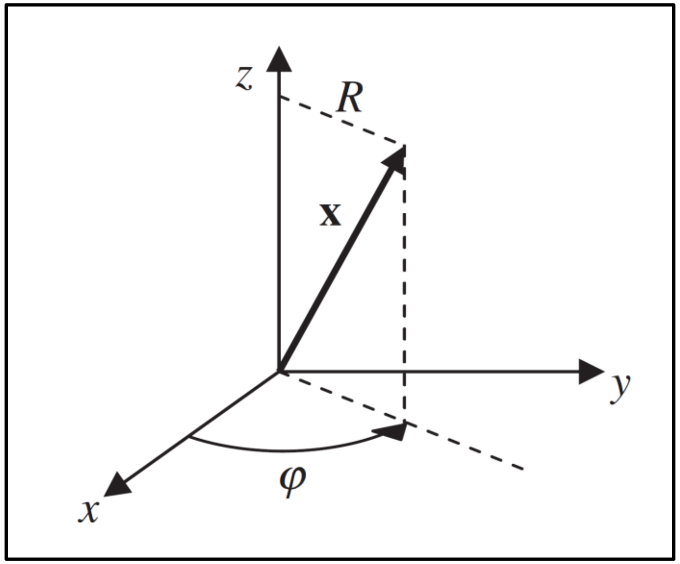


Rozważmy pole wektorowe $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$, zamkniętą linię (pętlę) γ oraz dowolny (ale dostatecznie regularny) płat powierzchni S rozpięty (jak bańka mydlana) na tej linii.

Wówczas prawdziwa jest równość

$$\underbrace{\oint_\gamma \underbrace{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\tau})}_{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}\equiv w_{\tau}} dl}_{\text{cyrkulacja pola } \boldsymbol{w} \text{ wzdłuż linii } \gamma} = \underbrace{\int_S (\nabla\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{n}\, dS}_{\text{strumień rotacji pola } \boldsymbol{w} \text{ przez } S}$$

RACHUNEK W BIEGUNOWYM I CYLINDRYCZNYM UKŁADZIE ODNIESIENIA



Położenie: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z \equiv z$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

Wersory: $$\begin{cases} e_R = e_x \cos\varphi + e_y \sin\varphi \\ e_\varphi = -e_x \sin\varphi + e_y \cos\varphi \\ e_z = e_z \end{cases}$$

Gradient p. s. f : $$\nabla f = \tfrac{\partial}{\partial R} f\, \boldsymbol{e}_R + \tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial \varphi} f\, \boldsymbol{e}_\varphi + \tfrac{\partial}{\partial z} f\, \boldsymbol{e}_z$$

Laplasjan p. s. f : $$\Delta f = \tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial R}\left(R \tfrac{\partial}{\partial R} f\right) + \tfrac{1}{R^2}\tfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f + \tfrac{\partial^2}{\partial z^2} f$$

Dywergencja p. w. $\boldsymbol{u} = u_R \boldsymbol{e}_R + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + u_z \boldsymbol{e}_z$: $$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial R}(R u_R) + \tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial \varphi} u_\varphi + \tfrac{\partial}{\partial z} u_z$$

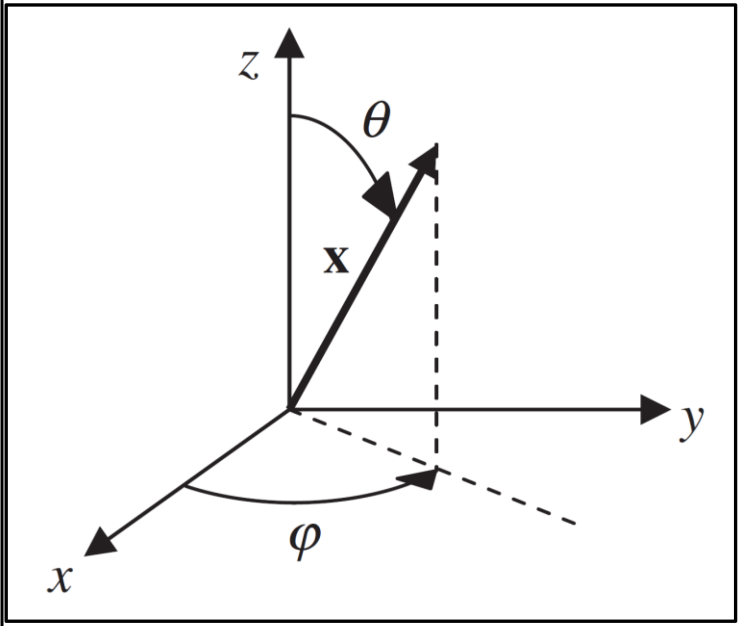
Rotacja p. w. $\boldsymbol{u} = u_R \boldsymbol{e}_R + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + u_z \boldsymbol{e}_z$:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(\tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial \varphi} u_z - \tfrac{\partial}{\partial z} u_\varphi\right)\boldsymbol{e}_R + \left(\tfrac{\partial}{\partial z} u_R - \tfrac{\partial}{\partial R} u_z\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \tfrac{1}{R}\left[\tfrac{\partial}{\partial R}(R u_\varphi) - \tfrac{\partial}{\partial \varphi} u_R\right]\boldsymbol{e}_z$$

Laplasjan p.w. $\boldsymbol{u} = u_R \boldsymbol{e}_R + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + u_z \boldsymbol{e}_z$:

$$\boldsymbol{\Delta u} = \left(\Delta u_R - \tfrac{1}{R^2} u_R - \tfrac{2}{R^2}\tfrac{\partial}{\partial \varphi} u_\varphi\right)\boldsymbol{e}_R + \left(\Delta u_\varphi + \tfrac{2}{R^2}\tfrac{\partial}{\partial \varphi} u_R - \tfrac{1}{R^2} u_\varphi\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \Delta u_z \boldsymbol{e}_z$$

RACHUNEK W SFERYCZNYM UKŁADZIE ODNIESIENIA



Położenie:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta \ , \ y = r\sin\varphi\sin\theta \ , \ z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi = arctg\left(\tfrac{y}{x}\right), \theta = arctg\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

Wersory:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z \cos\theta \\ \boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x \sin\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\varphi \\ \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x \cos\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\theta\sin\varphi - \boldsymbol{e}_z \sin\theta \end{cases}$$

Gradient p. s. f :

$$\nabla f = \tfrac{\partial}{\partial r} f \, \boldsymbol{e}_r + \tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial\theta} f \, \boldsymbol{e}_\theta + \tfrac{1}{r\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\varphi} f \, \boldsymbol{e}_\varphi$$

Laplasjan p. s. f :

$$\nabla^2 f = \tfrac{1}{r^2}\left[\tfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \tfrac{\partial}{\partial r} f\right) + \tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \tfrac{\partial}{\partial\theta} f\right) + \tfrac{1}{\sin^2\theta}\tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} f\right]$$

Dywergencja p.w. $\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e}_r + u_\theta \boldsymbol{e}_\theta + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \tfrac{1}{r\sin\theta}\left[\tfrac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta \sin\theta) + \tfrac{\partial}{\partial\varphi} u_\varphi\right]$$

Rotacja p.w. $\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e}_r + u_\theta \boldsymbol{e}_\theta + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \tfrac{1}{r\sin\theta}[\tfrac{\partial}{\partial\theta}(u_\varphi \sin\theta) - \tfrac{\partial}{\partial\varphi} u_\theta)\boldsymbol{e}_r + \tfrac{1}{r}[\tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\varphi} u_r - \tfrac{\partial}{\partial r}(r u_\varphi)]\boldsymbol{e}_\theta + \tfrac{1}{r}[\tfrac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \tfrac{\partial}{\partial\theta} u_r]\boldsymbol{e}_\varphi$$

Laplasjan p.w. $\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e}_r + u_\theta \boldsymbol{e}_\theta + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta u} = {} & [\nabla^2 u_r - \tfrac{2}{r^2} u_r - \tfrac{2}{r^2 \sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta \sin\theta) - \tfrac{2}{r^2\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\varphi} u_\varphi]\boldsymbol{e}_r + \\ & + (\nabla^2 u_\theta + \tfrac{2}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial\theta} u_r - \tfrac{1}{r^2\sin^2\theta} u_\theta - \tfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\tfrac{\partial}{\partial\varphi} u_\varphi)\boldsymbol{e}_\theta + \\ & + (\nabla^2 u_\varphi + \tfrac{2}{r^2\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\varphi} u_\varphi + \tfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\tfrac{\partial}{\partial\varphi} u_\theta - \tfrac{1}{r^2\sin^2\theta} u_\varphi)\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$