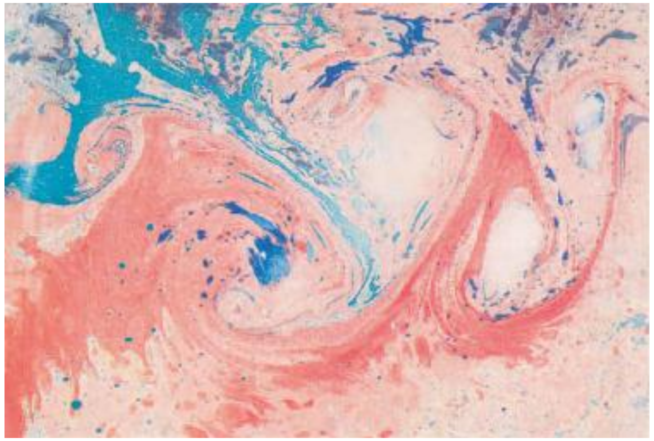
Wykład 14

Ruch turbulentny – c.d.



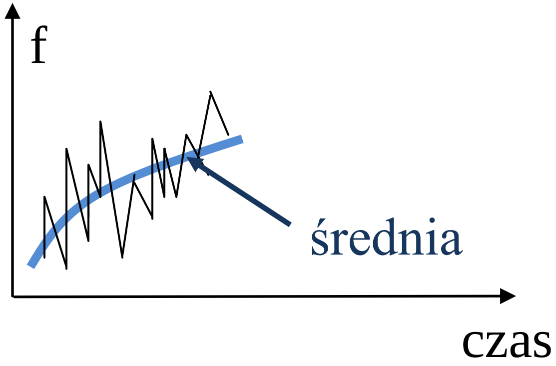
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

“Gallery of Fluid Motion”-M. Samimy, K.S. Breuer

RÓWNANIE REYNOLDSA

Dowolna wielkość w opisie ruchu turbulentnego może być przedstawiona w postaci wolnozmiennej „średniej” i szybkozmiennej, niewielkiej oscylacji. Oscylacja (= pulsacja = fluktuacja) jest wielkością losową.



$$f = \overline{f} + f'$$

srednia oscylacja

$$\overline{f'} = 0$$

srednia
z oscylacji

Definicja wartości średniej

$$\overline{f} = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} f(\tau)\,d\tau$$

Czas uśredniania 2T powinien być większy od czasu charakteryzującego zmiany losowe i mniejszy od czasu, w którym istotnie zmienia się średnia

Pochodna $\overline{f}$ jest funkcją miejsca i czasu.

Pochodna średniej względem współrzędnej x ma postać:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \frac{1}{2T}\frac{\partial}{\partial x}\int_{t-T}^{t+T} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2T}\frac{\partial}{\partial x}\int_{t-T}^{t+T} \frac{\partial f(\tau)}{\partial x}\,d\tau = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

$$\Uparrow$$

Pochodna średniej względem położenia jest średnią pochodnej.

Pochodną średniej względem czasu liczymy następująco:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = \frac{1}{2T}\frac{\partial}{\partial t}\int_{t-T}^{t+T} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2T}\left[f(t+T) - f(t-T)\right] = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} \frac{\partial f}{\partial \tau}\,d\tau$$

Przedstawmy prędkość i ciśnienie w postaci sum:

$$v_k = \overline{v}_k + v'_k \qquad p = \overline{p} + p'$$

Podstawmy powyższe zależności do równań Naviera – Stokesa dla cieczy:

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k v_i\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \Delta v_k$$

W rezultacie otrzymujemy równanie, które nosi nazwę

Równania Reynoldsa dla średnich

$$\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{v}_k \cdot \overline{v}_i\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_k} + \nu \Delta \overline{v}_k + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\overline{v'_i v'_k}\right)$$

TENSOR REYNOLDSA

Zauważmy, że równanie Reynoldsa różni się od równania Naviera-Stokesa dodatkowym członem $\frac{\partial}{\partial x_i}(-\overline{v_i' v_k'})$ **.**

Oznaczmy:

$$\boxed{\overline{v_i' v_k'} = \overline{v_k' v_i'} = -R_{ik} = -R_{ki}}$$

<u>**Tensor Reynoldsa**</u>

Średnie spełniają równanie ciągłości

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial x_k} = \mathrm{diw}\left(\overline{\vec{v}}\right) = 0}$$

Mamy układ opisujący średnie $\overline{v}_k$ i $\overline{p}$. **Trzeba określić składowe tensora Reynoldsa.**

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}\left(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2}, \dots \right)$$

Podanie powyższego związku w jawnej formie nazywamy Hipotezą domknięcia

$\mathbb{R}$ **zależy od ruchu, a więc odpowiedni związek nie będzie wyrażał własności fizycznych płynu, lecz cechy ruchu!**

Zapiszmy $\mathbb{R}$ w sposób następujący:

$$\boxed{R_{ik} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{R}\right)\delta_{ik} + \left(R_{ik} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{R}\right)\delta_{ik}\right)}$$

$\mathrm{Tr}(\mathbb{R})$ - to ślad tensora Reynoldsa

$$\boxed{-\mathrm{Tr}(\mathbb{R}) = \overline{v'_1 v'_1} + \overline{v'_2 v'_2} + \overline{v'_3 v'_3} = 2\,\frac{\overline{\left(v'_1\right)^2} + \overline{\left(v'_2\right)^2} + \overline{\left(v'_3\right)^2}}{2} = 2\kappa}$$

Gdzie κ nosi nazwę <u>energii kinetycznej turbulencji</u> i jest to uśredniony kwadrat oscylacji turbulentnych.

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathbb{R}) = -2\kappa} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R_{ik} = -\frac{2}{3}\kappa\delta_{ik} + \left(R_{ik} + \frac{2}{3}\kappa\delta_{ik}\right)}$$

W równaniu Reynoldsa występują pochodne wielkości $(-\overline{v'_i v'_k})$.

Zatem

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\overline{v'_i v'_k}\right) = \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{2}{3}\frac{\partial \kappa}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} T^t_{ik}$$

Wstawmy to wyrażenie do równania Reynoldsa. Dostaniemy wtedy:

$$\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{v}_k \cdot \overline{v}_i\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{p} + \frac{2}{3}\rho\kappa\right) + \nu\Delta\overline{v}_k + \frac{\partial T^t_{ik}}{\partial x_i}$$

gdzie

$$p_t = \overline{p} + \frac{2}{3}\rho\kappa$$ ⇐ ciśnienie turbulentne

$$T^t_{ik} = R_{ik} + \frac{2}{3}\kappa\delta_{ik}$$ ⇐ tensor naprężeń turbulentnych

Można pokazać, ze tensor naprężeń turbulentnych ma zerowy ślad. Taki ślad ma też tensor określony następująco:

$$\boxed{\dot{\mathbb{D}}_{sr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial x_i}\right)}$$

Hipotezą wykorzystującą powszechnie w opisach ruchu turbulentnego jest równanie:

$$\boxed{T^t = 2\mu_{turb} \cdot \dot{\mathbb{D}}_{sr}}$$ **lub w składowych** $$\boxed{T^t_{ik} = \mu_{turb}\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial x_i}\right)}$$

μ_{turb} **– nazywa się lepkością turbulentną i zależy od rodzaju ruchu, miejsca i „zwykłej" lepkości .**

Gdyby udało się określić μ_{turb}, to równania dla średnich prędkości i ciśnienia byłyby takie:

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_i} = 0}$$

równanie ciągłości dla średnich

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{v}_k \cdot \overline{v}_i\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k} p_{turb} + \nu \Delta \overline{v}_k + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_{turb} \dot{\mathbb{D}}_{sr\,ik}\right)}$$

równanie Reynoldsa

Jeśli znamy μ_{turb} to z powyższego układu równań możemy wyznaczyć $\overline{v}_k$ i p_{turb}

Hipotezy określające μ_{turb} :

1.

$$\mu_{turb} \sim l^2 \left| \frac{\partial \overline{v}}{\partial n} \right|$$

$\frac{\partial \overline{v}}{\partial n}$ - pochodna w kierunku normalnym dominującej składowej prędkości

l - droga mieszania wyznaczana doświadczalnie

2. Hipoteza „κ - ε”

$$\mu_{turb} = \mu_{turb}(\kappa, \varepsilon)$$

κ - energia kinetyczna turbulencji

ε – moc dyssypowana na ciepło skutkiem turbulencji

κ i ε wynikają z dwu dodatkowych równań różniczkowych cząstkowych