



Wykład 11

Hybrydyzacja modeli RANS. Metody DES (Detached Eddy Simulation) i metoda symulacji przepływu Speziale

Sławomir Kubacki

`slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl`

**Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej,
Politechnika Warszawska**

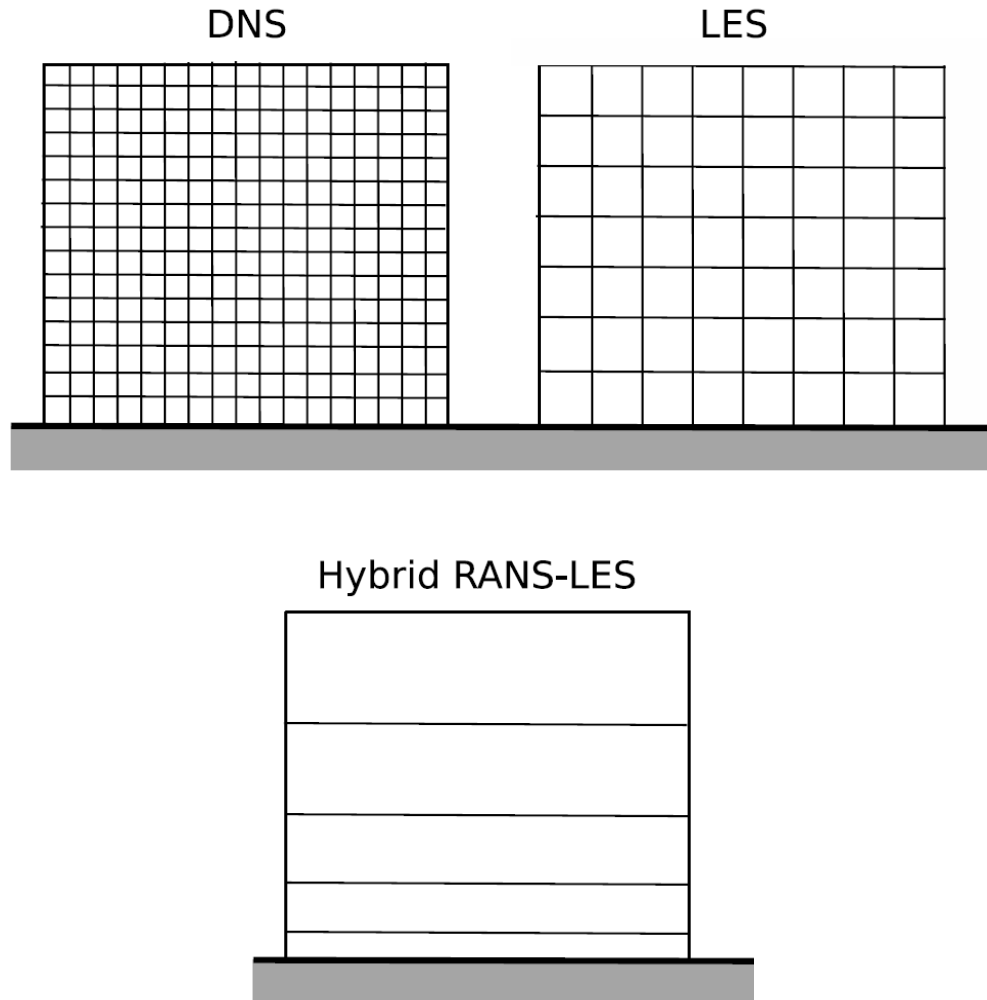
wrzesień, 2013

Zakres wykładu

Wykład dotyczy jednorodnych metod DES

- Równania transportu modelowanej energii kinetycznej i modelowanej częstotliwość fluktuacji dla modelu DES SST (Strelets, 2001)
- Technika symulacji przepływu „Flow simulation methodology” Speziale 1996
- Model DES w oparciu o model RANS Spalarta-Allmarasa 1997 (DES97)
- Zalety i wady metod DES

Motywacja



DES vs. LES

- Metody DES, pozwalają znacznie obniżyć koszty symulacji numerycznych (porównując a metodami DNS lub LES)

Metody hybrydowe RANS-LES: $N \cong Re^{0.4}$ (LES: $N \cong Re^{1.8}$, DNS: $N \cong Re^{2.2}$)

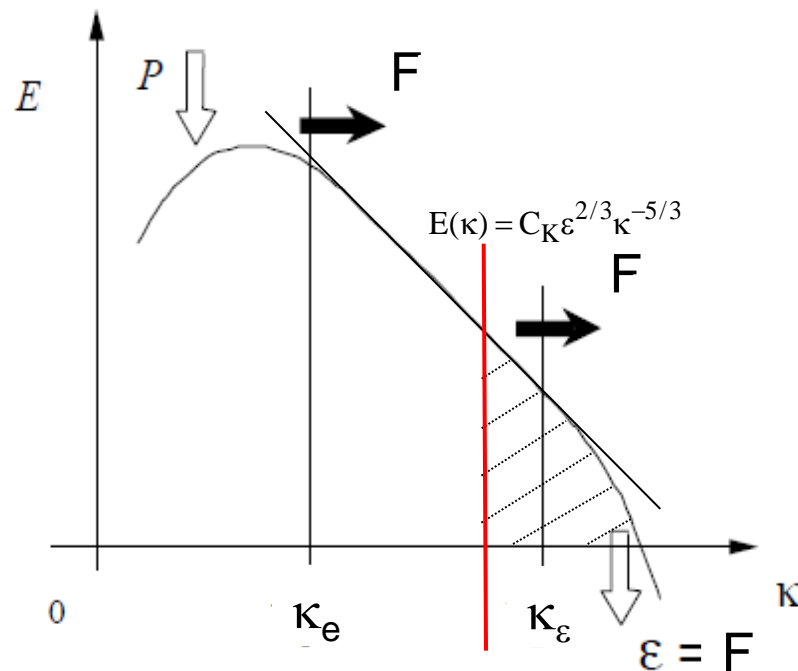
- Metody DES interpolują rozwiązanie między podobszarami RANS i LES
- W metodach DES interpolacja między podobszarami RANS i LES realizowana jest poprzez modyfikację członu destrukcyjnego w równaniu dla k (czasami również poprzez modyfikację współczynnika lepkości turbulentnej)

Dyssypacja energii kinetycznej turbulencji dla modeli LES/DES

Przyjmujemy spektrum Kołmogorowa:

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (1)$$

gdzie κ oznacza liczbę falową ($\kappa = \pi/L$). C_K jest stałą Kołmogorowa ($C_K=1.4-1.5$).



$\kappa_c = \pi/\Delta$
liczba falowa odcięcia

- W praktyce skala długości Δ jest związana z rozmiarem oczka siatki obliczeniowej
- Skala Δ może być utożsamiana z charakterystyczną skalą długości L_c struktur modelowanych dla metody LES ($L_c = \Delta$)
- Δ charakteryzuje najmniejsze struktury wirowe które są (jeszcze) symulowane na danej siatce - stanowi więc dobre „przybliżenie” rozmiaru struktur modelowanych

Dyssypacja podsiatkowej energii kinetycznej turbulencji dla modeli LES/DES

Jeżeli liczba falowa odcięcia jest w obszarze inercyjnym na widmie energii to możemy przyjąć widmową gęstość energii daną Równ. (1). Modelowaną energię kinetyczną turbulencji k_c można otrzymać z zależności

$$k_c = \int_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa \quad (2)$$

gdzie ($\kappa_c = \pi/\Delta$). Po scałkowaniu otrzymuje się

$$k_c = \left(\frac{3C_k}{2} \right) \varepsilon^{2/3} \pi^{-2/3} \Delta^{2/3} \quad (3)$$

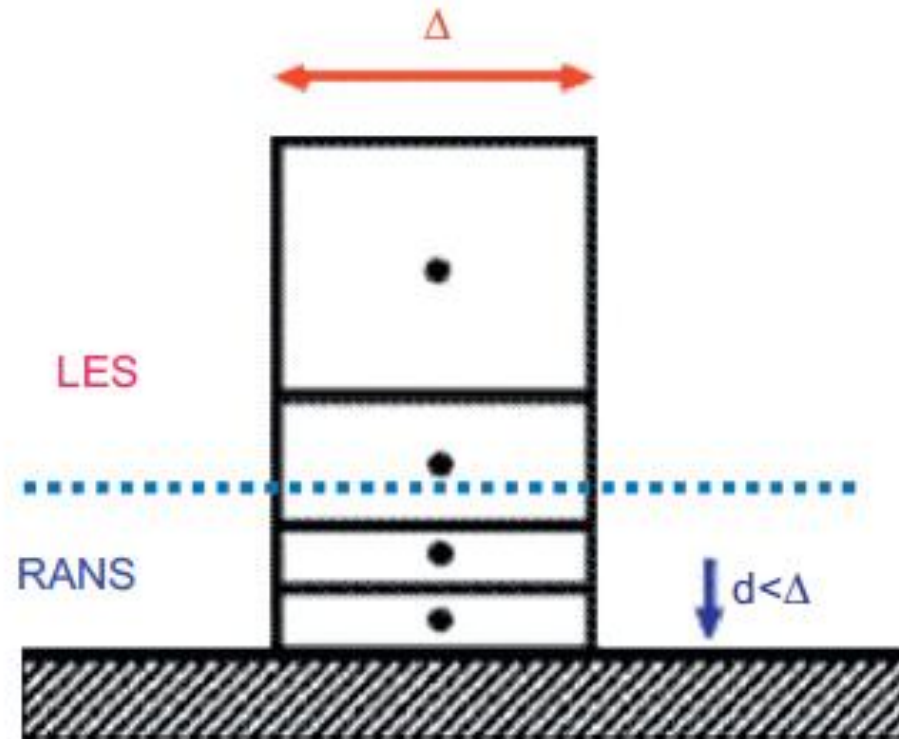
Pozwala to oszacować dyssypację na podstawie Równ. (3):

$$\varepsilon = \left(\frac{3C_k}{2} \right)^{-3/2} \pi \frac{k_c^{3/2}}{\Delta} \cong \frac{k_c^{3/2}}{\Delta} \quad (4)$$

W praktyce dla podobszaru LES

$$\varepsilon \cong \frac{k_c^{3/2}}{C_{DES} \Delta} \quad (5)$$

DES – siatka obliczeniowa i koncepcja podziału obszarów na RANS i LES



Równanie ciągłości i równania pędu ($\rho = \text{const}$)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} + \tau_{ji})$$

gdzie

$\sigma = 2\nu S_{ij}$ składowe tensora naprężeń lepkich płynu,

$\tau_{ij} = 2\nu_t S_{ij} - 2/3k\delta_{ij}$ składowe tensora naprężeń turbulentnych/podsiatkowych

$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ składowe tensora prędkości odkształceń,

ν - współczynnik lepkości kinematycznej płynu,

ν_t - współczynnik lepkości turbulentnej,

k - energia kinetyczna turbulencji.

Model DES SST

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (6)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha P_\omega - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{2\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (7)$$

gdzie

$$P_k = \nu_t S^2 \quad P_\omega = P_k / \nu_t$$

Modyfikacji podlega człon destrukcyjny ε w równaniu dla k

$$\varepsilon = \max \left(\beta^* k \omega, \frac{k^{3/2}}{C_{DES} \Delta} \right) \quad (8)$$

W obszarach LES modelu DES dyssypacja dana jest więc Równ. (5).

Model DES SST

Stałe $\beta^* = 0.09$, $\sigma_k = 0.85F_1 + 1.0(1-F_1)$, $\alpha = 0.553F_1 + 0.44(1-F_1)$,
 $\beta = 0.075F_1 + 0.0828(1-F_1)$, $\sigma_\omega = 0.5F_1 + 0.856(1-F_1)$, $\sigma_{\omega_2} = 0.856$.

Współczynnik lepkości turbulentnej posiada aktywny limiter naprężeń Reynoldsa (dyskutowany na jednym z poprzednich wykładów)

$$v_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (9)$$

gdzie $a_1=0.31$, funkcje F_1 i F_2 służą do interpolacji rozwiązania uzyskanego ze standardowego modelu $k-\omega$ i modelu $k-\varepsilon$ transformowanego do modelu $k-\omega$.

Wzrost członu destrukcyjnego w Równ. (6) powoduje obniżenie poziomu modelowanej lepkości (Równ. 9) do poziomu typowego dla metod LES.

Model DES SST

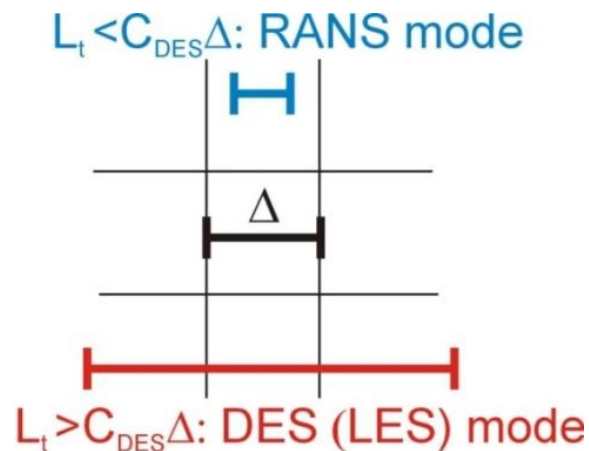
Równ. (6) zazwyczaj zapisuje się w postaci

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \frac{k^{3/2}}{\ell_{DES}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (10)$$

gdzie

$$\ell_{DES} = \min(L_t, C_{DES}\Delta) \quad L_t = k^{1/2} / (\beta^* \omega) \quad (11)$$

Turbulentna (modelowana) skala długości L_t jest uzyskiwana z równań transportu (Równ. 10 i 7)

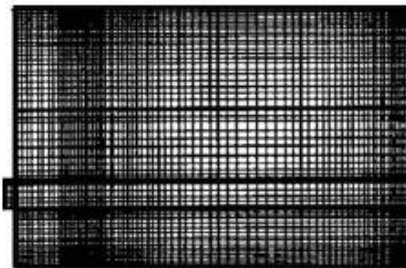


Model DES SST (obszar URANS)

Jeżeli $L_t < C_{DES}\Delta$ to uzyskujemy model RANS (niestacjonarny RANS). Równ. (10) i (7) przyjmują postać

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \beta^* k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (12)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha P_\omega - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{2\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (13)$$

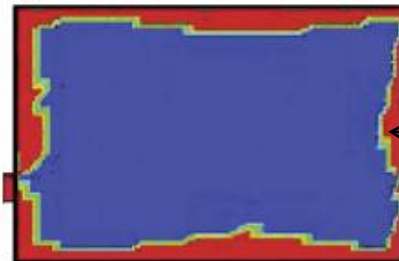


(a)



(b)

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (14)$$



(d)

← RANS

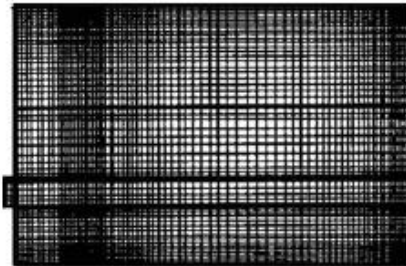
Model DES SST (obszar LES)

Jeżeli $L_t > C_{DES}\Delta$ to uzyskujemy model LES. Równ. (10) i (7) przyjmują postać

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \frac{k^{3/2}}{C_{DES}\Delta} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (15)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha P_\omega - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{2\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (16)$$

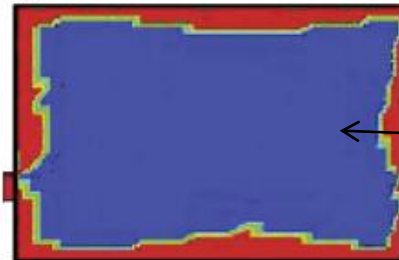
$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (17)$$



(a)



(b)



(d)

LES

Model DES SST – warunki lokalnej równowagi, zgodność z modelem Smagorińskiego

Przyjmując warunki lokalnej równowagi (produkcja = dyssypacji w Równ. 15 i 16)

$$P_k = \frac{k^{3/2}}{C_{DES}\Delta} \rightarrow v_t S^2 = \frac{k^{3/2}}{C_{DES}\Delta} \quad (18)$$

$$\alpha P_\omega = \beta \omega^2 \rightarrow \alpha S^2 = \beta \omega^2 \quad (19)$$

oraz przyjmując współczynnik lepkości

$$v_t = \frac{k}{\omega} \quad (20)$$

Wstawiając Równ. (20) do Równ. (19) otrzymuje się

$$k^2 = \frac{\alpha}{\beta} v_t^2 S^2 \quad (21)$$

Wstawiając Równ. (21) do Równ. (18) otrzymujemy współczynnik lepkości dany „modelem Smagorińskiego”

$$v_t = \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-3/4} C_{DES}\Delta \right)^2 S \quad (22)$$

Model DES SST – warunki lokalnej równowagi, zgodność z modelem Smagoryńskiego

Dla modelu k- ω SST (stałe $\alpha=0.44$, $\beta=0.0828$) $C_{DES}=0.61$.

To daje stałą Smagoryńskiego w Równ. (24) bliską wartości teoretycznej 0.18

$$C_s = (\alpha / \beta)^{-3/4} C_{DES} = 0.17$$

Równ. (22) ma kluczowe znaczenie w zapewnieniu zgodności modelu DES z modelem LES na gęstej siatce obliczeniowej.

Metoda symulacji przepływu Speziale (1996)

Jedną z pierwszych technik hybrydowych (RANS-LES) symulacji przepływu turbulentnego zaproponował Speziale

$$\tau_{ij} = f \left(\frac{\Delta}{l_k} \right) \tau_{ij}^{\text{RANS}} \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (23)$$

Funkcja f tłumii składowe tensora naprężeń turbulentnych uzyskiwane z modelu RANS do poziomu typowego dla metody LES (l_k –skala długości Kolmogorowa)

Zmodyfikowany tensor τ jest stosowany w równaniu pędu

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} + \tau_{ji}) \quad (24)$$

Równania transportu modelu turbulencji nie są modyfikowane.

Metoda symulacji przepływu Speziale (1996)

Speziale proponuje funkcję f postaci

$$f\left(\frac{\Delta}{l_k}\right) = 1 - \exp\left(-\beta \frac{\Delta}{l_k}\right)^n$$

gdzie stałe $\beta=0.001$, $n=1$.

Δ - rozmiar oczka siatki obliczeniowej

$$\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \quad - \text{definicja stosowana w metodach DES}$$

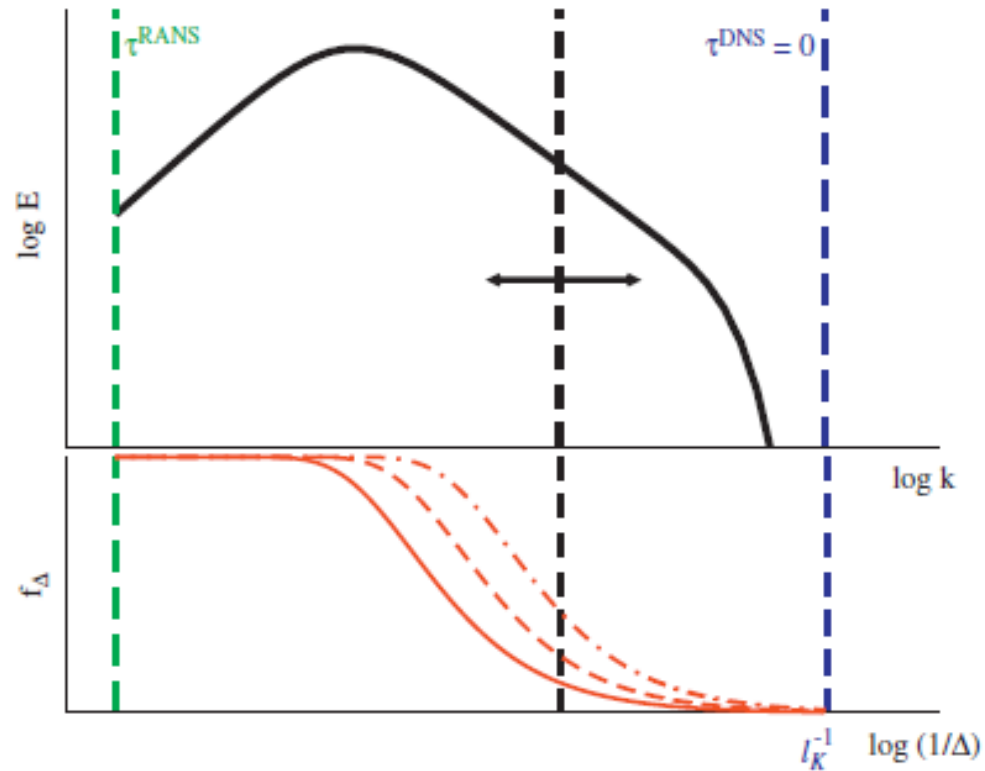
lub

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \quad - \text{definicja typowa dla metod LES}$$

Skala długości dyssypatywnych struktur wirowych (Kolmogorowa)

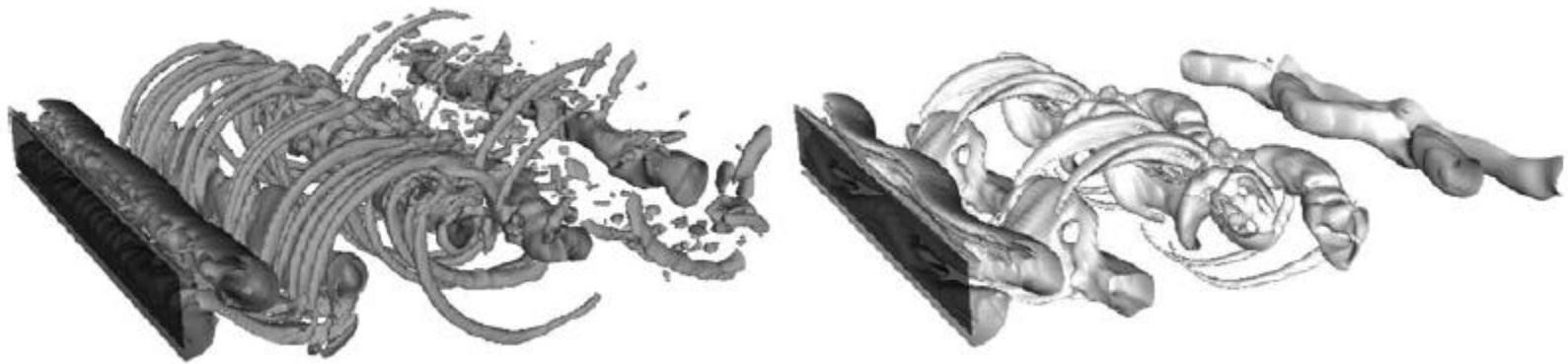
$$l_k = \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4}$$

Metoda symulacji przepływu Speziale (1996)



Widmo energii i typowy rozkład funkcji l_k

Metoda symulacji przepływu Speziale (1996)



Lewy: DNS (8M elementów), prawy: FSM Speziale (1M elementów)

Model DES97– w oparciu o model RANS Spalarta-Allmarasa

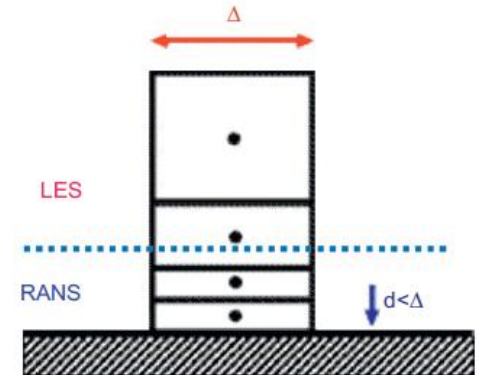
Hybrydyzacja modelu Spalarta-Allmarasa odbywa się poprzez modyfikację członu destrukcyjnego (współczynnik c_{w1})

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = c_{b1}\Omega\tilde{\nu} - c_{w1}\left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{y}}\right)^2 + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left((\nu + \tilde{\nu})\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial y}\right) + c_{b2}\left(\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial y}\right)^2\right]$$

gdzie podobnie jak w modelu DES SST

$$\tilde{y} = \min(y, C_{DES}\Delta)$$

stała $C_{DES}=0.65$.



Podobnie jak w przypadku modelu DES SST zwiększenie członu destrukcyjnego dla $C_{DES}\Delta < y$ (daleko od ścian) skutkuje obniżeniem współczynnika lepkości turbulentnej do poziomu typowego dla metod LES

$$\nu_t = \tilde{\nu}f_{v1} \quad f_{v1} = \frac{(\tilde{\nu}/\nu)^3}{(\tilde{\nu}/\nu)^3 + c_{v1}}$$

Stałe i funkcje (patrz wykład dotyczący metod RANS)

Modele DES zalety i wady

Zalety:

1. Pozwalają znacznie obniżyć (w porównaniu z LES i DNS) koszty symulacji numerycznych niestacjonarnych i trójwymiarowych przepływów turbulentnych

$$N \cong \text{Re}^{0.4} \text{ (DES)} \quad \text{zamiast} \quad N \cong \text{Re}^{1.8} \text{ (LES)}$$

Wady/wymagania

1. Wymagają dobrych siatek obliczeniowych w tych obszarach przepływu w których mają funkcjonować w trybie LES (daleko od ścian)
2. Wykazują problemy w symulacji (modelowaniu) przepływów w których występuje zjawisko przejścia laminarno-turbulentnego
3. Niespójność sformułowania metody w obszarach przejściowych pomiędzy RANS i LES („grey zone”) – chociaż rozwijane są techniki „multiscale methods” które nie posiadają tego ograniczenia