

WYKŁAD 15

ELEMENTY TEORII PRZEPŁYWÓW TURBULENTNYCH



Generalna zasada: kiedy liczba Reynoldsa dla pewnego przepływu laminarnego rośnie, przepływ staje się coraz bardziej skomplikowany. Powyżej pewnej wartości liczby Reynoldsa następuje przejście do stanu turbulentnego. Proces przejścia inicjowany jest przez zaburzenia zewnętrzne, zwykle małe i przypadkowe.

Kluczowe pytanie (o stabilność przepływu): przyjmując, że umiemy adekwatnie wymiarować zaburzenie, jak wielkie zaburzenie może być “skonsumowane” przez przepływ bez konsekwencji w postaci permanentnej zmiany jego formy?

Podejście ogólne do problem stabilności

$\mathbf{v}^{(1)}$ - pole prędkości przepływu niezaburzonego (referencyjnego);

$\mathbf{v}^{(2)}$ - pole prędkości przepływu przy zaburzonych warunkach początkowych.

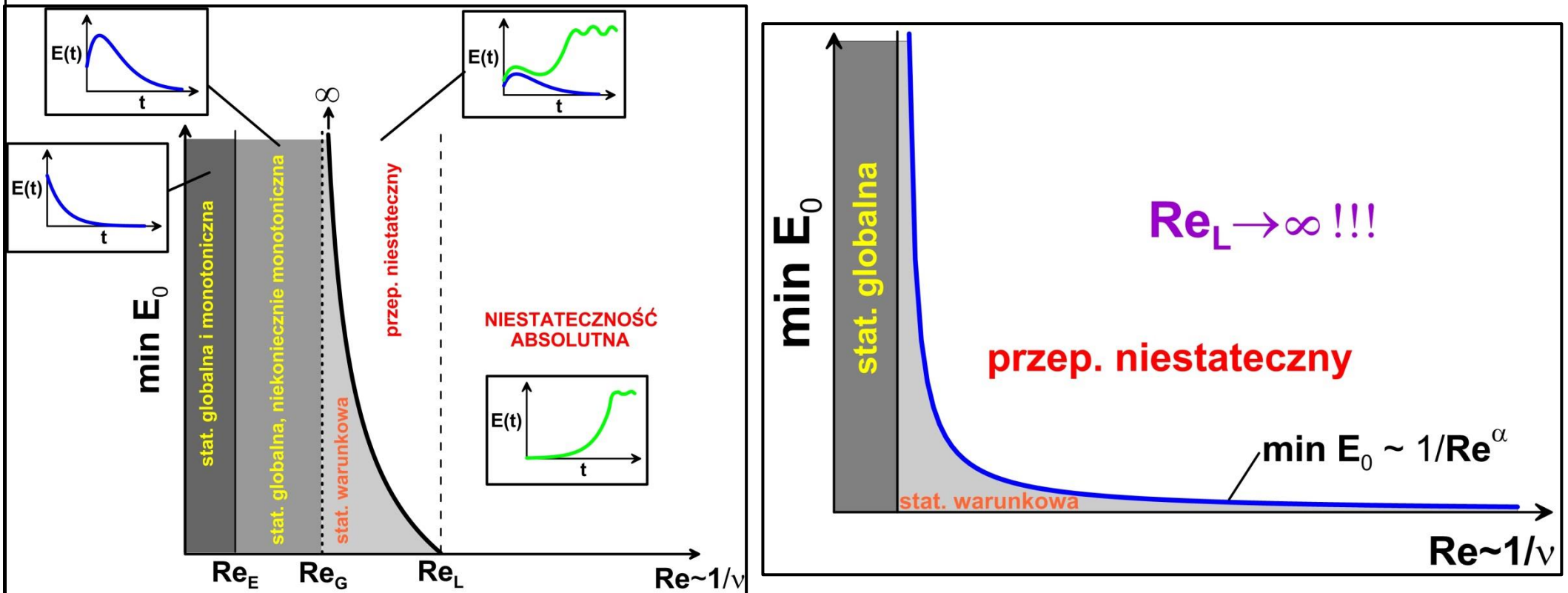
Globalna miara (energetyczna) różnicy pomiędzy tymi przepływami

$$E(t) = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \|\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)}\|^2 dV$$

Wielkość $E(0)$ jest znana - wynika z war. początkowych $\mathbf{v}^{(1)}(t=0)$ and $\mathbf{v}^{(2)}(t=0)$

Mówimy, że przepływ jest asymptotycznie stabilny, jeśli $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$

Obszary stabilności – schemat ogólny



Jeżeli $Re > Re_L$ to istnieje zaburzenie, które – bez względu na początkową wielkość – zawsze prowadzi do trwałej zmiany formy przepływu. Jest to sytuacja absolutnej niestabilności przepływu.

Dla pewnych przepływów $Re_L = \infty$ (np. przepływ Hagen-Poiseuille'a) !!!
 Pojawienie się przejścia w takiej sytuacji – mechanizm(y) typu „by-pass”.

Niech $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$ i $p = P + p'$, gdzie (\mathbf{V}, P) to przepływ bazowy, a (\mathbf{v}', p') to pole zaburzeń. Wstawiamy te formuły do równania ciągłości i równania ruchu (N-S). Składniki związane z samym przepływem bazowym ulegają redukcji (przepływ ten spełnia równania ciągłości i ruchu). Dalej, pomijamy w równaniu ruchu składniki zawierające iloczyny zaburzeń i/lub ich pochodnych (czyli **linearyzujemy** to równanie). Oto efekt ...

Równanie ciągłości dla pola zaburzeń	→	$\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0$
Zlinearyzowane równ. Naviera-Stokesa	→	$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta v'_i$
Zaburzenie prędkości na brzegu znika!	→	$v'_i _{\partial\Omega} = 0$

Otrzymaliśmy liniowy układ równań opisujących ewolucję pola małych zaburzeń w czasie i przestrzeni. Postać głównego równania układu zależy od pola prędkości przepływu bazowego \mathbf{V} .

W teorii stateczności względem małych zaburzeń szukamy:

- Formy zaburzeń początkowych charakteryzujących się największym wzmocnieniem z danym czasem. Powtarzając taką analizę dla różnych czasów otrzymujemy tzw. **obwiednię maksymalnego wzmocnienia**. Możemy też poszukiwać zaburzeń charakteryzujących się największym tempem wzmocnienia. Wyznaczanie najsilniej wzmocnianych zaburzeń początkowych jest zadaniem typu optymalizacyjnego. Okazuje się, że w wielu przepływach zaburzenia mogą być przejściowo bardzo wzmocniane mimo, że liczba Reynoldsa jest mniejsza niż krytyczna wartość Re_L .
- Formy tzw. modów normalnych, tj. zaburzeń charakteryzujących się harmoniczną/eksponencjalną zmiennością w czasie. Jeśli zbiór modów normalnych jest przeliczalny (nie zawsze tak jest) to dowolne pole zaburzeń można przedstawić jako ich sumę

$$u'_k(t, \mathbf{x}) = \sum_r A_r q_k^{(r)}(\mathbf{x}) e^{i\lambda_r t}, \quad p'(t, \mathbf{x}) = \sum_r A_r \beta^{(r)}(\mathbf{x}) e^{i\lambda_r t}$$

Ponieważ równania są liniowe, mody normalne ewoluują niezależnie. Po podstawieniu do równań pojedynczego modu otrzymamy ...

$$\frac{\partial q_j^{(r)}}{\partial x_j} = 0$$

$$i\lambda_r q_j^{(r)} + V_k \frac{\partial q_j^{(r)}}{\partial x_k} + q_k^{(r)} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \beta^{(r)}}{\partial x_j} + v \Delta q_j^{(r)}$$

$$q_j^{(r)} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

Niezerowe rozwiązania otrzymanego problemu brzegowego istnieją tylko dla pewnych wartości liczby λ_r . Zwana jest ona częstością własną modu i z reguły liczbą zespoloną

$$\lambda_r = \alpha_r + i\gamma_r$$

Wówczas

$$e^{i\lambda_r t} = \underbrace{\left(e^{i\alpha_r t} \right)}_{\substack{\text{oscylacja} \\ \text{harmoniczna}}} e^{-\gamma_r t} \quad \substack{\text{wzmocnienie} \\ \text{amplitudy}}$$

Warunkiem wystarczającym niestabilności przepływu jest, aby wielkość γ_r była ujemna!

Szczegółowe teorie niestabilności hydrodynamicznej rozwinięto dla różnych klas przepływów (przepływu równoległe i prawie-równoległe, przepływy w śladach wirowych, warstwach mieszania, przepływach wirujących itp. itd.).

PODSTAWY TEORII PRZEPLYWÓW TURBULENTNYCH

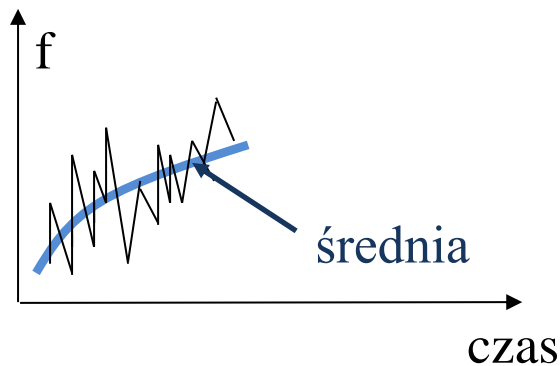
Podstawowe cechy fizyczne przepływów turbulentnych:

- Wszystkie parametry przepływu wykazują nieregularną (chaotyczną, quasi-losową) zmienność w czasie i przestrzeni. Chociaż turbulencja jest – wg współczesnych poglądów – zjawiskiem całkowicie deterministycznym, najbardziej adekwatnym (i praktycznym) podejściem jest zastosowanie teorii procesów/pól stochastycznych. W aplikacjach technicznych kluczowym jest zazwyczaj wyznaczenie wielkości uśrednionych.
- Przepływy turbulentne charakteryzują się zdolnością intensywnego mieszania. Efektywne współczynniki transportu masy/ciepła w tych przepływach przekraczają o kilka rzędów wielkości współczynniki molekularnej dyfuzji/przewodnictwa dla przepływów laminarnych.
- Turbulencja to zjawisko związane z nieliniową dynamiką (generacją, adwekcją i dyfuzją) wirowości w przepływie. „Prawdziwa” turbulencja jest zawsze trójwymiarowa, ponieważ tylko w 3D aktywny jest mechanizm rozciągania włókien wirowych (ang. vortex stretching) uważany za podstawowy mechanizm „napędzający” turbulencję i generujący chaotyczny ruch drobnoskalowy.
- Przepływy turbulentne cechuje obecność tzw. kaskady energii: duże struktury wirowe odbierają energię od przepływu średniego, mniejsze wiry „napędzane” są kosztem energii większych, a najmniejsze wirki „rozpływają” się wskutek (molekularnej) lepkości, tj. ich energia podlega bezpośredniej dyssypacji na ciepło. Proces ten ma pewne uniwersalne cechy opisane prostymi formułami potęgowymi (odkrytymi przez Kołmogorowa).

OPIS TURBULENCJI METODĄ UŚREDNIENIA REYNOLDSA

Procedura uśrednienia

Każda wielkość dynamiczna w przepływie turbulentnym może być przedstawiona jako suma jej wartości średniej (stałej lub wolno zmiennej) i fluktuacji w formie szybkich i nieregularnych (chaotycznych) oscylacji/pulsacji wokół wartości średniej. Tę drugą część uznajemy za całkowicie losową. Z założenia, uśrednianie zastosowane do pulsacji daje wartość zerową.



$$f = \bar{f} + f'$$

srednia pulsacja

$$\bar{f}' = 0$$

*srednia
z pulsacji*

$$\bar{f} = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(\tau) d\tau$$

Szerokość “okna uśredniania” musi być dostatecznie duża by odfiltrować szybko zmienne pulsacje turbulentne, ale na tyle mała, aby nie zgubić długofalowej zmienności przepływu.

Średnia wartość zależy od położenia i – jeśli przepływ średni jest niestacjonarny – również od czasu. Pochodne przestrzenne uśredniamy następująco:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{t-T}^{t+T} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \frac{\partial f(\tau)}{\partial x_i} d\tau = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}$$

Wniosek: pochodne przestrzenne wielkości średniej są równe uśrednionym pochodnym przestrzennym – operacja różniczkowania przestrzennego i operacja uśredniania Reynoldsa są przemienne!

Co z różniczkowaniem po czasie?

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-T}^{t+T} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2T} [f(t+T) - f(t-T)] = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau$$

Wniosek: różniczkowanie po czasie i uśrednianie Reynoldsa to też operacje przemienne!

Przedstawmy pola prędkości i ciśnienia jako sumy wartości średnich i pulsacji

$$v_i = \bar{v}_i + v_i'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

Podstawimy te wyrażenia do równania Naviera-Stokesa (przepływ nieściśliwy)”

$$\frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\bar{v}_i + v'_i)(\bar{v}_j + v'_j)] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \Delta(\bar{v}_i + v'_i)$$

i stosujemy procedurę uśredniania.

Po uproszczeniach otrzymujemy w efekcie **równanie Reynoldsa** (ang. równanie RANS, czyli Reynolds-Averaged Navier-Stokes)

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j) \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \Delta \bar{v}_i + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{v'_i v'_j})$$

Równanie RANS jest podobne formalnie do r-nia N-S, ale posiada dodatkowe człony, tj. $\frac{\partial}{\partial x_i} (-\overline{v'_i v'_j})$. Zauważmy też, że uśrednione pole prędkości spełnia warunek ciągłości $\nabla \cdot \bar{v} = 0$.

Wprowadźmy symetryczną wielkość tensorową, zwaną **tensorem Reynoldsa**

$$\overline{v'_i v'_j} = \overline{v'_j v'_i} = -R_{ij} = -R_{ji}$$

W przeciwieństwie do układu r-nie N-S plus warunek ciągłości, układ równanie Reynoldsa plus warunek ciągłości nie jest domknięty. Potrzebujemy „związku konstytutywnego”, który określi zależność składowych tensora Reynoldsa od uśrednionego pola prędkości. Taki (hipotetyczny) związek można zapisać w postaci

$$\mathbf{R} = \mathbf{R} \left(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}, \dots \right)$$

Hipotezą domknięcia nazywamy każdą konkretną propozycję formuł lub – częściej – procedury wyznaczania wartości tensora Reynoldsa na podstawie pola średniego.

Zauważmy, że możemy przedstawić tensor Reynoldsa jako sumę tensora sferycznego i dewiatora (Tr to operator śladu tensora)

$$R_{ij} = \frac{1}{3} Tr(\mathbf{R}) \delta_{ij} + \left(R_{ij} - \frac{1}{3} Tr(\mathbf{R}) \delta_{ij} \right)$$

Mamy przy tym równość

$$-Tr(\mathbf{R}) = \overline{v'_1 v'_1} + \overline{v'_2 v'_2} + \overline{v'_3 v'_3} = 2 \frac{\overline{v'_1 v'_1} + \overline{v'_2 v'_2} + \overline{v'_3 v'_3}}{2} = 2k$$

gdzie symbolem k oznaczyliśmy tzw. energię turbulencji. Zatem

$$Tr(\mathbf{R}) = -2k$$



$$R_{ij} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \left(R_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij} \right)$$

Dodatkowy „turbulentny” składnik w równaniu RANS może być zapisany wzorem

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{v'_i v'_j} \right) = \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^t$$

Równanie RANS przyjmuje postać

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i \bar{v}_j) \right] = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) + \mu \Delta \bar{v}_i + \frac{\partial T_{ij}^t}{\partial x_j}$$

W równaniu Reynoldsa pojawiły się następujące wielkości

$$p_t = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho \kappa$$



Ciśnienie turbulentne

$$T_{ik}^t = R_{ik} + \frac{2}{3} \kappa \delta_{ik}$$



Tensor naprężeń turbulentnych

Zauważmy, że tensor naprężeń turbulentnych oraz uśredniony tensor prędkości deformacji

$$\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right)$$

mają zerowe ślady.

Wobec tego dopuszczalne jest (matematycznie) postawienie hipotezy (powszechnie zaakceptowanej w zastosowaniach inżynierskich): istnieje pole skalarne tzw. lepkości turbulentnej μ_{turb} takie, że

$$\mathbf{T}^t = 2\mu_{turb} \cdot \bar{\mathbf{D}}$$

W składowych ...

$$T_{ik}^t = \mu_{turb} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right)$$

Zauważmy, że μ_{turb} to wielkość charakteryzująca przepływ, a nie własność fizyczna płynu!

Jeśli założyć, że lepkość turbulentna μ_{turb} została wyrażona przez wielkości uśrednione, to układ równań opisujący ruch średni ma postać

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i \bar{v}_j) \right] = -\frac{\partial}{\partial x_i} p_{turb} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\mu + \mu_{turb}) \bar{D}_{ij}] \end{cases}$$

Jak określić lepkość turbulentną ?

Klasyfikacja modeli domknięcia, czyli procedur pozwalających wyznaczyć pole lepkości turbulentnej, jest oparta na liczbie i rodzaju dodatkowych związków dołączonych do podanego wyżej układu równań. I tak, mamy:

- Modele 0-równaniowe: dołączone są wyłącznie pewne związki algebraiczne. Modele te wywodzą się z tzw. teorii drogi mieszania, zaproponowanej przez Prandtla. Modele te mają bardzo ograniczone zastosowanie, problematyczna jest również ich dokładność, dlatego praktycznie wyszły z użycia.
- Modele 1-równaniowe: dołączone jest równanie transportu lepkości turbulentnej plus pewne związki algebraiczne. Równanie transportu jest de facto postulowane ad hoc, oczywiście na podstawie pewnych rozważań i argumentów fizycznych. Popularnym modelem stosowanym w obliczeniach aerodynamicznych jest model Spalarta-Allmarasa.
- Modele 2-równaniowe: dołączone są dwa równania transportu, na podstawie których obliczane jest (algebraicznie) pole lepkości turbulentnej. Przykładem takiej modelu jest słynna metoda $k - \varepsilon$ i jej rozmaite ulepszenia. W metodzie tej postuluje się dwa dodatkowe równania transportu: dla energii turbulentnej k i pola dyssypacji energii turbulentnej ε . Lepkość turbulentna jest obliczana ze wzoru $\mu_{turb} = C \rho k^2 / \varepsilon$, gdzie C to odpowiednio dobrana stała modelu.