

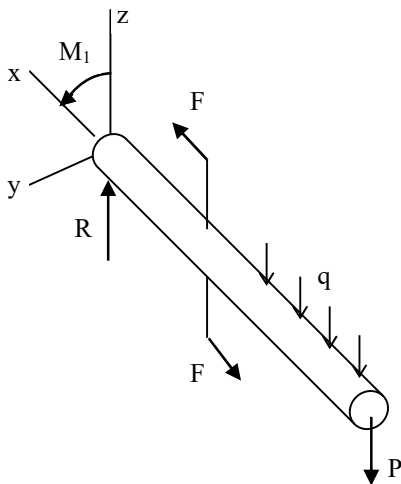
ZGINANIE PRĘTÓW

1. Wstęp teoretyczny - zginanie płaskie .

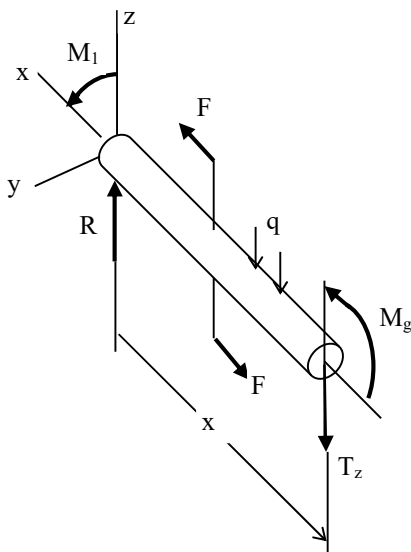
Przypadek gdy oś obciążonej belki przyjmuje kształt linii płasko zakrzywionej nazywa się płaskim zginaniem . Odpowiada to stałemu położeniu płaszczyzny wypadkowego momentu gnącego i wypadkowej siły tnącej na całej długości osi . Następnie jeśli ta płaszczyzna zawiera jedną z osi głównych przekroju , zginanie nazywa się zginaniem prostym . Jeśli powyższy warunek nie jest spełniony – zginaniem ukośnym .

1.1. Zginanie proste .

Belka poddana jest wyłącznie zginaniu prostemu w przypadku obciążenia jej układem sił dających tylko niezerowy wypadkowy moment względem osi „y” i niezerową siłę na kierunku „z” (rys. 1). Takie obciążenie daje w dowolnym przekroju myślowym tylko moment gnący M_y i siłę tnącą T_z (rys. 2) .



Rys. 1. Przykładowe obciążenie belki zginanej .



Rys. 2. Statyka części belki po myślowym przecięciu .

Rysunek 2 wskazuje metodykę wyznaczania w dowolnym przekroju „x” wielkości M_y i T_z korzystając z koncepcji myślowego przecięcia. Można zatem uważać M_y i T_z za funkcje jednej zmiennej „x”. Łatwo też wyprowadzić zachodzący między nimi uniwersalny związek :

$$T_z = \frac{dM_y}{dx} \quad (1)$$

Dodatkowo :

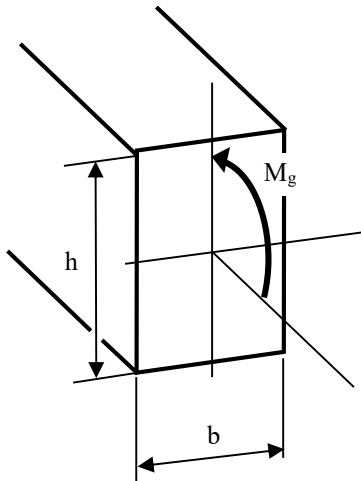
$$-q = \frac{dT_z}{dx} \quad (2)$$

W dalszym ciągu stosowane będą inne oznaczenia :

$$M_g = M_y \quad \text{i} \quad T = T_z .$$

Z zależności (1) wynika szczególny przypadek , gdy $T(x) = 0$ a $M_g = \text{const.}$ w pewnym przedziale lub na całej długości belki . Wtedy zginanie nazywa się zginaniem czystym .

Przytoczone poniżej związki teoretyczne opisują ściśle przypadek zginania czystego .



Rys. 3. Czyste zginanie .

1.2. Zginanie czyste – opis teoretyczny .

1.2.1 Pole przemieszczeń .

Przekroje poprzeczne pręta pozostają po obciążeniu płaskie (nie występuje zjawisko deplanacji) i obracają się wokół osi obojętnej pręta o kąt $\theta(x)$, pozostając prostopadłe do zakrzywionej osi belki - obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów. Przemieszczenie środka ciężkości przekroju opisane jest składową „w” w kierunku z. Przemieszczenie pionowe dowolnego punktu przekroju leżącego w odległości z od osi obojętnej $w(z) = w$ a składowa pozioma $u(z)$ w kierunku „x” jest pomijalnie mała . Zachodzą związki :

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} \quad \text{i} \quad u(z) = -\theta \cdot z , \quad \text{z których wynika , że jedyną niewiadomą funkcją jest}$$

funkcja ugięcia $w(x)$ osi belki . Pozostałe przemieszczenia i obroty wynikają z powyższych związków .

1.2.2. Deformacja belki zginanej .

Deformacja w przekroju opisana jest następującym prawem :

$$\kappa = \frac{M_g}{EI_y} \quad (3)$$

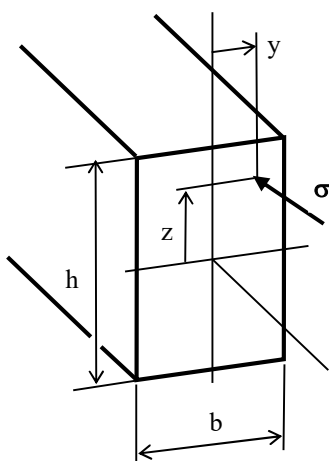
gdzie :

- M_g - moment gnący w przekroju ,
- κ - krzywizna osi belki ,
- E - moduł Younga ,
- I_y - osiowy moment bezwładności .

Krzywizna płaskiej linii wyraża się wzorem : $\kappa = \frac{w''}{(1+(w')^2)^{3/2}}$ (4)

Dla małych w i w' wzór na krzywiznę upraszcza się do postaci : $\kappa = w''$ (4a)
obowiązującej w całym kursie wytrzymałości konstrukcji . W szczególności po wstawieniu (4a) do wzoru (3) , dwukrotnym scałkowaniu i wyznaczeniu stałych całkowania z odpowiednich warunków brzegowych dostaje się wyrażenie na funkcję ugięcia $w(x)$.

1.2.3. Rozkład naprężeń w przekroju .



Rys. 4. Stan naprężenia przy czystym zginaniu .

Jednoosiowy stan naprężenia opisuje się jedną składową σ oznaczaną jako σ_g .

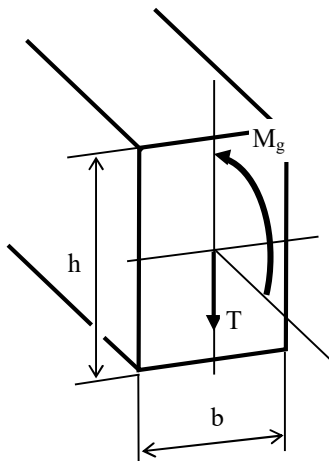
Z warunku równoważności wynika ścisły wzór opisujący rozkład naprężeń normalnych w przekroju :

$$\sigma_g(z) = -\frac{M_g}{I_y} \cdot z \quad , \quad z \in (z_{\min} , z_{\max}) \quad (5)$$

gdzie :

- M_g – moment gnący w przekroju ,
- z - współrzędna pionowa punktu w przekroju ,
- I_y - osiowy moment bezwładności , który np. dla przekroju prostokątnego wyraża się wzorem :
 $I_y = b \cdot h^3 / 12$.

1.3. Zginanie poprzeczne .



Rys. 5. Zginanie poprzeczne .

1.3.1 Pole przemieszczeń .

Przekroje poprzeczne pręta nie są po obciążeniu płaskie (występuje zjawisko deplanacji) po obrocie wokół osi obojętnej o kąt θ_{sr} nie są prostopadłe do zakrzywionej osi belki – nie obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów. Niemniej jednak stosuje się związki przemieszczeniowe dla zginania czystego . Przemieszczenie środka ciężkości przekroju opisane jest składową „w” w kierunku z. Przemieszczenie pionowe dowolnego punktu przekroju leżącego w odległości z od osi obojętnej $w(z) = w$ a składowa pozioma $u(z)$ w kierunku „x” jest pomijalnie mała . Zachodzą związki :

$\theta(x) = \frac{dw}{dx}$ i $u(z) = -\theta \cdot z$, z których wynika , że jedyną niewiadomą funkcją jest funkcja ugięcia $w(x)$ osi belki . Pozostałe przemieszczenia i obroty wynikają z powyższych związków .

1.3.2. Deformacja belki przy zginaniu poprzecznym .

Deformacja w przekroju opisana jest identycznie jak dla zginania czystego :

$$\kappa = \frac{M_g}{EI_y} \quad (6)$$

gdzie :

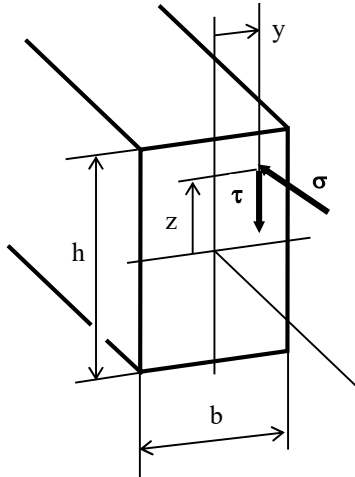
- M_g - moment gnący w przekroju ,
- κ - krzywizna osi belki ,
- E - moduł Younga ,
- I_y - osiowy moment bezwładności .

Krzywizna płaskiej linii wyraża się wzorem : $\kappa = \frac{w''}{(1+(w')^2)^{3/2}}$ (7)

Dla małych w i w' wzór na krzywiznę upraszcza się do postaci : $\kappa = w''$ (7a)
obowiązującej w całym kursie wytrzymałości konstrukcji . W szczególności po wstawieniu (4a) do wzoru (3) , dwukrotnym scałkowaniu i wyznaczeniu stałych całkowania z odpowiednich warunków brzegowych dostaje się wyrażenie na funkcję ugięcia $w(x)$.

Uwaga . W podstawowym kursie Wytrzymałości Konstrukcji pomija się wpływ ścinania ($T \neq 0$) w procesie wyznaczania linii ugięcia .

1.3.3. Rozkład naprężeń w przekroju .



Rys. 6. Stan naprężenia przy zginaniu poprzecznym .

Złożony stan naprężenia opisuje się jedną składową normalną σ_g i jedną styczną τ_T . Wzór opisujący rozkład naprężeń normalnych w przekroju ma postać jak dla zginania czystego :

$$\sigma_g(z) = -\frac{M_g}{I_y} \cdot z \quad , \quad z \in (z_{\min}, z_{\max}) \quad (8)$$

gdzie :

- M_g – moment gnący w przekroju ,
- z - współrzędna pionowa punktu w przekroju ,
- I_y - osiowy moment bezwładności , który np. dla przekroju prostokątnego wyraża się wzorem :
- $I_y = b \cdot h^3 / 12$.

Rozkład składowej stycznej τ_T daje przybliżony wzór :

$$\tau_T(z) = \frac{T \cdot S_y^z}{I_y \cdot b_z} \quad (9)$$

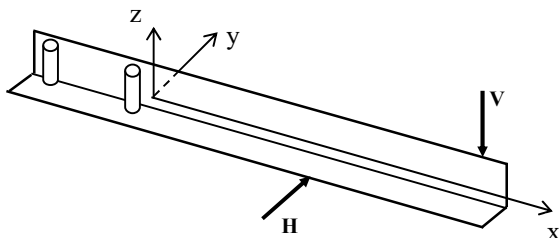
gdzie : S_y^z jest momentem statycznym części przekroju powyżej poziomu z ,
 b_z jest szerokością przekroju na poziomie z .

Rozkład ten można uważać za ścisły dla przekroju wąskiego prostokąta ($b \ll h$) i po odpowiednich przekształceniach przyjmuje postać :

$$\tau_T(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{b \cdot h} \cdot \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad (10)$$

1.4. Zginanie ukośne .

Przypadek gdy płaszczyzna momentu gnącego nie zawiera żadnej z głównych osi bezwładności przekroju nazywa się zginaniem ukośnym . Przykładowe zadanie zginania ukośnego dla belki o przekroju kątownika nierównoramiennego zaprezentowano na rys. 7.



Rys. 7. Zginanie ukośne .

Przytoczone poniżej wzory teoretyczne opisują zginanie ukośne względem niegłównych osi bezwładności przekroju y i z (rys. 8) .

1.4.1. Pole przemieszczeń .

Rozpatruje się dwie niezależne funkcje ugięcia w i v w dwóch płaszczyznach odpowiednio xz i xy wyznaczonych przez niegłówne osie z i y .

Przemieszczenie środka ciężkości przekroju opisane jest składową „w” w kierunku z i składową v w kierunku y .

Przemieszczenie pionowe dowolnego punktu przekroju leżącego w odległości z od osi y : $w(z) = w$ a związana z nim składowa pozioma $u^z(z)$ w kierunku „x” jest pomijalnie mała .

Zachodzą związki :

$$\theta^z(x) = \frac{dw}{dx} \quad \text{i} \quad u^z(z) = -\theta^z \cdot z \quad , \text{ z których wynika , że jedyną niewiadomą funkcją w}$$

płaszczyźnie zx jest funkcja ugięcia w(x) osi belki . Pozostałe przemieszczenia i obroty wynikają z powyższych związków .

Przemieszczenie poziome dowolnego punktu przekroju leżącego w odległości y od osi z : $v(z) = v$ a związana z nim składowa pozioma $u^y(z)$ w kierunku „x” jest pomijalnie mała .

Zachodzą związki :

$$\theta^y(x) = \frac{dv}{dx} \quad \text{i} \quad u^y(z) = -\theta^y \cdot y \quad , \text{ z których wynika , że jedyną niewiadomą funkcją jest}$$

funkcja ugięcia w(x) osi belki . Pozostałe przemieszczenia i obroty wynikają z powyższych związków .

1.4.2. Deformacja przy zginaniu ukośnym .

Deformacja w przekroju opisana jest oddzielnie w płaszczyznach zx i yx następującymi zależnościami :

$$\kappa_z = \frac{\mathfrak{R}_y}{EI_y} \quad (11a)$$

$$\text{i} \quad \kappa_y = \frac{\mathfrak{R}_z}{EI_z} \quad (11b)$$

gdzie :

- \mathfrak{R}_y - fikcyjny moment gnący w przekroju w płaszczyźnie zx ,
- κ_z - krzywizna osi belki w płaszczyźnie zx ,
- I_y - moment bezwładności względem osi y ,
- \mathfrak{R}_z - fikcyjny moment gnący w przekroju w płaszczyźnie yx ,
- κ_y - krzywizna osi belki w płaszczyźnie yx ,
- I_z - osiowy moment bezwładności względem osi z ,
- E - moduł Younga .

Fikcyjne momenty gnące związane są z momentami gnącymi M_y i M_z wzorami :

$$\mathfrak{R}_y = \kappa(M_y - M_z \frac{I_{yz}}{I_z}) , \quad \mathfrak{R}_z = \kappa(M_z - M_y \frac{I_{yz}}{I_y}) , \quad \frac{1}{\kappa} = 1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y \cdot I_z} \quad (11c)$$

Krzywizna płaskiej linii ugięcia w płaszczyźnie zx wyraża się wzorem :

$$\kappa_z = \frac{w''}{(1 + (w')^2)^{3/2}} \quad (12)$$

Dla małych w i w' wzór na krzywiznę upraszcza się do postaci :

$$\kappa_z = w'' \quad (12a)$$

W szczególności po wstawieniu (12a) do wzoru (11a) , dwukrotnym scałkowaniu i wyznaczeniu stałych całkowania z odpowiednich warunków brzegowych dostaje się wyrażenie na funkcję ugięcia $w(x)$.

Podobnie krzywizna również płaskiej linii ugięcia w płaszczyźnie yx wyraża się wzorem :

$$\kappa_y = \frac{v''}{(1 + (v')^2)^{3/2}} \quad (13)$$

Dla małych v i v' wzór na krzywiznę upraszcza się do postaci :

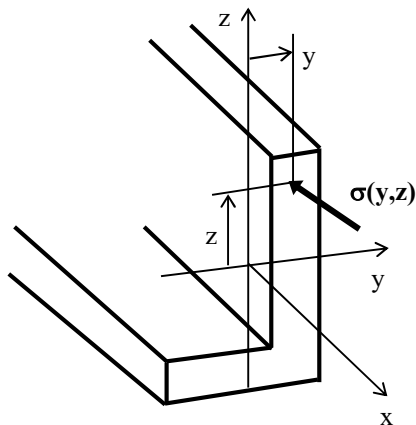
$$\kappa_y = v'' \quad (13a)$$

W szczególności po wstawieniu (13a) do wzoru (11b) , dwukrotnym scałkowaniu i wyznaczeniu stałych całkowania z odpowiednich warunków brzegowych dostaje się wyrażenie na funkcję ugięcia $v(x)$.

Ostatecznie wypadkowe ugięcie w przekroju x oblicza się dodając geometrycznie ugięcia składowe :

$$f = \sqrt{w^2 + v^2} \quad (14)$$

1.4.3. Rozkład naprężeń w przekroju .



Rys. 8. Naprężenia normalne przy zginaniu ukośnym .

Naprężenie normalne przy zginaniu ukośnym w punkcie o współrzędnych (y,z) opisuje się wzorem (patrz rys. 8) :

$$\sigma_g(y,z) = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad (15)$$

Położenie osi obojętnej przekroju opisane jest równaniem prostej w postaci :

$$z = -\frac{I_y}{I_z} \frac{M_z}{M_y} y \quad (16)$$

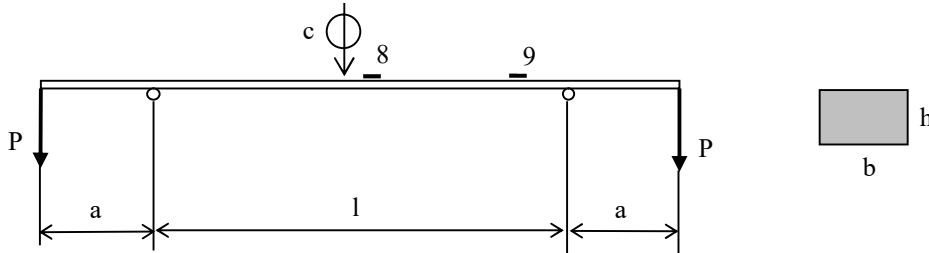
Wyznaczanie ekstremalnych naprężeń normalnych nie sprawia większych problemów . Nietrudno bowiem wytypować punkty przekroju najbardziej odległe od osi obojętnej i podstawić ich współrzędne (y, z) do wzoru 15 .

1. Cel ćwiczenia .

Celem ćwiczenia jest weryfikacja doświadczalna podstawowych praw i zasad wytrzymałości konstrukcji oraz poszerzenie wiadomości o pracy konstrukcji prętowych na zginanie . Bada się różne rodzaje zginania , tzn. zginanie proste : czyste i poprzeczne oraz zginanie ukośne . Zastosowane techniki laboratoryjne to czujnik zegarowy i tensometria . Jeden konkretny pomiar może służyć do realizacji odrębnych punktów sprawozdania .

2. Zginanie czyste.

2.1. Opis stanowiska . Schemat stanowiska pokazano na rys. 1 .



Rys. 1.

Belka spoczywa na dwóch przegubowych symetrycznie rozstawionych w odległości „l” podporach . Na końcach belki zawieszają się takie same obciążniki P . Wtedy w obszarze między podporami zginanie jest czyste . Przekrój jest prostokątem o wymiarach $b \times h$. Wszelkie dane geometryczne i materiałowe dostępne są na stanowisku . Dokładnie w środku długości zamontowano czujnik „c”, tuż obok tensometr nr 8 a w dowolnie wybranym między podporami przekroju tensometr nr 9 .

2.2. Wykonanie ćwiczenia .

a) zapisać w tabeli 1 dane geometryczne i materiałowe belki ,

Tabela 1

l.p.	l	a	E	b	h	A	I_y	W_y	EI_y
	mm	mm	MPa	mm	mm	mm ²	mm ⁴	mm ³	Nmm ²

b) zapisać w tabeli 2 wskazanie c_i odczytane z czujnika zegarowego dla obciążeń ($i=0,1,2,\dots$) a wskazania ε_i z pomiarów tensometrycznych dla obciążeń ($i=1,2,\dots$) .

Tabela 2

i	P	c_i	$f_C = c_i - c_0$	ε_i (tens 8)	ε_i (tens 9)
	N	mm	mm	‰	‰
0	0		---	---	---
1					
2					
3					

2.3. Opracowanie wyników .

2.3.1. W kolumnie czwartej tabeli 2 wstawić obliczoną strzałkę ugięcia f_C dla kolejnych obciążeń .

2.3.2. Wyznaczyć wartość doświadczalną modułu Younga na podstawie pomiaru

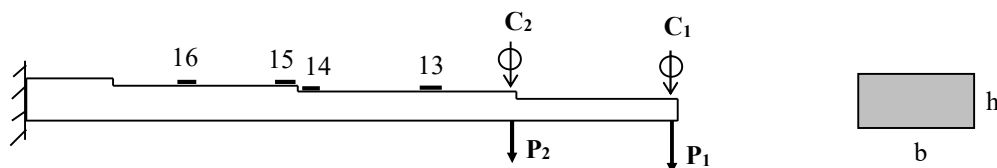
a) czujnikowego , b) tensometrycznego dla wskazanego obciążenia i porównać z wielkością tablicową . Obliczyć błąd względny .

2.3.3. Wyznaczyć wartość doświadczalną krzywizny osi belki na podstawie pomiaru a) czujnikowego, b) tensometrycznego dla wskazanego obciążenia i porównać z wielkością teoretyczną. Obliczyć błąd względny.

2.3.4. Porównać zmierzoną wartość strzałki ugięcia f_C dla wskazanego obciążenia z wielkością teoretyczną wyznaczoną dowolną metodą. Obliczyć błąd względny.

3. Zginanie poprzeczne.

3.1. Opis stanowiska. Schemat stanowiska pokazano na rys. 2.



Rys. 2.

Belkę utwierdzoną na jednym końcu obciąża się siłami skupionymi P_1 i P_2 – osobno lub równocześnie. Skokowo zmienny przekrój jest prostokątem o wymiarach $b \times h$. Wszelkie dane geometryczne i materiałowe dostępne są na stanowisku. W dwóch obciążanych przekrojach zamontowano czujniki „c₁” i „c₂”. W określonych przekrojach naklejujono tensometry „13”, „14”, „15” i „16”.

3.2. Wykonanie ćwiczenia.

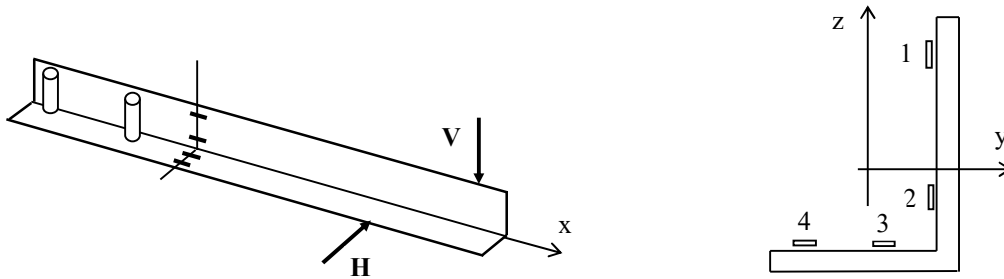
- zaznaczyć na szkicu w protokole pomiarowym wszelkie dane geometryczne,
- wykonać pomiary czujnikowe dla obciążeń P_1 i P_2 zadanych osobno i równocześnie i zapisać wyniki w tabeli,
- wykonać pomiary tensometryczne dla serii obciążeń siłą P_1 i zapisać wyniki w tabeli.

3.3. Opracowanie wyników.

- zweryfikować zasadę superpozycji korzystając z wyników pomiarów punktu 3.2.b),
- zweryfikować zasadę Bettiego korzystając z wyników pomiarów punktu 3.2.b),
- zweryfikować zgodność naprężeń doświadczalnych w przekroju „13” (punkt 3.2.c) z wartością teoretyczną,
- zweryfikować zgodność naprężeń doświadczalnych w przekroju „16” (punkt 3.2.c) z wartością teoretyczną,
- zweryfikować zasadę de Saint Venanta porównując naprężenia doświadczalne w przekroju „14” (punkt 3.2.c) z wartością teoretyczną,
- zweryfikować zasadę de Saint Venanta porównując naprężenia doświadczalne w przekroju „15” (punkt 3.2.c) z wartością teoretyczną,
- wyznaczyć moduł Younga na podstawie pomiarów tensometrycznych (p. 3.2.c) w przekroju „13” dla serii zadanych obciążeń i porównać z wartością tablicową,
- wyznaczyć moduł Younga na podstawie pomiarów tensometrycznych (p. 3.2.c) w przekroju „16” dla serii zadanych obciążeń i porównać z wartością tablicową,
- wyznaczyć błąd względny i omówić przyczyny niezgodności porównywanych wyników dla wszystkich podpunktów a) – h).

4. Zginanie ukośne .

4.1. Opis stanowiska . Schemat stanowiska pokazano na rys. 3 .



Rys. 3.

Belkę podpartą przegubowo w dwóch przekrojach obciąża się siłami skupionymi : pionową V i poziomą H – osobno lub równocześnie . Przekrój jest kątownikiem nierównoramiennym . W jednym z nich naklejono tensometry o numerach 1 - 5 (otensometrowany przekrój pokazano na rys. 3) . Wszelkie dane geometryczne i materiałowe dostępne są na stanowisku .

4.2. Wykonanie ćwiczenia .

- zaznaczyć na szkicu w protokole pomiarowym wszelkie dane geometryczne ,
- wykonać pomiary tensometryczne dla serii zadanych obciążeń i zapisać wyniki w tabeli .

4.3. Opracowanie wyników .

- 4.3.1. Wyznaczyć odkształcenia w punktach pomiarowych .
- 4.3.2. Wyznaczyć wartości doświadczalne naprężeń .
- 4.3.3. Wyznaczyć i narysować rozkłady naprężeń teoretycznych na dwóch otensometrowanych krawędziach przekroju .
- 4.3.4. Na tle wykresu teoretycznego nanieść wartości doświadczalne naprężeń .
- 4.3.5. Porównać wartości doświadczalne i teoretyczne naprężeń w miejscach naklejenia tensometrów , wyznaczyć błąd względny .
- 4.3.6. Na wykresie teoretycznym naprężeń zaznaczyć oś obojętną zginania ukośnego .