

# *Wytrzymałość konstrukcji 1*

## Wykład 6

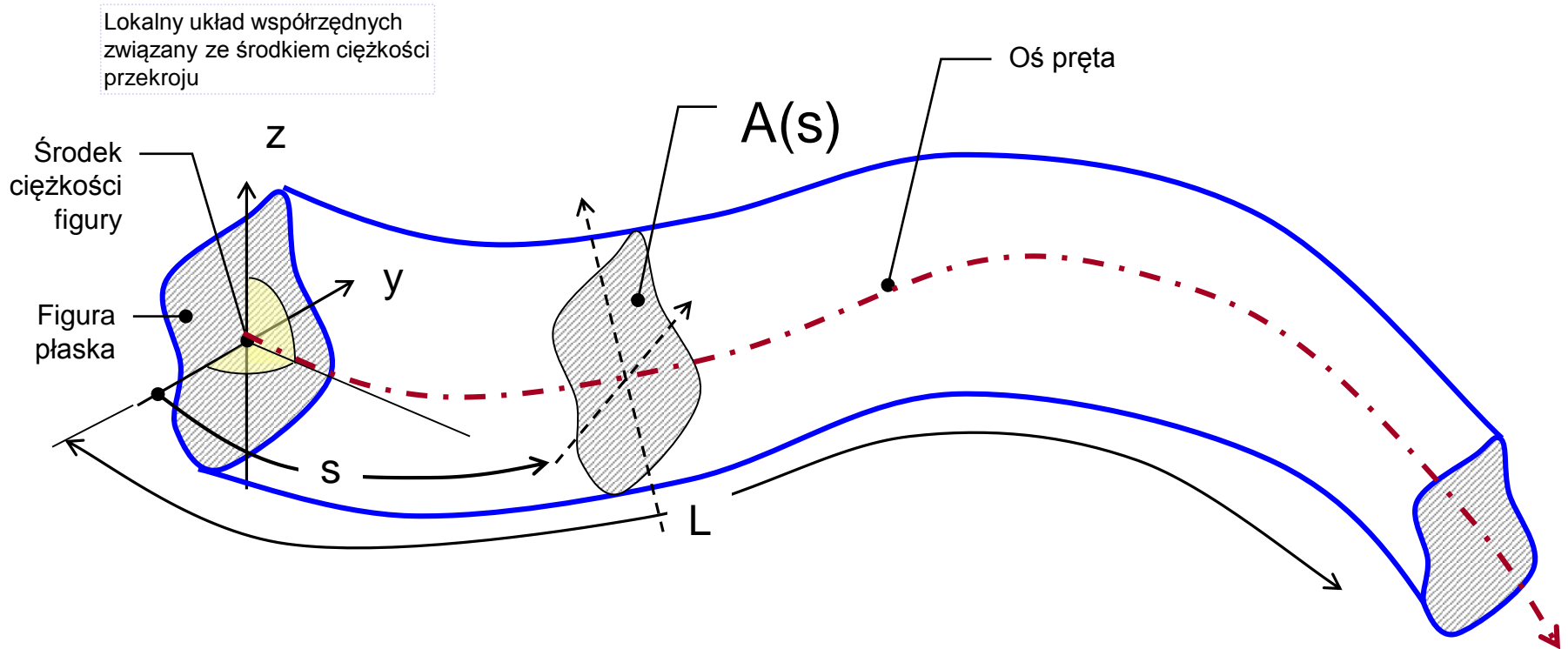
# Wytrzymałość pręta

Siły wewnętrzne w pręcie

Zasada de Saint Venanta

Pręty ściskane i rozciągane

# Definicja pręta

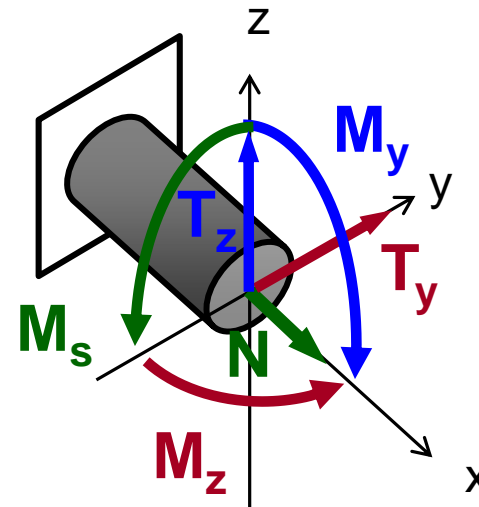
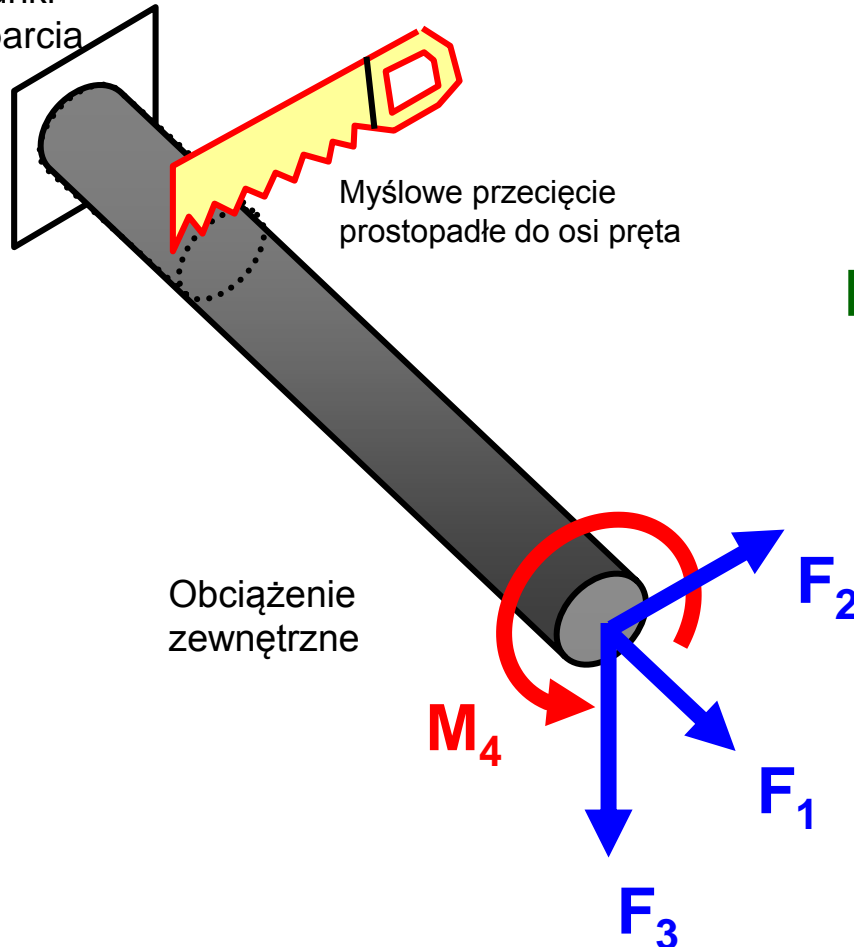


**Pręt** to bryła, która powstaje w wyniku przesuwania figury płaskiej (*przekroju poprzecznego*) wzdłuż linii prostej lub zakrzywionej (*osi pręta*) tak, by środek ciężkości figury zawsze pozostawał na tej osi, a płaszczyzna figury była do niej prostopadła.

Jeśli figura płaska nie obraca się w trakcie przesuwania, to jest to **pręt pryzmatyczny**, jeśli dodatkowo nie zmienia się kształt i wymiary figury to jest to **pręt o stałym przekroju**.

# Siły wewnętrzne w pręcie

Warunki podparcia



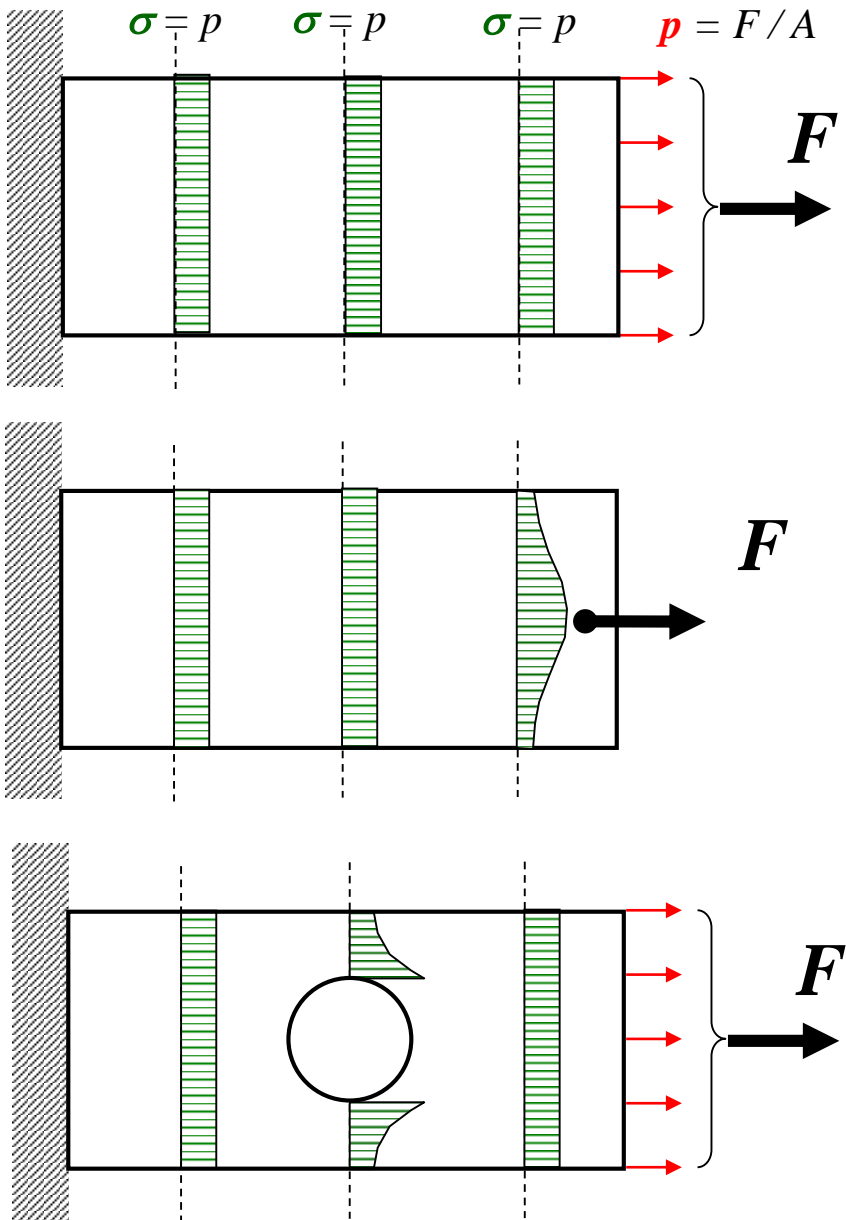
Lokalny układ współrzędnych przekroju związany z jego osiami centralnymi

Składowe wysiłku przekroju:

- $N$  - siła normalna
- $T_y$  - składowa siły tnącej
- $T_z$  - składowa siły tnącej
- $M_s$  - moment skręcający
- $M_y$  - składowa momentu gnącego
- $M_z$  - składowa momentu gnącego

Funkcje rozkładu składowych wysiłku przekroju w konstrukcji prętowej wzdłuż kolejnych prętów będziemy wyznaczać z równań równowagi myślowo wyciętego jej fragmentu odpowiednią płaszczyzną myślowego przecięcia

# Zasada de Saint Venanta

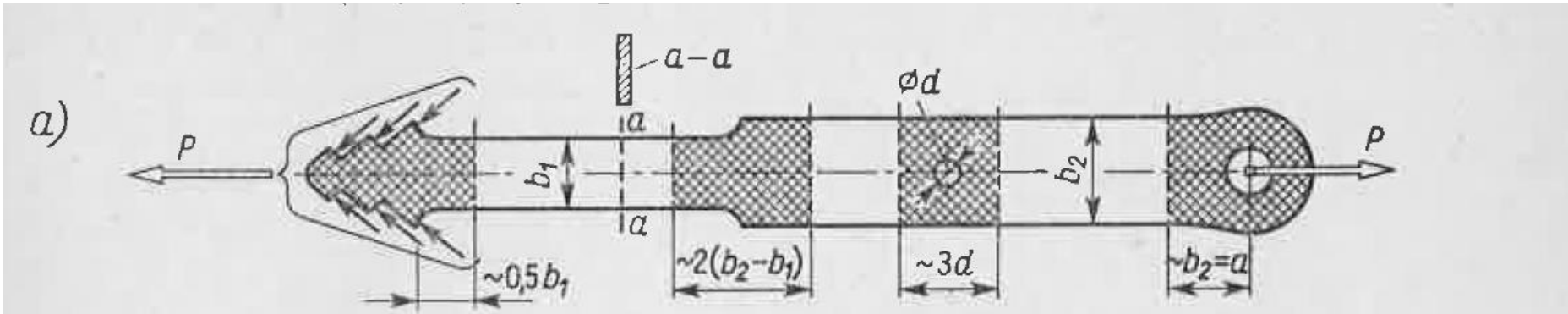


Rozważmy cieką tarczę prostokątną umocowaną jednym końcem i obciążoną równomiernie na przeciwnym brzegu siłą rozciągającą  $F$

Jeżeli na pewien niewielki fragment ciała sprężystego działają dwa różne, ale statycznie równoważne obciążenia, to w odległościach dużych w porównaniu do gabarytu tego fragmentu powstają praktycznie takie same stany naprężenia i odkształcenia.

# Zasada de Saint Venanta

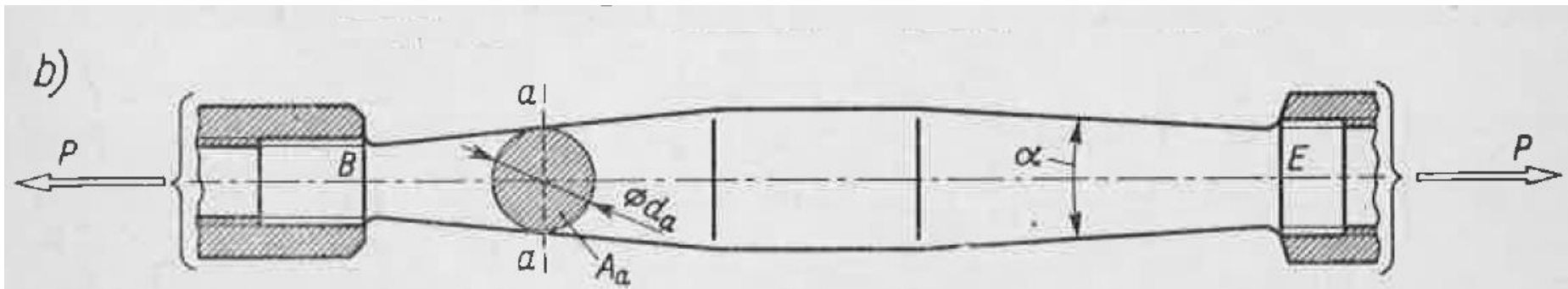
Przedziały stosowalności modelu pręta do rzeczywistych elementów obciążonych siłami wzdłużnymi.



Nierównomierność rozkładu naprężeń  $\sigma$  obserwujemy w przypadku raptownych zmian przekroju, tzw. karbów (np. raptowne zwężenia lub otwory).

Nierównomierność ta ogranicza się do otoczenia karbu (zakratkowane obszary), w których nie można stosować prostych wzorów WK.

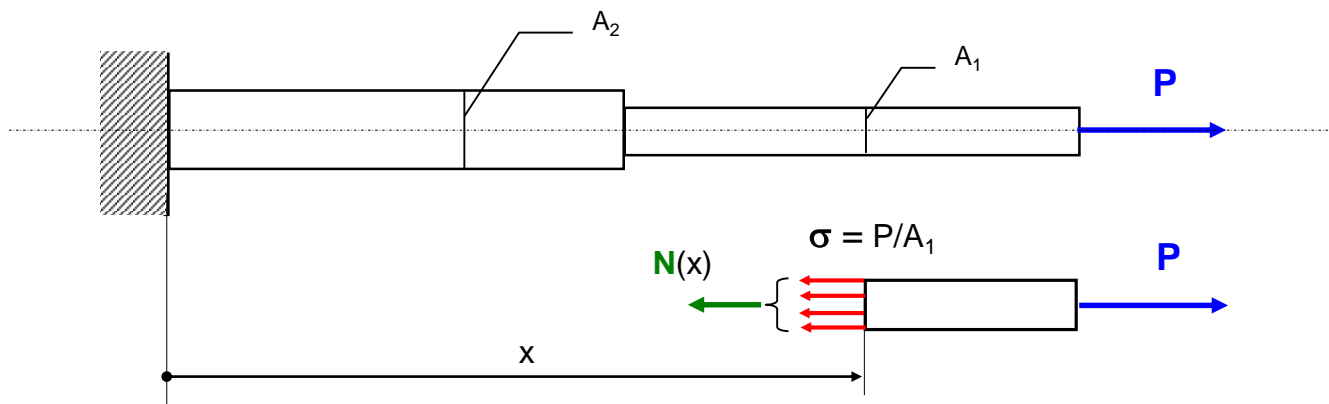
Wzory analityczne WK możemy stosować poza zakratkowanymi obszarami.



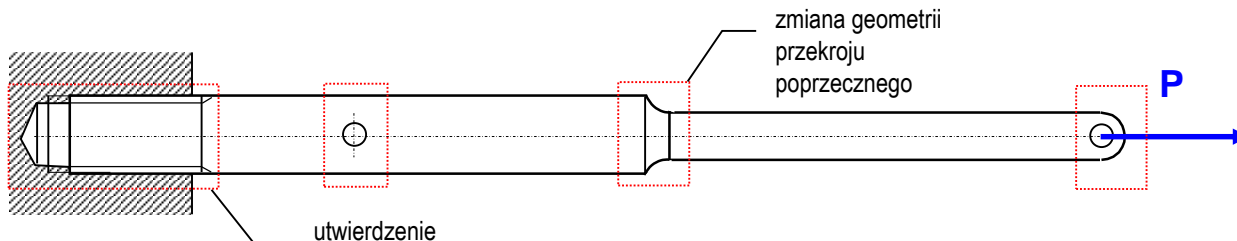
Zasada de Sait-Venanta pozwala na idealizację w budowie prostych modeli obliczeniowych dla różnych elementów konstrukcji.

# Pręty rozciągane i ściskane

W modelu pręta idealnego obciążonego siłami wzdłużnymi zakładamy równomierny rozkład naprężeń normalnych w całym przekroju myślowego przecięcia

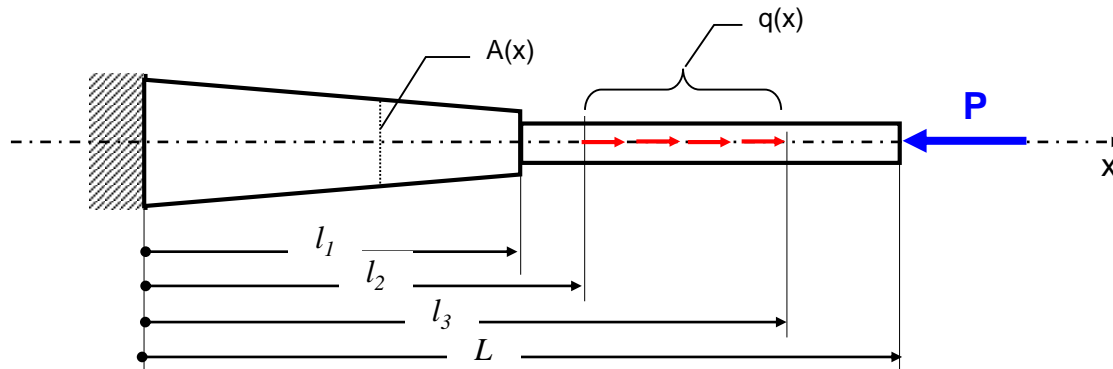


Rzeczywiste pręty wykazują odstępstwa od tego modelu w takich obszarach jak miejsca wprowadzenia siły, miejsca skokowej zmiany geometrii przekroju, utwierdzenia, strefy kontaktu. Zgodnie z zasadą de Saint Venanta, model pręta idealnego jest słuszny poza takimi obszarami

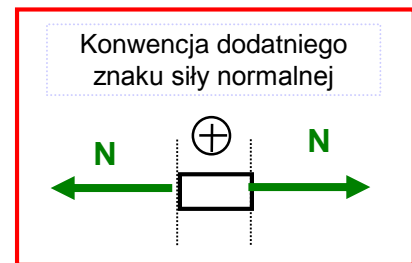
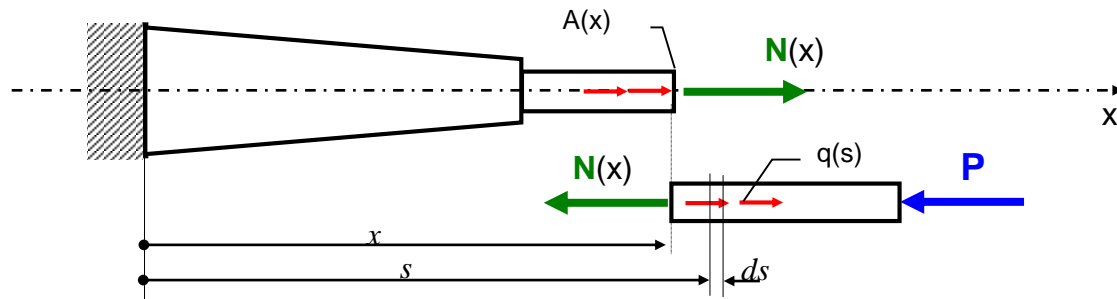


# Podstawowe zależności dla pręta obciążonego siłami osiowymi

Rozważmy model pręta prostego poddany działaniu sił osiowych



Interesującą nas zmienność siły normalnej wzdłuż długości pręta wyznaczmy **analizując równowagę myślowo odciętego fragmentu pręta**. Musimy przy tym rozważyć kilka myślowych przecięć stosownie do charakteru zmienności funkcji  $N(x)$ . Dla przykładu wyznaczmy równowagę fragmentu pręta po dokonaniu myślowego cięcia w przedziale  $x \in (l_2, l_3)$ .



Obie części pręta przeciętego płaszczyzną myślową są w stanie równowagi. Poszukiwaną wartość siły normalnej  $N(x)$  znajdziemy analizując równowagę na kierunku  $x$  jednej z tych części. Jak widać analiza równowagi części na prawo od przecięcia nie wymaga znajomości reakcji w miejscu utwierdzenia. Zapiszmy dla niej równanie równowagi sił w rzucie na oś  $x$ . Warto zauważyć, że o ile zwrot siły normalnej  $N(x)$  przyjęto jako dodatni (rozciąganie) to w równaniu równowagi siły przyjmują znaki, jako wektory, zgodnie ze swoim zwrotem względem osi  $x$ . Mamy zatem:

$$-N(x) + \int_x^{l_3} q(s) ds - P = 0$$

# Podstawowe zależności dla pręta obciążonego siłami osiowymi

Podobnie postąpimy we wszystkich przedziałach:

dla  $x \in (l_3, L)$ :  $-N(x) - P = 0$

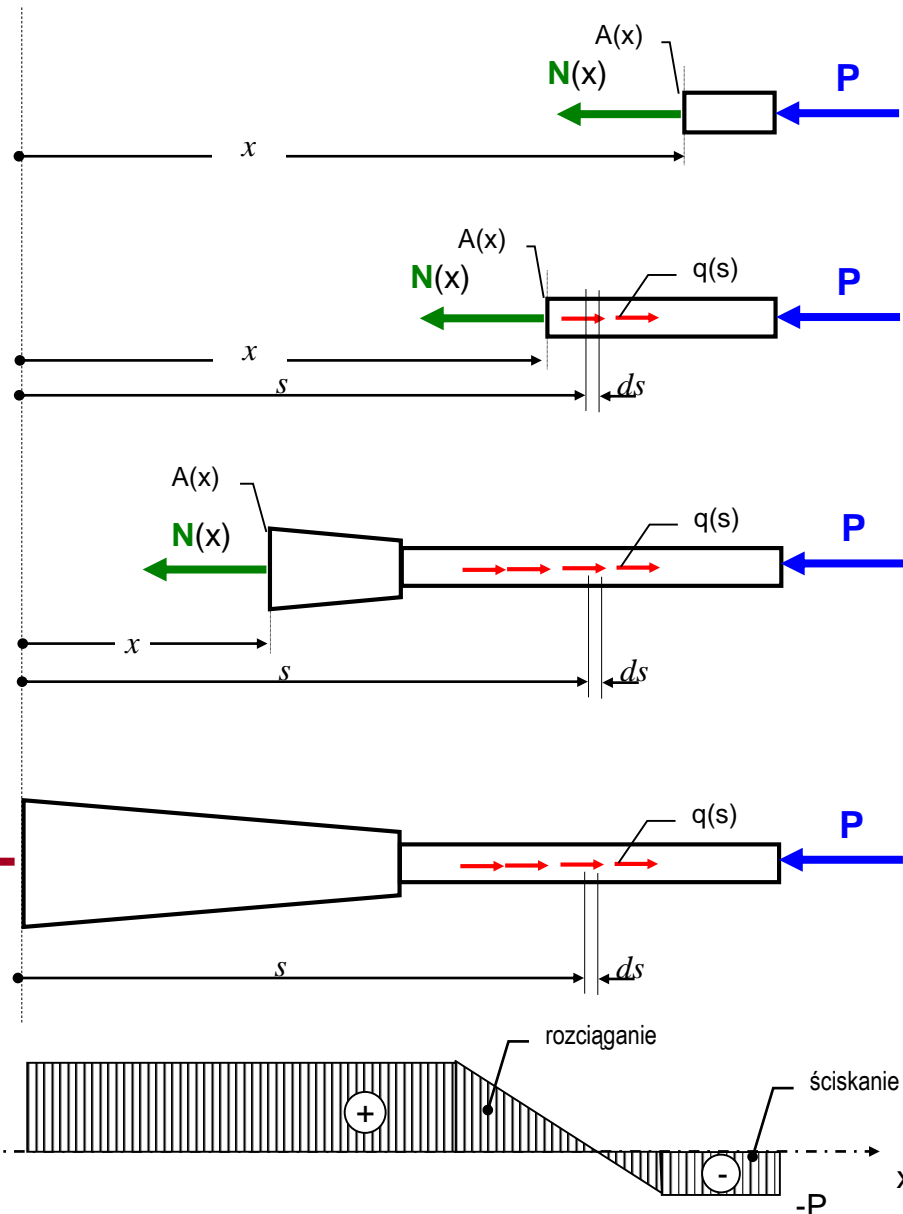
dla  $x \in (l_2, l_3)$ :  $-N(x) + \int_x^{l_3} q(s) ds - P = 0$

dla  $x \in (0, l_2)$ :  $-N(x) + \int_{l_2}^{l_3} q(s) ds - P = 0$

Możemy też wyznaczyć reakcję utwierdzenia:

$-R + \int_{l_2}^{l_3} q(s) ds - P = 0$

Wyniki przedstawiamy w postaci wykresu rozkładu siły normalnej wzdłuż osi pręta





# Podstawowe zależności dla pręta obciążonego siłami osiowymi

W praktyce interesuje nas intensywność siły na jednostkę pola przekroju, czyli naprężenia:

$$\sigma(x) = \sigma_{sr} = \frac{N(x)}{A(x)}$$

Na skutek jednowymiarowego stanu naprężenia pręt dozna odkształceń, które można policzyć z prawa Hooke'a

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

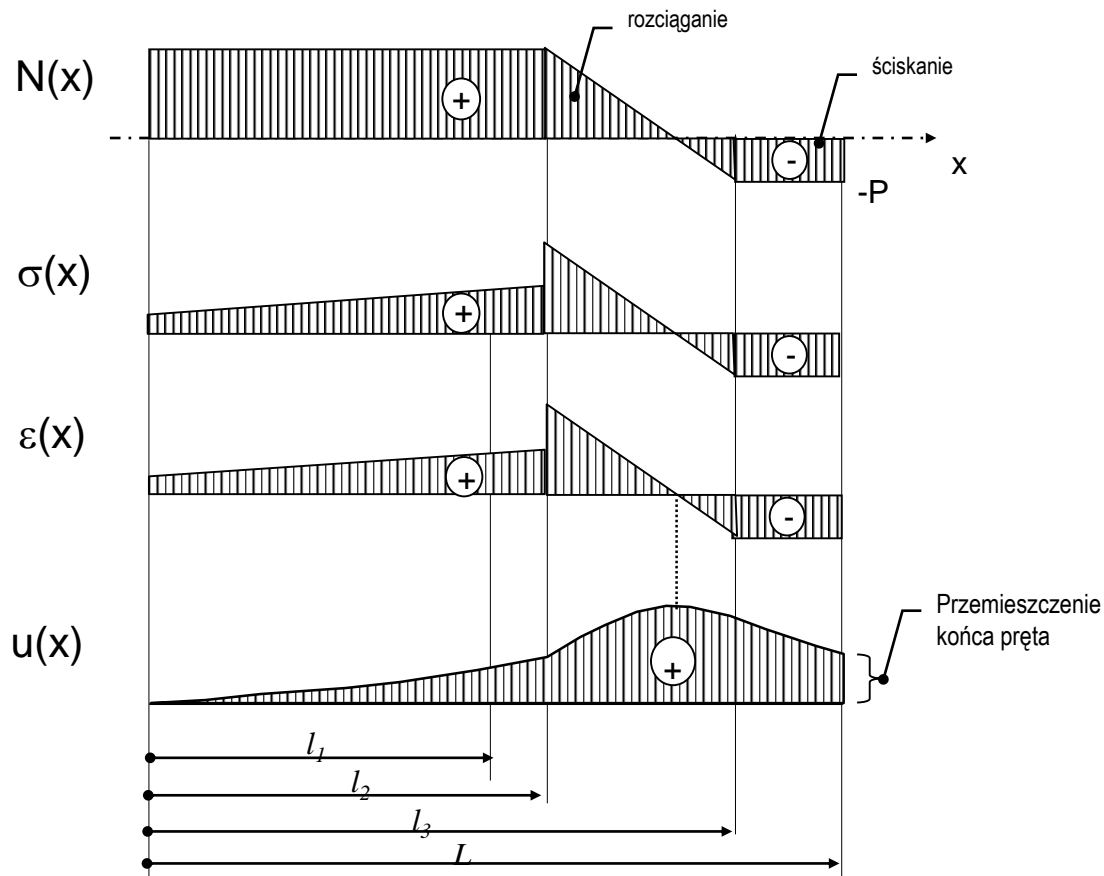
→

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{E} \sigma_x$$

Istnienie odkształceń wskazuje na skłonność pręta do wydłużania. Możemy wyznaczyć funkcję przemieszczeń całkując funkcję odkształceń:

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx$$

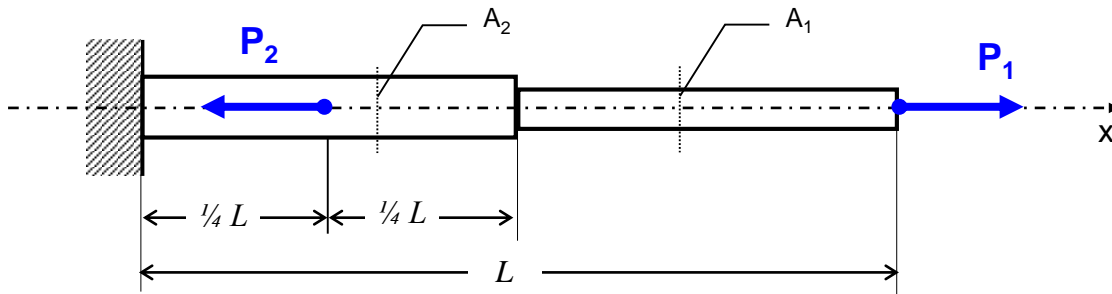
Wyniki analizy możemy przedstawić zatem na wykresach:



Rozkład wzdłuż długości pręta: siły normalnej  $N(x)$ , naprężenia normalnego  $\sigma(x)$ , odkształcenia  $\varepsilon(x)$  i funkcji przemieszczeń  $u(x)$

# Zadanie 1

Pręt o skokowo zmiennym polu przekroju poprzecznego obciążony został układem sił. Znaleźć:  $N(x), \sigma(x), \varepsilon(x)$  i  $u(x)$



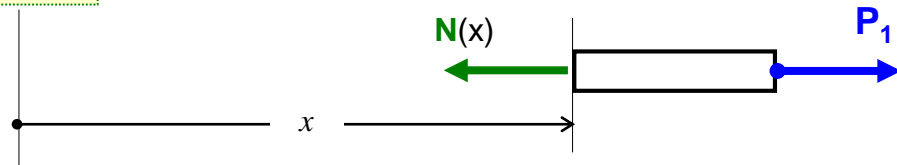
Dane:

$$P_1 = 10 \text{ kN}, \quad P_2 = 2 P_1$$

$$A_1 = 1 \text{ cm}^2, \quad A_2 = 2 A_1$$

$$L = 1 \text{ m}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

dla  $x \in (\frac{1}{2}L, L)$ :



$$-N(x) + P_1 = 0$$

$$N(x) = P_1 = 10 \text{ kN}$$

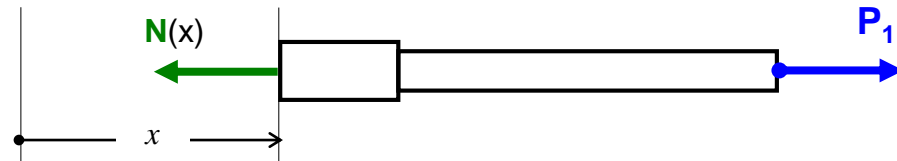
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_1}$$

$$\sigma(x) = \frac{10000 \text{ N}}{100 \text{ mm}^2} = 100 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{100 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

dla  $x \in (\frac{1}{4}L, \frac{1}{2}L)$ :



$$-N(x) + P_1 = 0$$

$$N(x) = P_1 = 10 \text{ kN}$$

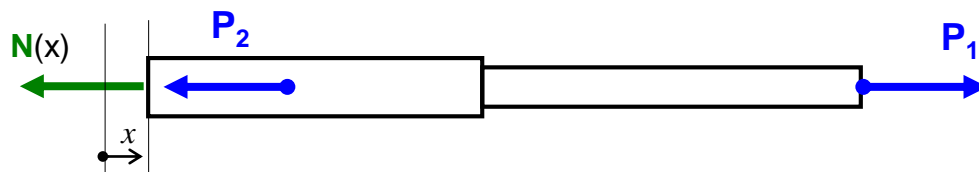
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_2}$$

$$\sigma(x) = \frac{10000 \text{ N}}{200 \text{ mm}^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{50 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 0,25 \cdot 10^{-3}$$

dla  $x \in (0, \frac{1}{4}L)$ :



$$-N(x) + P_1 - P_2 = 0$$

$$N(x) = P_1 - P_2 = -10 \text{ kN}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_2}$$

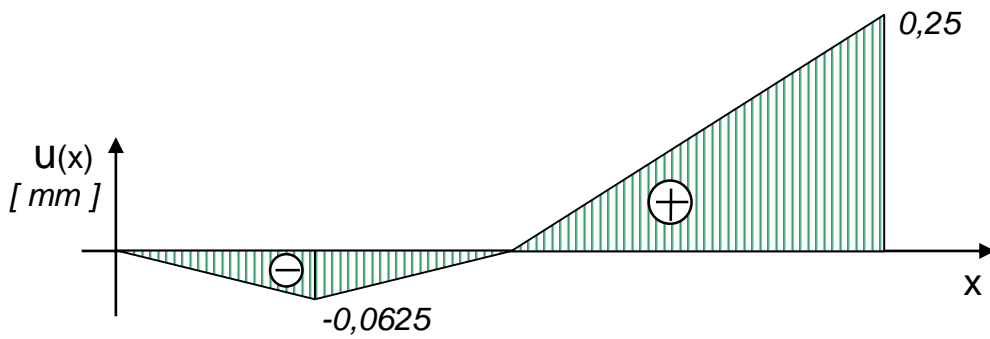
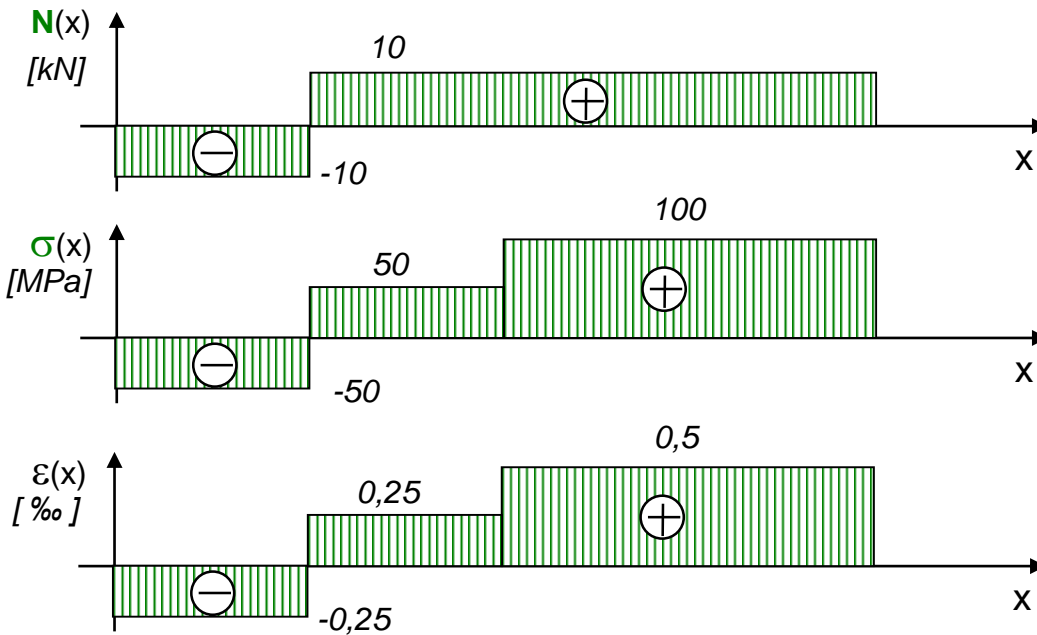
$$\sigma(x) = \frac{-10000 \text{ N}}{200 \text{ mm}^2} = -50 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{-50 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = -0,25 \cdot 10^{-3}$$

# Zadanie 1 (c.d.)

Wyniki analizy przedstawiamy na wykresach:



dla  $x \in (\frac{1}{2}L, L)$  :  $N(x) = 10 \text{ kN}$   
 $\sigma(x) = 100 \text{ MPa}$      $\varepsilon(x) = 0,5 \cdot 10^{-3}$

dla  $x \in (\frac{1}{4}L, \frac{1}{2}L)$  :  $N(x) = 10 \text{ kN}$   
 $\sigma(x) = 50 \text{ MPa}$      $\varepsilon(x) = 0,25 \cdot 10^{-3}$

dla  $x \in (0, \frac{1}{4}L)$  :  $N(x) = -10 \text{ kN}$   
 $\sigma(x) = -50 \text{ MPa}$      $\varepsilon(x) = -0,25 \cdot 10^{-3}$

Wyznaczenie funkcji przemieszczeń:

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx$$

dla  $x \in (0, \frac{1}{4}L)$  :  $u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx$      $u(x) = -0,25 \cdot 10^{-3} \cdot x$   
 $u(\frac{1}{4}L) = -0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \text{ mm} = -0,0625 \text{ mm}$

dla  $x \in (\frac{1}{4}L, \frac{1}{2}L)$  :  $u(x) = u(\frac{1}{4}L) + \int_{\frac{1}{4}L}^x \varepsilon(x) dx$   
 $u(x) = -0,0625 + 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot (x - \frac{1}{4}L)$   
 $u(\frac{1}{2}L) = -0,0625 \text{ mm} + 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \text{ mm} = 0$

dla  $x \in (\frac{1}{2}L, L)$  :  $u(x) = u(\frac{1}{2}L) + \int_{\frac{1}{2}L}^x \varepsilon(x) dx$   
 $u(x) = 0 + 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (x - \frac{1}{2}L)$      $u(L) = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \text{ mm} = 0,25 \text{ mm}$

Funkcja  $\varepsilon(x)$  jest pochodną funkcji  $u(x)$  !

## Zadanie 2

Na jaką głębokość można opuścić windę zawieszoną na stalowej linie jeśli naprężenia dopuszczalne wynoszą  $k_r=50$  MPa?  
Wyznaczyć całkowite wydłużenie liny.

**Dane:**  $Q=6$  kN ,  $A_1=2$  cm<sup>2</sup> ,  $g=9,81$  m/s<sup>2</sup> ,  $E=2 \cdot 10^5$  MPa ,  $\rho=7,8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>

Równanie równowagi na oś x:

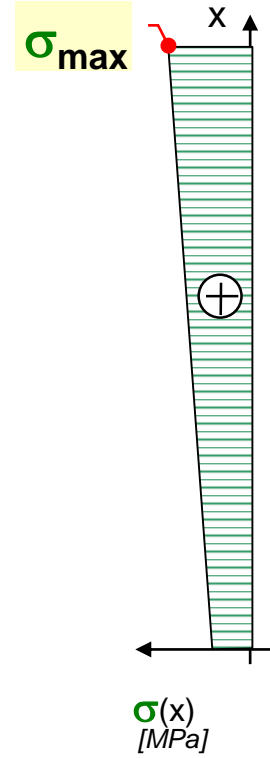
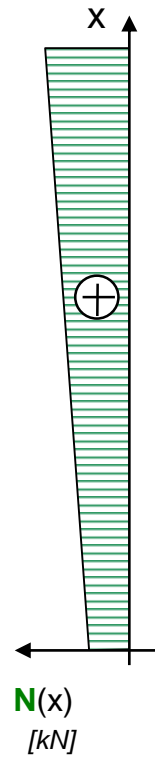
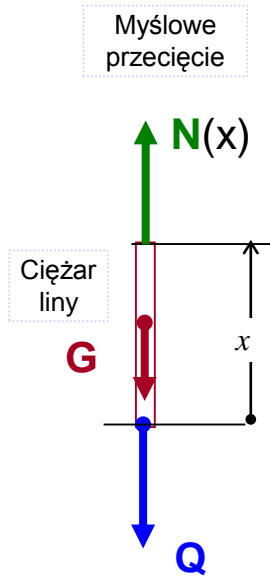
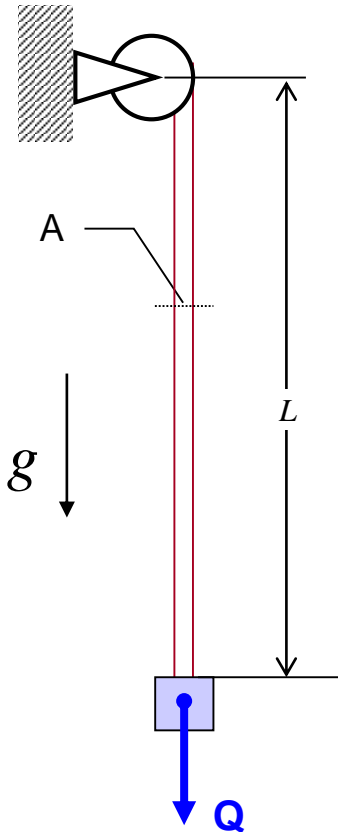
$$N(x) - Q - G = 0 \quad \rightarrow \quad N(x) = Q + \rho g A \cdot x$$

Naprężenia normalne:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \quad \rightarrow \quad \sigma(x) = \frac{Q}{A} + \rho g \cdot x$$

Odształcenia:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)} \quad \rightarrow \quad \varepsilon(x) = \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot x}{E}$$



Warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_{\max} = \frac{Q}{A} + \rho g \cdot L \leq k_r$$

$$L \leq \frac{k_r A - Q}{\rho g A}$$

$$L \leq \frac{50 \frac{N}{mm^2} \cdot 200 mm^2 - 6000 N}{7,8 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2}$$

$$L_{\max} = 261 m$$

## Zadanie 2 (c.d.)

Odształcenia:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)} \quad \rightarrow \quad \varepsilon(x) = \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot x}{E}$$

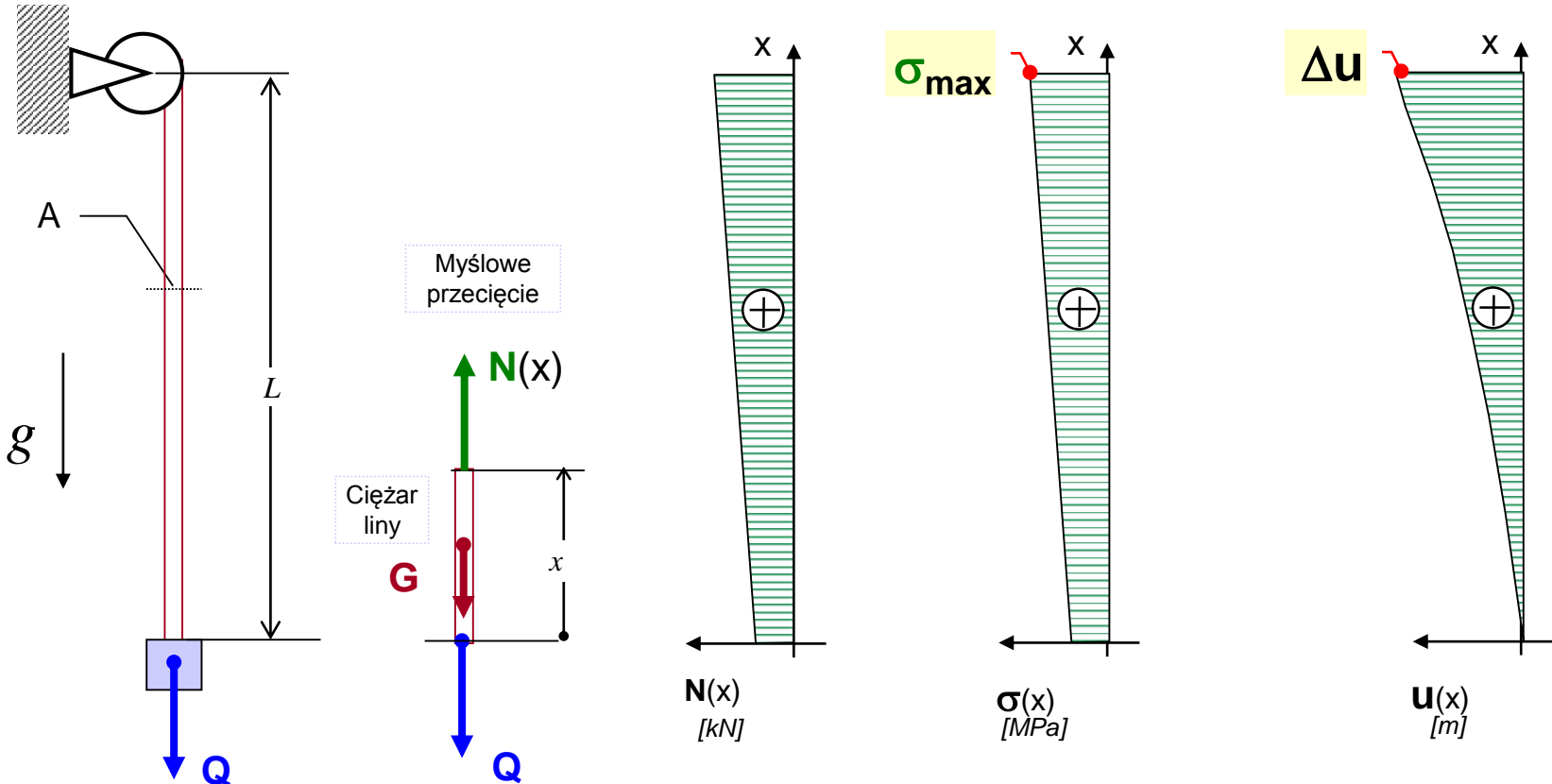
Wyznaczenie funkcji przemieszczeń:

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx$$

$$u(x) = \int_0^x \left( \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot x}{E} \right) dx$$

$$u(x) = \frac{Q \cdot x}{AE} + \frac{\rho g \cdot x^2}{2E}$$

$$\Delta u = u(L) = \frac{Q \cdot L}{AE} + \frac{\rho g \cdot L^2}{2E} = \frac{6000 \text{ N} \cdot 261 \text{ m}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} + \frac{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (261 \text{ m})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0,052 \text{ m} = 5,2 \text{ cm}$$



## Zadanie 3

Pręt osadzony na wale wiruje z prędkością kątową  $\omega$ . Jaka jest dopuszczalna wartość  $\omega_{\max}$ ?

Dane:  $R_w = 0,5 \text{ m}$ ,  $R_z = 1 \text{ m}$ ,  $A_1$ - dowolne,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $R_e = 240 \text{ MPa}$ ,  $n_e = 2$

Równanie równowagi na oś x:

$$-N(r) + \int_r^{R_z} dB = 0$$

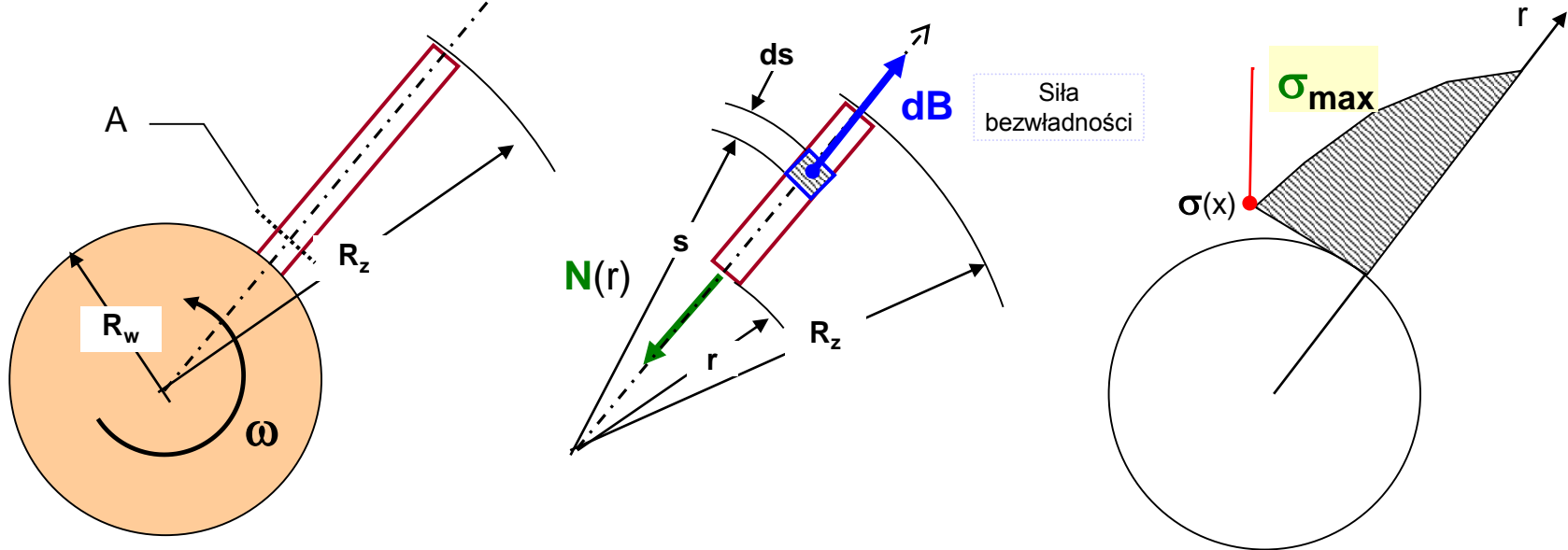
$$\rightarrow N(r) = \int_r^{R_z} \omega^2 \cdot s \cdot \rho A \cdot ds$$

$$N(r) = \frac{1}{2} \omega^2 \rho A (R_z^2 - r^2)$$

Naprężenia normalne:

$$\sigma(r) = \frac{N(r)}{A(r)}$$

$$\rightarrow \sigma(r) = \frac{1}{2} \omega^2 \rho (R_z^2 - r^2)$$



Warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho (R_z^2 - R_w^2) \leq k_r = \frac{R_e}{n_e}$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{2 \left( \frac{R_e}{n_e} \right)}{\rho (R_z^2 - R_w^2)}}$$

$$\rightarrow \omega_{\max} = 203 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$$