1

Wyprowadzenie wzorów dla schematów całkowania równań różniczkowych metodą rozwinięcia w szereg potęgowy - przykłady

1. Metoda Adamsa - Bashforta AB3 (3-krokowa)

$$y_{k+1} = y_k + h(\alpha f_{k-2} + \beta f_{k-1} + \gamma f_k) \qquad \alpha, \beta, \gamma = ?$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ y'_{k-2} & y'_{k-1} & y'_k \end{array}$$

$$\underbrace{y(t+h)}_{\mathcal{L}} = \underbrace{y(t) + h[\alpha y'(t-2h) + \beta y'(t-h) + \gamma y'(t)]}_{\mathcal{P}}$$

$$\mathcal{L} = y(t) + y'(t)h + \frac{1}{2}y''(t)h^2 + \frac{1}{6}y'''(t)h^3 + \frac{1}{24}y^{IV}(t)h^4 + \ldots$$

$$\mathcal{P} = y(t) + h\Big\{\alpha\Big[y'(t) - y''(t)2h + y'''(t)2h^2 - y^{IV}(t)\frac{4}{3}h^3 + \ldots\Big] + $$
$$+ \beta\Big[y'(t) - y''(t)h + y'''(t)\frac{1}{2}h^2 - y^{IV}(t)\frac{1}{6}h^3 + \ldots\Big] + \gamma y'(t)\Big\}$$

	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	równanie	
$y(t)$	1	1	OK	
$y'(t)$	1	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha+\beta+\gamma = 1$	1
$y''(t)$	$\frac{1}{2}$	$-2\alpha - \beta$	$2\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$	2
$y'''(t)$	$\frac{1}{6}$	$2\alpha + \frac{1}{2}\beta$	$2\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{6}$	3
$y^{IV}(t)$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{4}{3}\alpha - \frac{1}{6}\beta$	$Err = \frac{1}{24} + \frac{4}{3}\alpha + \frac{1}{6}\beta = \frac{9}{24}$	

2 - 3 : $\frac{1}{2}\beta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \beta = -\frac{4}{3}$

2·3 - 2 : $2\alpha = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{12}$

1 : $\gamma = 1 - \alpha - \beta = 1 - \frac{5}{12} + \frac{4}{3} = \frac{12 - 5 + 16}{12} = \frac{23}{12}$

AB3: $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{12}h[5f_{k-2} - 16f_{k-1} + 23f_k]$

Błąd $y(t_{k+1}) = y_{k+1} + \frac{9}{24}y^{IV}(t_k)h^4 + \ldots$

2. Metoda Adamsa-Moultona 3-krokowa (AM3)

$$y_{k+1} = y_k + h(\alpha f_{k-1} + \beta f_k + \gamma f_{k+1})$$

$$\begin{array}{ccc} f_{k-1} & f_k & f_{k+1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ y'_{k-1} & y'_k & y'_{k+1} \end{array}$$

$$L = y(t+h) = y(t) + y'(t)h + y''(t)\tfrac{1}{2}h^2 + y'''(t)\tfrac{1}{6}h^3 + y^{IV}(t)\tfrac{1}{24}h^4 + \ldots$$

$$P = y(t) + h\Big\{\alpha\big[y'(t) - y''(t)h + y'''(t)\tfrac{1}{2}h^2 - y^{IV}(t)\tfrac{1}{6}h^3 + \ldots\big] +$$

$$+ \beta y'(t) + \gamma\big[y'(t) + y''(t)h + y'''(t)\tfrac{1}{2}h^2 + y^{IV}(t)\tfrac{1}{6}h^3 + \ldots\big]\Big\}$$

	L	P	równanie	
$y(t)$	1	1	OK	
$y'(t)$	1	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha+\beta+\gamma = 1$	1
$y''(t)$	$\frac{1}{2}$	$-\alpha+\gamma$	$-\alpha+\gamma = \frac{1}{2}$	2
$y'''(t)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$	$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{6}$	3
$y^{IV}(t)$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\gamma$	$Err = \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{72} + \frac{5}{72}\right) = -\frac{1}{24}$	

2 + 2·3 : $2\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{12}$

2·3 − 2 : $2\alpha = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{12}$

1 : $\beta = 1 - (\alpha + \gamma) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Schemat AM3 : $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{12}h\left[-f_{k-1} + 8f_k + 5f_{k+1}\right]$

Błąd : $y(t_{k+1}) = y_{k+1} - \frac{1}{24}y^{IV}(t_k)h^4 + \ldots$

③

3. Metoda Milne-Simpsona, niejawna, 2-krokowa

$$y(t+h) = y(t-h) + h[\alpha y'(t-h) + \beta y'(t) + \gamma y'(t+h)]$$

$$L = y(t) + y'(t)h + y''(t)\tfrac{1}{2}h^2 + y'''(t)\tfrac{1}{6}h^3 + y^{IV}(t)\tfrac{1}{24}h^4 + $$
$$+ y^{V}(t)\tfrac{1}{120}h^5 + \ldots$$

$$P = y(t) - y'(t)h + y''(t)\tfrac{1}{2}h^2 - y'''(t)\tfrac{1}{6}h^3 + y^{IV}(t)\tfrac{1}{24}h^4 - $$
$$- y^{V}(t)\tfrac{1}{120}h^5 + \ldots +$$
$$+ h\{\alpha[y'(t) - y''(t)h + y'''(t)\tfrac{1}{2}h^2 - y^{IV}(t)\tfrac{1}{6}h^3 + y^{V}(t)\tfrac{1}{24}h^4 - \ldots] +$$
$$+ \beta y'(t) + \gamma[y'(t) + y''(t)h + y'''(t)\tfrac{1}{2}h^2 + y^{IV}(t)\tfrac{1}{6}h^3 +$$
$$+ y^{V}(t)\tfrac{1}{24}h^4 + \ldots]\}$$

	L	P	równania
$y(t)$	1	1	OK
$y'(t)$	1	$-1+\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha+\beta+\gamma=2$
$y''(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\alpha+\gamma$	$-\alpha+\gamma=0$
$y'''(t)$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\gamma$	$\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{3}$ to samo!!!
$y^{IV}(t)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}-\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{6}\gamma$	$-\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{6}\gamma=0$
$y^{V}(t)$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{120}+\frac{1}{24}\alpha+\frac{1}{24}\gamma$	$Err = \frac{1}{60} - \frac{1}{24}(\alpha+\gamma) = \frac{1}{60} - \frac{2}{3}\frac{1}{24} = \frac{-1}{90}$

z ②: $\alpha = \gamma$ (④ - automatycznie spełnione!)

z ③ $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$

z ① $\beta = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

Metoda MSn3: $y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{1}{3}h[f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}]$

jest 4-ego rzędu!! $y(t_{k+1}) = y_{k+1} - \frac{1}{90}y^{V}(t_k)h^5 + \ldots$

Ćwiczenie: wykaż, że metoda:

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3}h\left[2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k\right]$$

jest 4-ego rzędu.

4. Metoda Geara (wstecznego różniczkowania), 3-krokowa
→ BDF

$$y_{k+1} = \alpha y_k + \beta y_{k-1} + \gamma h f_{k+1}.$$

$$y(t+h) = \alpha y(t) + \beta y(t-h) + \gamma h y'(t+h)$$

$$L = y(t) + y'(t)h + y''(t)\frac{1}{2}h^2 + y'''(t)\frac{1}{6}h^3 + y^{IV}(t)\frac{1}{24}h^4 + \dots$$

$$P = \alpha y(t) + \beta\left[y(t) - y'(t)h + y''(t)\frac{1}{2}h^2 - y'''(t)\frac{1}{6}h^3 + y^{IV}(t)\frac{1}{24}h^4 + \dots\right]$$
$$+ \gamma h\left[y'(t) + y''(t)h + y'''(t)\frac{1}{2}h^2 + y^{IV}(t)\frac{1}{6}h^3 + \dots\right]$$

	L	P	równanie	
$y(t)$	1	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta=1$	①
$y'(t)$	1	$-\beta+\gamma$	$-\beta+\gamma=1$	②
$y''(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\beta+\gamma$	$\frac{1}{2}\beta+\gamma=\frac{1}{2}$	③
$y'''(t)$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{2}\gamma$	$Err = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right) = \frac{1}{6} - \left[\frac{1}{18}+\frac{1}{3}\right] = -\frac{2}{9}$	

③ − ②: $\frac{3}{2}\beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$

②: $\gamma = 1+\beta = \frac{2}{3}$

①: $\alpha = 1-\beta = \frac{4}{3}$

Metoda BDF2 (nie 3!):

$$y_{k+1} = \frac{4}{3}y_k - \frac{1}{3}y_{k-1} + \frac{2}{3}hf_{k+1}$$

$$y(t_{k+1}) = y_{k+1} - \frac{2}{9}y'''(t_k)h^3 + \dots$$

⊏ metoda 2-ego rzędu!

Metoda stosowana do układów SZTYWNYCH.

Ćwiczenie: Wyprowadź BDF3!

STABILNOŚĆ metod wielokrokowych

$$y_{k+1} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_{k+1-j} + h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f_{k+1-j}$$

Wielomian charakterystyczny metody:

$$p_r(\mu) = \mu^r - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu^{r-j}$$

Zauważmy, że dla metody zgodnej $\mu = 1$ jest zawsze pierwiastkiem $p_r(\mu)$ (bo $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j = 1$)

DEF. 1: Metodę wielokrokową nazywamy stabilną (0-stabilną) jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu $p_r(\mu)$ spełniają warunek $|\mu| \leq 1$, a te z nich, których moduł jest równy 1 są jednokrotne.

DEF. 2: Metodę wielokrokową nazywamy silnie stabilną jeśli jedynym pierwiastkiem wielomianu $p_r(\mu)$ o module równym 1 jest $\mu = 1$.

Przykłady:

1. W metodach Adamsa $r = 1$ i $\alpha_1 = 1$, zatem

$$p_A(\mu) = \mu - 1$$

Nie ma innych pierwiastków poza 1 – metody Adamsa są silnie stabilne.

2. Metoda MSm3 z przykładu 3 ma $r = 2$, $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 1$

Zatem $p_{MSm3}(\mu) = \mu^2 - 1 \Rightarrow \mu_1 = 1$ i $\mu_2 = -1$.

Jest to metoda 0-stabilna, ale nie silnie stabilna.

3. Metoda BDF2 ma $r=2$, $\alpha_1 = \frac{4}{3}$ i $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$

Zatem:

$$P_{BDF2}(\mu) = \mu^2 - \frac{4}{3}\mu + \frac{1}{3} \Rightarrow \mu_1 = 1, \ \mu_2 = \frac{1}{3}$$

Metoda BDF2 (ogólniej BDFn) jest silnie stabilna

Zachodzi ważne twierdzenie udowodnione przez Dahlquista:

<u>TW1</u> (1-sza bariera Dahlquista): r-krokowa metoda liniowa, która jest zgodna i 0-stabilna, jest:

a) co najwyżej rzędu $r+1$ gdy r jest liczbą nieparzystą

b) co najwyżej rzędu $r+2$ gdy r jest liczbą parzystą

Ponadto, jawna zero-stabilna metoda r-krokowa jest co najwyżej rzędu r.

<u>TW 2</u>: 0-stabilność + zgodność = zbieżność
(przy założeniu ścisłych warunków początkowych)

Przykłady analizy ZBIEŻNOŚCI metod wielokrokowych dla przypadku testowego.

Przykład testowy

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), & \lambda \in R \text{ i } \lambda > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ścisłe rozwiązanie: $Y(t) = e^{-\lambda t}$

<u>Przykład 1</u>: rozważmy tzw. metodę skokową:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h f_k$$

Ćwiczenie: pokaż, że metoda skokowa jest rzędu drugiego.

Dla problemu testowego metoda słabo.. daje następujące <u>równanie różnicowe</u>

$$y_{k+1} = y_{k-2} - 2hy_k$$

lub $$y_{k+1} + 2hy_k - y_{k-2} = 0$$

Poszukujemy rozwiązania ogólnego tego r-nia w sposób analogiczny jak dla równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Połóżmy $y_k = \mu^k$, gdzie μ należy wyznaczyć. Otrzymamy równanie charakterystyczne

$$\mu^2 + 2h\mu - 1 = 0$$

$$\Delta = 4h^2\lambda^2 + 4\ , \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1+h^2\lambda^2}$$

$$\mu_1 = -h\lambda - \sqrt{1+h^2\lambda^2}$$

$$\mu_2 = -h\lambda + \sqrt{1+h^2\lambda^2}$$

Rozwiązanie ogólne: $y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$. Stałe C_1 i C_2 wynikają z „warunków" początkowych. Mamy $y_0 = 1$. Drugi „warunek" to założenie że $y_1 = Y(h) = e^{-\lambda h}$

Po łatwych obliczeniach otrzymujemy:

$$y_k = \frac{\sqrt{1+h^2\lambda^2} - h\lambda - e^{-\lambda h}}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}}\left(-h\lambda - \sqrt{1+h^2\lambda^2}\right)^k +$$

$$+ \frac{\sqrt{1+h^2\lambda^2} + e^{-\lambda h} + h\lambda}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}}\left(-h\lambda + \sqrt{1+h^2\lambda^2}\right)^k$$

Badanie zbieżności polega na obliczeniu granicy $h \to 0$ przy $k \to \infty$ i $hk = T$ (T - ustalony czas)

Załóżmy, że $\lambda h \ll 1$. Wówczas:

$$\sqrt{1+h^2\lambda^2} \approx 1 + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \dots$$

$$\mu_1 \approx -h\lambda - 1 - \frac{1}{2}h^2\lambda^2 \approx -(1+h\lambda) + \dots$$

$$\mu_2 \approx -h\lambda + 1 + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 \approx 1 - h\lambda + \dots$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{1+h^2\lambda^2} - h\lambda - e^{-\lambda h}}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}} = \frac{1+\frac{1}{2}h^2\lambda^2+\dots - h\lambda - (1-\lambda h+\frac{1}{2}h^2\lambda^2 - \dots)}{2(1+\frac{1}{2}h^2\lambda^2+\dots)} =$$

$$= \frac{1}{2}O(h^3)\left(1-\frac{1}{2}h^2\lambda^2+\dots\right) = O(h^3)$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{1+h^2\lambda^2} + h\lambda + e^{-\lambda h}}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}} = \frac{1+\frac{1}{2}h^2\lambda^2+\dots + h\lambda + 1 - \lambda h + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 - \dots}{2(1+\frac{1}{2}h^2\lambda^2+\dots)} =$$

$$= \frac{2+h^2\lambda^2+\dots}{2+h^2\lambda^2+\dots} = 1 + O(h^2)$$

$$y_k \cong \cancel{\tfrac{1}{2}}\, O(h^3)(-1)^k(1+h\lambda+\dots)^k + [1+O(h^2)](1-h\lambda+\dots)^k$$

$$h = \frac{T}{k}, \quad T\text{ - ustalone } k \to \infty$$

$$y_k \approx O(k^{-3})(-1)^k\left(1+\lambda\frac{T}{k}\right)^k + [1+O(k^{-2})]\left(1-\frac{\lambda T}{k}\right)^k$$

$$y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lim_{k\to\infty} O\left(\frac{1}{k^3}\right)(-1)^k \underbrace{\left(1+\frac{\lambda T}{k}\right)^k}_{\to e^{\lambda T}} +$$

$$+ \lim_{k\to\infty}\left[1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\underbrace{\left(1-\frac{\lambda T}{k}\right)^k}_{\to e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda T}$$

Mamy zbieżność do ścisłego rozwiązania.

⑤

Załóżmy, że $y_1 = e^{-\lambda h} + \delta$, $|\delta| > 0$ - mały błąd

Wówczas stałe w rozwiązaniu ogólnym są równe:

$$\tilde{c}_1 = c_1 - \frac{\delta}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}}$$

$$\tilde{c}_2 = c_2 + \frac{\delta}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}}$$

i

$$\tilde{y}_k = y_k - \frac{\delta}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}}\mu_1^k + \frac{\delta}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}}\mu_2^k$$

Gdy $h = \frac{T}{k}$ i $k \to \infty$:

$$\tilde{y}_k = y_k - \frac{\delta}{2(1+\frac{1}{2}h^2\lambda^2+\dots)}(-1)^k\left(1+\frac{\lambda T}{k}+\dots\right)^k +$$

$$+ \frac{\delta}{2(1+h^2\lambda^2+\dots)}\left(1-\frac{\lambda T}{k}+\dots\right)^k \cong$$

$$\cong y_k - \frac{1}{2}\delta\left(1-\frac{1}{2}h^2\lambda^2+\dots\right)(-1)^k\left(1+\frac{\lambda T}{k}\right)^k +$$

$$+ \frac{1}{2}\delta\left(1-\frac{1}{2}h^2\lambda^2\right)\left(1-\frac{\lambda T}{k}\right)^k$$

Dla wielkich k mamy

$$\tilde{y}_k \approx \underbrace{y_k + \frac{1}{2}\delta e^{-\lambda T}}_{(1+\frac{1}{2}\delta)e^{-\lambda T}} - \frac{1}{2}\delta(-1)^k e^{\lambda T}$$

$y_k \to e^{-\lambda T}$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)}_{\text{błąd w „amplitudzie''}} e^{-\lambda T} +$$

składnik niezanikający OSCYLACYJNY!!!

↓

$\delta \ll 1$ ale dla dużych T możliwość marginalnej niestabilności !!

Zobaczmy jak działa metoda silnie stabilna na przykładzie metody AB2. Dla problemu testowego otrzymamy

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h(3f_k - f_{k-1})$$

$$\Downarrow$$

$$y_{k+1} = y_k - \frac{1}{2}h\lambda(3y_k - y_{k-1})$$

$$\Downarrow$$

$$y_{k+1} - \left(1 - \frac{3}{2}h\lambda\right)y_k - \frac{1}{2}h\lambda y_{k-1} = 0$$

Zatem: $\mu^2 - \left(1 - \frac{3}{2}h\lambda\right)\mu - \frac{1}{2}h\lambda = 0$

$$\Delta = 1 - h\lambda + \frac{9}{4}h^2\lambda^2 \underset{h\lambda \ll 1}{\approx} 1 - h\lambda$$

$$\mu_1 \cong \frac{1 - \frac{3}{2}h\lambda - \sqrt{1 - h\lambda}}{2} \approx \frac{1 - \frac{3}{2}h\lambda - \left(1 - \frac{1}{2}h\lambda + \ldots\right)}{2} \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2}h\lambda$$

$$\mu_2 = \frac{1 - \frac{3}{2}h\lambda + \sqrt{1 - h\lambda}}{2} \approx 1 - h\lambda$$

$$y_k = C_1\left(-\frac{1}{2}h\lambda\right)^k + C_2(1 - h\lambda)^k$$

$h = \frac{T}{k}$ i $k \to \infty$: pierwszy składnik znika gdy $k \to \infty$ drugi dąży do $C_2 e^{-\lambda T}$. Nietrudno pokazać, że w przypadku idealnych „warunków początkowych" tj. $y_0 = 1$ i $y_1 = e^{-\lambda h}$, zachodzi $C_1 = O(h^2)$ a zachodzi $C_2 = 1 + O(h^2)$. Mamy więc zbieżność.

Ponadto nawet przy $y_1 = e^{-\lambda h} + \delta$ nie pojawi się efekt marginalnej niestabilności (bo $\lim_{h \to 0} \mu_1 = 0$)

(7)

Rozważmy na koniec metodę
$$y_{k+1} = \frac{3}{2}y_k - \frac{1}{2}y_{k-1} + \frac{1}{2}hf_k$$

Pokażmy, że jest ona zgodna i - de facto - 1-go rzędu

Ołóż:

L: $y(t_n+h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2y''(t_n) + \frac{1}{6}h^6y'''(t_n) + \ldots$

P: $y(t_n+h) = \frac{3}{2}[y(t_n)] - \frac{1}{2}[y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2y''(t_n) + ..] +$

$+\frac{1}{2}h\,y'(t_n) = y(t_n) + hy'(t_n) - \frac{1}{4}h^2y''(t_n) + \ldots$

Jak widać, lokalny błąd aproksymacji to $e(h) = O(h^2)$ czyli metoda jest zgodna i 1-ego rzędu.

Jej wielomian charakterystyczny to: $\mu^2 - \frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2} = 0$
Pierwiastki to $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$ - czyli metoda jest silnie stabilna, ale „suboptymalna" pod względem rzędu dokładności.

Niech teraz $y_{k+1} = 4y_k - 3y_{k-1} - 2hf_k$.
To też metoda 1-ego rzędu (wykaż!). Wielomian charakterystyczny to $P(\mu) = \mu^2 - 4\mu + 3$, z miejscami zerowymi $\mu_1 = 1$ i $\mu_2 = 3$. Metoda nie jest zatem nawet 0-stabilna. Jeśli zastosować ją do problemu testowego to otrzymamy r-nie różnicowe:
$$y_{k+1} - (4 + 2h\lambda)y_k + 3y_{k-1} = 0$$
a stąd: $\mu^2 - (4 + 2h\lambda)\mu + 3$.

Ćwiczenie: pokaż, że nawet przy idealnych w-kach startowych silna niestabilność jest nieunikniona (brak zbieżności) bowiem dla $h\lambda \ll 1$ $\mu_2 \approx 3(1+h\lambda)$ i $\mu_2^k \nearrow \infty$.