

rościanu są $-A\sigma_x$, $-Am\tau_{xy}$, $-An\tau_{xz}$. Odpowiednim równaniem równowagi czworoscianu jest

$$AX - A\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{xz} = 0$$

W ten sam sposób otrzymamy pozostałe dwa równania równowagi, rzutując siły na kierunki osi y i z . Po skróceniu przez A , możemy zapisać równania równowagi czworoscianu następująco:

$$\begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad [112]$$

W ten sposób składowe naprężenia działające na płaszczyznę wyznaczoną cosinusami kierunkowymi l, m, n mogą być łatwo obliczone z równań [112], o ile tylko znamy sześć składowych naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$, w punkcie O .

68. Naprężenia główne. Rozważmy obecnie składową normalną naprężenia σ_n , działającego na płaszczyznę BCD (rys. 132). Stosując oznaczenia [a] na cosinusy kierunkowe, znajdziemy

$$\sigma_n = Xl + Ym + Zn$$

lub, podstawiając wartości X, Y, Z z równania [112],

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{xy} lm \quad [113]$$

Zmienność σ_n wraz z kierunkiem normalnej N może być przedstawiona geometrycznie w sposób następujący. Weźmy w kierunku N wektor o długości r , odwrotnie proporcjonalnej do pierwiastka kwadratowego z wartości bezwzględnej naprężenia, to znaczy

$$r = \frac{k}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad [b]$$

gdzie k jest czynnikiem stałym. Współrzędnymi końców tego wektora będą

$$x = lr; \quad y = mr; \quad z = nr \quad [c]$$

Podstawiając z [b]

$$\sigma_n = \pm \frac{k^2}{r^2} \quad [d]$$

oraz wartości l, m, n z [c] i równania [113] otrzymamy¹⁾

$$\pm k^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{xz} zx + 2\tau_{xy} xy \quad [114]$$

Gdy płaszczyzna BCD obraca się wokół punktu O , koniec wektora r zawsze leży na powierzchni drugiego stopnia wyrażonej równaniem [114]. Powierzchnia ta jest zdefiniowana w zupełności przez naprężenia w punkcie O i, jeżeli kierunki osi układu współrzędnych x, y, z zmieniają się, powierzchnia ta pozostanie niezmienną; zmianie ulegną jedynie składowe naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ i co za tym idzie, współczynniki równania [114].

¹⁾ W równaniach [d] i [114] przyjmujemy znak plus lub minus w zależności od tego czy σ_n jest naprężeniem rozciągającym, czy ściskającym. Gdy wszystkie trzy naprężenia główne mają ten sam znak, tylko jeden ze znaków jest potrzebny, a powierzchnia jest elipsoidą. Gdy naprężenia główne są różnych znaków, musimy uwzględnić oba znaki, a równanie [114] z uwzględnieniem obu znaków przedstawi hiperboloidę dwupowłokową i hiperboloidę jednopowłokową o wspólnym stożku asymptotycznym.

Jak dobrze wiemy, w przypadku powierzchni drugiego stopnia (równanie [114]) możemy zawsze znaleźć takie kierunki osi x, y, z , że składniki równania, zawierające iloczyny mieszane współrzędnych, znikną. Oznacza to, że zawsze możemy znaleźć trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, dla których $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ znikają, a więc wypadkowe naprężenia są prostopadłe do płaszczyzn, na które działają. Nazywamy je *naprężeniami głównymi* w punkcie, ich kierunki *osiami głównymi*, a płaszczyzny, na które działają, *płaszczyznami głównymi*. Zauważmy, że naprężenie w punkcie jest zdefiniowane w zupełności, jeżeli są znane kierunki osi głównych i wielkości trzech głównych naprężeń.

69. Elipsoida naprężeń i kierunkowa powierzchnia naprężeń. Jeżeli osie układu współrzędnych x, y, z pokrywają się z kierunkami osi głównych, to obliczenie naprężeń działających w płaszczyźnie nachylonej nie przedstawia trudności. W tym przypadku naprężenia styczne $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ są równe zeru i równanie [112] przyjmie postać

$$X = \sigma_x l; \quad Y = \sigma_y m; \quad Z = \sigma_z n \quad [115]$$

Wyznaczając wartości l, m, n z powyższych równań i następnie wstawiając je do zależności $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, znajdziemy

$$\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{Y^2}{\sigma_y^2} + \frac{Z^2}{\sigma_z^2} = 1 \quad [116]$$

Oznacza to, że dla każdej nachylonej płaszczyzny przechodzącej przez punkt O naprężenie jest przedstawione wektorem o początku w O i składowych X, Y, Z , a końce takich wektorów leżą na powierzchni elipsoidy danej równaniem [116]. Elipsoida ta jest zwana *elipsoidą naprężeń*. Jej półosie przedstawiają naprężenia główne w punkcie. Dochodzimy stąd do wniosku, że największym naprężeniem w punkcie jest największe z trzech naprężeń głównych w tymże punkcie.

Jeżeli dwa spośród trzech naprężeń głównych są co do wielkości sobie równe, elipsoida staje się elipsoidą obrotową. Jeżeli te równe naprężenia są tego samego znaku, to wypadkowe naprężenia działające na płaszczyzny, przechodzące przez oś symetrii elipsoidy, będą równe i prostopadłe do płaszczyzn, na które działają. W tym przypadku naprężenia działające na dowolne dwie płaszczyzny prostopadłe i przechodzące przez tę oś mogą być przyjęte za naprężenia główne. Jeżeli wszystkie trzy naprężenia główne są sobie równe i jednego znaku, elipsoida naprężeń staje się kulą i dowolne trzy prostopadłe kierunki mogą być przyjęte jako osie główne. Jeżeli jedno z naprężeń głównych jest równe zeru, elipsoida naprężeń upraszcza się do elipsy, a wektory przedstawiające naprężenia, działające na wszystkie płaszczyzny przechodzące przez punkt, leżą w jednej płaszczyźnie. Stan ten jest nazywany *plaskim stanem naprężenia* i był już rozpatrzony w poprzednich paragrafach. O ile dwa naprężenia główne są równe zeru, mamy do czynienia z przypadkiem prostego rozciągania lub ściskania.

Każdy z promieni-wektorów elipsoidy naprężeń przedstawia w pewnej skali naprężenie działające na płaszczyznę przechodzącą przez środek elipsoidy. W celu znalezienia tej płaszczyzny wykorzystamy łącznie z elipsoidą naprężeń [116] kierunkową powierzchnię naprężeń zdefiniowaną równaniem

$$\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z} = 1 \quad [117]$$

Naprężenie przedstawione promieniem-wektorem elipsoidy naprężeń działa na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny, stycznej do kierunkowej powierzchni naprężeń w punkcie jej przecięcia z promieniem-wektorem.

Możemy to udowodnić w następujący sposób. Równanie płaszczyzny stycznej do kierunkowej powierzchni na przezeń [117] w dowolnym punkcie x_0, y_0, z_0 ma postać

$$\frac{xx_0}{\sigma_x} + \frac{yy_0}{\sigma_y} + \frac{zz_0}{\sigma_z} = 1 \quad [a]$$

Oznaczając przez h odległość prostopadłej od początku układu współrzędnych do powyższej płaszczyzny stycznej oraz przez l, m, n cosinusy kierunkowe tej prostopadłej, możemy napisać równanie płaszczyzny stycznej w postaci

$$lx + my + nz = h \quad [b]$$

Porównując [a] i [b], otrzymamy

$$\sigma_x = \frac{x_0 h}{l}; \quad \sigma_y = \frac{y_0 h}{m}; \quad \sigma_z = \frac{z_0 h}{n} \quad [c]$$

Podstawiając wartości powyższe do równania [115], znajdziemy

$$X = x_0 h; \quad Y = y_0 h; \quad Z = z_0 h$$

to znaczy, że składowe naprężenia działającego na płaszczyznę o cosinusach kierunkowych l, m, n są proporcjonalne do współrzędnych x_0, y_0, z_0 . Wynika stąd, że wektor przedstawiający naprężenia przechodzi przez punkt x_0, y_0, z_0 zgodnie z założeniem¹⁾.

70. Wyznaczenie naprężeń głównych. Jeżeli znamy składowe naprężenia dla trzech płaszczyzn układu współrzędnych, możemy wyznaczyć kierunki i wielkości naprężeń głównych, wykorzystując własność, że naprężenia główne są prostopadłe do płaszczyzn, na które działają. Niech l, m, n będą cosinusami kierunkowymi płaszczyzny głównej, a S wielkością naprężenia głównego działającego na tę płaszczyznę. Wtedy otrzymujemy składowe tego naprężenia

$$X = Sl; \quad Y = Sm; \quad Z = Sn$$

Podstawiając do równania [112], dostajemy

$$\begin{aligned} (S - \sigma_x)l - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n &= 0 \\ -\tau_{xy}l + (S - \sigma_y)m - \tau_{yz}n &= 0 \\ -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (S - \sigma_z)n &= 0 \end{aligned} \quad [a]$$

Mamy więc trzy jednorodne równania liniowe na l, m, n . Powyższy układ równań będzie miał rozwiązanie różne od zera jedynie wtedy, gdy jego wyznacznik będzie równy zeru. Obliczając wyznacznik i przyrównując go do zera, otrzymujemy następujące równanie trzeciego stopnia względem S

$$\begin{aligned} S^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)S^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2)S + \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad [118]$$

Trzy pierwiastki tego równania dadzą nam wartości trzech naprężeń głównych. Podstawiając każde z tych naprężeń do równania [a] oraz stosując związek $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, możemy znaleźć trzy grupy cosinusów kierunkowych dla trzech płaszczyzn głównych.

Zauważmy, że równanie [118] określające naprężenia główne musi być niezależne od kierunków osi współrzędnych x, y, z ; wynika stąd, że czynniki w nawiasach tego równania muszą pozostać stałe przy zmianie tych kie-

runków. Stąd, współczynniki równania [118]

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ (b) \quad & \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ (c) \quad & \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

nie zmieniają się przy zmianie kierunku osi współrzędnych. Oznacza to, że suma $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ trzech składowych normalnych naprężeń w punkcie w trzech prostopadłych kierunkach jest stała i równa sumie głównych naprężeń w tym punkcie.

71. Wyznaczenie maksymalnych naprężeń stycznych. Przypuśćmy, że x, y, z są osiami głównymi tak, że $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ są naprężeniami głównymi i że l, m, n są cosinusami kierunkowymi danej płaszczyzny. Wtedy, z równania [115] otrzymujemy kwadrat całkowitego naprężenia działającego na tę płaszczyznę

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2$$

Kwadrat składowej normalnej naprężenia działającego na tę samą płaszczyznę, z równania [113], ma postać

$$\sigma_n^2 = (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2 \quad [a]$$

Wtedy kwadrat naprężeń stycznych, działających na tę samą płaszczyznę, musi być równy

$$\tau^2 = S^2 - \sigma_n^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2 - (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2 \quad [b]$$

Obecnie z powyższego równania wyeliminujemy jeden z cosinusów kierunkowych, np. n korzystając z zależności

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

i następnie wyznaczmy l i m tak, aby τ było maksimum. Po podstawieniu $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ do wyrażenia [b], obliczeniu pochodnych względem l i m oraz przyrównaniu ich do zera, otrzymamy następujące równania, które wyznaczają cosinusy kierunkowe płaszczyzn, dla których τ osiąga maksimum lub minimum

$$\begin{aligned} l[(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)] &= 0 \\ m[(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)] &= 0 \end{aligned} \quad [c]$$

Jedno rozwiązanie otrzymamy przyjmując $l = m = 0$. Możemy również otrzymać rozwiązania różne od zera. Biorąc na przykład $l = 0$, znajdujemy z drugiego równania [c], że $m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$; biorąc zaś $m = 0$, otrzymujemy z pierwszego równania [c], że $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$. Ogólnie, równania [c] nie posiadają rozwiązań, dla których zarówno l jak i m byłyby różne od zera, ponieważ w takim przypadku oba wyrażenia w nawiasach nie mogą zniknąć.

Powtarzając powyższe obliczenia i eliminując z równania [b] m a następnie l , otrzymujemy ostatecznie następującą tablicę cosinusów kierunkowych, dla których τ osiąga maksimum lub minimum.

COSINUSY KIERUNKOWE DLA PŁASZCZYZN τ_{\max} I τ_{\min}

$l =$	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$m =$	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$n =$	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

¹⁾ Inny sposób przedstawienia naprężeń w punkcie za pomocą kół, został rozwinięty przez O. Mohra: „Technische Mechanik“, 2 wyd. str. 192, 1914. Patrz również A. Föppl i L. Föppl: „Drang und Zwang“, tom 1, str. 9, oraz H. M. Westergaard: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 4, str. 520, 1924. Koła Mohra zostały zastosowane przy omawianiu zagadnień dwuwymiarowych (patrz par. 9).

Pierwsze trzy kolumny dają nam kierunki płaszczyzn układu współrzędnych pokrywające się, jak to przyjęto pierwotnie, z płaszczyznami głównymi. Dla tych płaszczyzn naprężenie styczne jest równe zeru, tzn. wyrażenie [b] osiąga minimum. Trzy pozostałe kolumny dają nam cosinusy kierunkowe płaszczyzn przechodzących przez jedną z trzech osi głównych i połowiących kąt pomiędzy pozostałymi osiami głównymi. Podstawiając cosinusy kierunkowe tych trzech płaszczyzn do wyrażenia [b], znajdziemy następujące wartości naprężeń stycznych w tych trzech płaszczyznach.

$$\tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z); \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z); \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \quad [119]$$

Stąd wynika, że maksymalne naprężenia styczne działają w płaszczyznach połowiących kąt pomiędzy największym i najmniejszym naprężeniem głównym, a wartość ich jest równa połowie różnicy pomiędzy tymi naprężeniami głównymi.

Jeżeli osie x, y, z (rys. 132) przedstawiają kierunki naprężeń głównych i jeżeli $OB=OC=OD$, tak że normalna do pochylej ściany czworościanu posiada cosinusy kierunkowe $l=m=n=1/\sqrt{3}$, to wtedy naprężenie normalne na tej ścianie możemy obliczyć z równania [a] lub [113]

$$\sigma_n = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad [d]$$

Jest to tak zwane „naprężenie średnie“. Naprężenia styczne są dane równaniem [b]

$$\tau^2 = \frac{1}{3}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

Możemy wyrażenie to również zapisać

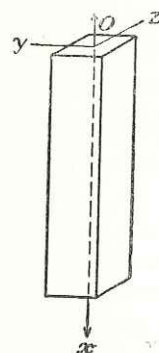
$$\tau^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$$

lub wykorzystując [d]

$$\tau^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_n)^2 + (\sigma_y - \sigma_n)^2 + (\sigma_z - \sigma_n)^2]$$

Powyższe naprężenie styczne nosi nazwę „naprężenia stycznego ośmiościennego“, ponieważ ściana, na którą działa, jest jedną ze ścian ośmiościanu umiarowego, którego wierzchołki znajdują się na osiach. Z pojęciem tym mamy do czynienia bardzo często w teorii plastyczności.

72. Odształcenie jednorodne. Będziemy rozpatrywać jedynie małe odształcenia, tj. takie, jakie występują w konstrukcjach inżynierskich. Małe przemieszczenia punktów materialnych ciała odształcanego rozkłada się zwykle na składowe u, v, w równoległe odpowiednio do osi współrzędnych x, y, z . Będziemy przyjmować, że składowe te są bardzo małymi wielkościami i że zmieniają się w sposób ciągły na całej objętości ciała.



Rys. 133

Rozważmy na przykład osiowe rozciąganie pryzmatycznego pręta, zamocowanego na górnym końcu (rys. 133). Niech ε będzie wydłużeniem względnym pręta w kierunku osi x , a $\nu\varepsilon$ względnym zwężeniem poprzecznym. Wtedy składowe przemieszczenia punktu o współrzędnych x, y, z równają się

$$u = \varepsilon x; \quad v = -\nu\varepsilon y; \quad w = -\nu\varepsilon z$$

Oznaczając przez x', y', z' współrzędne punktu po odształceniu, mamy

$$x' = x + u = x(1 + \varepsilon); \quad y' = y + v = y(1 - \nu\varepsilon);$$

$$z' = z + w = z(1 - \nu\varepsilon) \quad [a]$$

Jeżeli rozpatrzmy w płęcie płaszczyznę, która przed odształceniem była przedstawiona równaniem

$$ax + by + cz + d = 0 \quad [b]$$

to punkty tej płaszczyzny po odształceniu będą leżały również w jednej płaszczyźnie. Równanie tej nowej płaszczyzny otrzymamy, podstawiając do równania [b] wartości x, y, z z równania [a]. W ten sposób możemy łatwo udowodnić, że płaszczyzny równoległe pozostają równoległymi po odształceniu oraz równoległe linie pozostają również równoległymi.

Jeżeli w płęcie rozpatrzmy powierzchnię kuli, która przed odształceniem jest przedstawiona równaniem

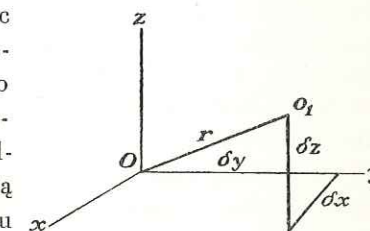
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad [c]$$

o po odształceniu powyższa kula będzie elipsoidą, której równanie znajdziemy, wstawiając do równania [c] wyrażenia na x, y, z z równania [a]. Stąd mamy

$$\frac{x'^2}{r^2(1 + \varepsilon)^2} + \frac{y'^2}{r^2(1 - \nu\varepsilon)^2} + \frac{z'^2}{r^2(1 - \nu\varepsilon)^2} = 1 \quad [d]$$

W ten sposób kula o promieniu r przekształca się w elipsoidę o półosiach $r(1 + \varepsilon), r(1 - \nu\varepsilon), r(1 - \nu\varepsilon)$.

Wydłużenie osiowe i zwężenie poprzeczne rozpatrzone powyżej przedstawiają tylko szczególny przypadek odształcenia ogólniejszego rodzaju, w którym składowe odształcenia u, v, w są liniowymi funkcjami współrzędnych. Postępując jak powyżej, możemy udowodnić, że ten rodzaj odształcenia posiada własności znalezione dla przypadku osiowego rozciągania. Płaszczyzny i linie proste przed odształceniem pozostają płaszczyznami i liniami prostymi po odształceniu. Równoległe płaszczyzny i proste pozostają równoległymi po odształceniu. Kula po odształceniu będzie elipsoidą. Odształcenie tego rodzaju zwane jest *odkształceniem jednorodnym*. Pokażemy poniżej, że w tym przypadku odształcenie w dowolnym zadanym kierunku będzie jednakowe dla wszystkich punktów odształcanego ciała. Dwa elementy takiego ciała geometrycznie podobne i podobnie zorientowane pozostaną geometrycznie podobne po odształceniu.



Rys. 134

W ogólniejszych przypadkach odształcenie zmienia się w obszarze ciała. Przy zginaniu np. belki, wydłużenia i skrócenia włókien podłużnych zależą od ich odległości od powierzchni obojętnej; odształcenia postaciowe w skręcanym wale są proporcjonalne do odległości od jego osi. W podobnych przypadkach odształcenia niejednorodnego należy rozpatrzeć odształcenia w pobliżu badanego punktu.

73. Wyznaczenie odształceń w punkcie. Badając odształcenia w pobliżu punktu O odształcanego ciała (rys. 134), rozważmy mały liniowy element OO_1 o długości r , o cosinusach kierunkowych l, m, n . Otrzymujemy następujące rzuty tego elementu na osie układu współrzędnych

$$\delta x = rl; \quad \delta y = rm; \quad \delta z = rn \quad [a]$$

Rzuty te odpowiadają współrzędnym punktu O_1 względem osi x, y, z układu współrzędnych o początku w punkcie O . Jeżeli u, v, w są składowymi przemieszczeniami punktu O podczas odształcenia ciała, wtedy przemieszczenia bliskiego punktu O_1 mogą być przedstawione

w następujący sposób:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad [b]$$

Przyjeliśmy tutaj, że wielkości δx , δy , δz są małe, i dlatego wyrazy zawierające wyższe potęgi i iloczyny tych wielkości mogą być w [b] pominięte jako wielkości małe wyższego rzędu. Po odkształceniu współrzędne punktu O_1 wyrażą się następująco:

$$\begin{aligned} \delta x + u_1 - u &= \delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ \delta y + v_1 - v &= \delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ \delta z + w_1 - w &= \delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad [c]$$

Zauważmy, że powyższe współrzędne są liniowymi funkcjami początkowych współrzędnych δx , δy , δz ; stąd odkształcenie bardzo małego elementu ciała w punkcie O możemy rozważać jako jednorodne (par. 72).

Rozpatrzmy wydłużenie liniowego elementu r , powstałe na skutek powyższego odkształcenia. Kwadrat długości tego elementu po odkształceniu jest równy sumie kwadratów jego współrzędnych [c]. Stąd, jeżeli ε jest wydłużeniem względnym elementu, otrzymamy

$$\begin{aligned} (r + \varepsilon r)^2 &= \left(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \right)^2 + \left(\delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \right)^2 + \\ &+ \left(\delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \right)^2 \end{aligned}$$

lub dzieląc przez r^2 i wykorzystując równania [a]

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 &= \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 + \left[l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 + \\ &+ \left[l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad [d]$$

Uwzględniając, że ε i pochodne $\partial u/\partial x \dots \partial w/\partial z$ są małymi wielkościami, których kwadraty i iloczyny możemy pominąć, oraz biorąc pod uwagę, że $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, otrzymamy [d] w następującej postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon &= l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad [120]$$

Stąd możemy wyznaczyć wydłużenie elementu r , o ile tylko będą znane wyrażenia $\frac{\partial u}{\partial x}$, ... $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, ... Stosując następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x; & \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y; & \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy}; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \gamma_{xz}; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \gamma_{yz} \end{aligned} \quad [e]$$

równanie [120] możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} ln + \gamma_{yz} mn \quad [121]$$

Sens fizyczny wielkości $\varepsilon_x \dots, \gamma_{yz}$ został już omówiony (por. par. 5) i pokazaliśmy tam, że $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ są wydłużeniami względnymi w kierunkach osi x, y, z , a $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ są kątami odkształcenia postaciowego w tych samych kierunkach. Widzimy obecnie, że wydłużenie dowolnego elementu liniowego przechodzącego przez punkt O , może być obliczone z równania [121], o ile tylko znamy sześć składowych stanu odkształcenia.

W szczególnym przypadku odkształcenia jednorodnego, składowe przemieszczenia u, v, w są liniowymi funkcjami współrzędnych i , zgodnie ze związkami [e], składowe odkształcenia są stałe w całej objętości ciała, tzn. w tym przypadku każdy element ciała podlega takiemu samemu odkształceniu.

Przy badaniu odkształcenia w pobliżu punktu O czasami jest konieczna znajomość zagadnienia, jak zmienia się kąt pomiędzy dwoma liniowymi elementami przechodzącymi przez ten punkt. Stosując równania [c] i [a], oraz przyjmując, że ε jest małą wielkością, otrzymamy cosinusy kierunkowe, określające położenie elementu r (rys. 134) po odkształceniu

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\delta x + u_1 - u}{r(1 + \varepsilon)} = l \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \\ m_1 &= \frac{\delta y + v_1 - v}{r(1 + \varepsilon)} = l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \\ n_1 &= \frac{\delta z + w_1 - w}{r(1 + \varepsilon)} = l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad [f]$$

Biorąc inny element r' , przechodzący przez ten sam punkt, o cosinuszach kierunkowych l', m', n' , otrzymamy wielkości tych cosinusów po odkształceniu z wyrażen analogicznych do [f]. Stąd cosinus kąta pomiędzy dwoma elementami po odkształceniu ma postać

$$\cos(rr') = l_1 l_1' + m_1 m_1' + n_1 n_1'$$

Zakładając, że wydłużenia ε i ε' w tych dwóch kierunkach są wielkościami małymi i wykorzystując równanie [f], znajdziemy

$$\begin{aligned} \cos(rr') &= (ll' + mm' + nn') (1 - \varepsilon - \varepsilon') + 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn') + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{xz}(nl' + n'l) + \\ &+ \gamma_{xy}(lm' + l'm) \end{aligned} \quad [122]$$

Jeżeli kierunki elementów r i r' są wzajemnie prostopadłe, to

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

i równanie [122] da nam kąt odkształcenia postaciowego pomiędzy tymi kierunkami.

74. Główne osie odkształcenia. Z równania [121] możemy otrzymać geometryczną interpretację zmiany odkształcenia w punkcie. W tym celu odłóżmy w kierunku każdego z liniowych elementów, takich jak r (rys. 134), promień wodzący o długości

$$R = \frac{k}{\sqrt{|\varepsilon|}} \quad [a]$$

Następnie, postępując tak jak to zostało wyjaśnione w par. 68, możemy pokazać, że końce tych promieni leżą na powierzchni danej równaniem

$$\pm k^2 = \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \gamma_{yz} yz + \gamma_{xz} xz + \gamma_{xy} xy \quad [123]$$

Kształt i położenie tej powierzchni są określone w zupełności przez stan odkształcenia w punkcie i nie zależą od kierunków osi współrzędnych. Zawsze możemy przyjąć takie kierunki ortogonalnych współrzędnych, że wyrazy z iloczynami współrzędnych w równaniu [123] znikną, tzn. że odkształcenia postaciowe dla takich kierunków będą równe zeru. Kierunki te nazywają się *osiąmi głównymi odkształcenia*, odpowiednie płaszczyzny *płaszczyznami głównymi odkształcenia*, oraz odpowiednie odkształcenia *odkształceniami głównymi*. Z powyższych rozważań wynika, że osie głównych odkształceń pozostaną wzajemnie prostopadłe po odkształceniu, a prostopadłością o podstawie prostokątnej i ścianach równoległych do płaszczyzn głównych pozostanie po odkształceniu również prostopadłością o podstawie prostokątnej. W przypadku ogólnym dozna on małego obrotu.

Jeżeli osie x, y i z są odkształceniami głównymi, to równanie [123] przyjmie postać

$$\pm k^2 = \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2$$

W tym przypadku wydłużenie dowolnego elementu liniowego o cosinusach kierunkowych l, m, n , zgodnie z równaniem [121], będzie równe

$$\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 \quad [124]$$

a kąt odkształcenia postaciowego, odpowiadający dwóm prostopadłym kierunkom r i r' , zgodnie z równaniem [122], równa się

$$\gamma_{rr'} = 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn') \quad [125]$$

Stąd możemy zauważyć, że odkształcenie w punkcie jest wyznaczone w zupełności, jeżeli znamy kierunki osi głównych odkształcenia oraz wielkości głównych wydłużeń. Osie główne odkształcenia i wydłużenia główne możemy wyznaczyć w ten sam sposób, jak wyjaśniono w par. 70. Możemy również pokazać, że suma $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ pozostaje stała przy obrocie układu współrzędnych. Suma ta ma, jak wiadomo, proste fizyczne znaczenie, mianowicie przedstawia właściwe rozszerzenie objętościowe na skutek odkształceń w punkcie.

75. Obrót. W przypadku ogólnym przy odkształcaniu ciała dowolny jego element zmienia kształt, przesuwa się i obraca. Na skutek odkształcenia postaciowego brzegi nie obracają się o równe wielkości i musimy rozważyć, jak może być sprecyzowany obrót całego elementu. Każdy prostokątny element może być sprowadzony do swojej końcowej postaci, położenia i orientacji w następujących trzech etapach, poczynając od elementu ciała nieodkształconego:

1. Element zostaje poddany odkształceniom $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ oraz zorientowany tak, że kierunki głównych odkształceń nie zostały obrócone.

2. Element zostaje przesunięty tak, że jego środek zajmie końcowe położenie.

3. Element zostaje obrócony aż do przyjęcia końcowej orientacji.

Obrót w etapie 3 jest oczywiście obrotem kierunków głównego odkształcenia i przeto jest niezależny od wyboru osi x, y, z . Obrót ten musi być możliwy do wykonania, gdy są zadane przemieszczenia u, v, w , lecz z drugiej strony jest oczywiście niezależny od składowych odkształceń.

Ponieważ przesunięcie elementu nie interesuje nas tutaj, możemy rozpatrywać przemieszczenie punktu O_1 tak jak w par. 73 i rys. 134 względem punktu O , będącego środkiem elementu. To przemieszczenie względne dane jest związkami [b] par. 73

$$\begin{aligned} u_1 - u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v_1 - v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w_1 - w &= \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad [a]$$

Wprowadzając oznaczenia [e] par. 73 na składowe odkształcenia oraz stosując oznaczenia następujące¹⁾

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \omega_x; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \omega_y; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_z \quad [126]$$

możemy zapisać równania [a] w postaci

$$\begin{aligned} u_1 - u &= \varepsilon_x \delta x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \delta z - \omega_z \delta y + \omega_y \delta z \\ v_1 - v &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta x + \varepsilon_y \delta y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \delta z - \omega_x \delta z + \omega_z \delta x \\ w_1 - w &= \frac{1}{2} \gamma_{xz} \delta x + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \delta y + \varepsilon_z \delta z - \omega_y \delta x + \omega_x \delta y \end{aligned} \quad [b]$$

wyrażającej przemieszczenie względne w dwóch częściach, z których jedna zależy tylko od składowych odkształceń, a druga — od wielkości $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Obecnie możemy pokazać, że $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ są w rzeczywistości składowymi obrotu 3. Rozważmy powierzchnię daną równaniem [123]. Kwadrat promienia w dowolnym kierunku jest odwrotnie proporcjonalny do wydłużenia względnego liniowego elementu w tym kierunku. Równanie [123] posiada postać następującą:

$$F(x, y, z) = \text{const} \quad [c]$$

Jeżeli rozpatrzmy sąsiedni punkt $x+dx, y+dy, z+dz$ na powierzchni, otrzymujemy związek w postaci

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \quad [d]$$

Przesunięcie dx, dy, dz wzięto w kierunku, w którym cosinusy kierunkowe są proporcjonalne do dx, dy, dz . Trzy wielkości $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z$ również określają kierunek, ponieważ

¹⁾ Z rys. 6 widzimy, że $\partial v/\partial x$ i $-\partial u/\partial y$, występujące w wyrażeniu na ω_z , są obrotami w kierunku obrotu wskazówek zegara liniowych elementów $O'A', O'B'$ z ich początkowych położań OA, OB . W ten sposób ω_z jest średnią tych obrotów, a ω_x, ω_y mają podobne znaczenia w płaszczyznach yz i xz .

możemy przyjąć cosinusy kierunkowe proporcjonalne do nich. A więc lewa strona równania [d] jest proporcjonalna do cosinusa kąta pomiędzy tymi dwoma kierunkami. Ponieważ wielkość ta znika, to te dwa kierunki są względem siebie prostopadłe, a ponieważ dx, dy, dz przedstawiają kierunek leżący w płaszczyźnie stycznej do powierzchni w punkcie x, y, z , to kierunek przedstawiony przez $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z$ jest kierunkiem normalnej do powierzchni danej równaniem [c].

W naszym przypadku $F(x, y, z)$ jest funkcją występującą po prawej stronie równania [123]. W ten sposób

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2\varepsilon_x x + \gamma_{xy} y + \gamma_{xz} z \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \gamma_{xy} x + 2\varepsilon_y y + \gamma_{yz} z \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \gamma_{xz} x + \gamma_{yz} y + 2\varepsilon_z z \end{aligned} \quad [c]$$

Jeśli powierzchnia, dana równaniem [123], posiada środek w punkcie O (rys. 134), to możemy utożsamić $\delta x, \delta y, \delta z$ z równań [b] ze zmiennymi x, y, z , występującymi w równaniach [e].

Rozpatrzmy teraz przypadek szczególny, gdy $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ są równe zeru. Wtedy prawe strony równań [e] są takie same jak prawe strony równań [b] po pomnożeniu przez 2. Stąd przemieszczenie dane równaniami [b] jest normalne do powierzchni danej równaniem [123]. Rozpatrując punkt O_1 (rys. 134) jako punkt powierzchni, wnioskujemy że przemieszczenie punktu O_1 jest normalne do powierzchni w punkcie O_1 . Stąd jeżeli OO_1 jest jedną z osi głównych odkształcenia, to znaczy jedną z głównych osi powierzchni, przemieszczenie O_1 posiada kierunek OO_1 i dlatego OO_1 nie obraca się. Wspomniane przemieszczenie odpowiada etapowi 1.

W celu pełnego wyrażenia przemieszczeń musimy wprowadzić do równań [b] wyrazy zawierające $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Lecz wyrazy te odpowiadają małemu obrotowi ciała sztywnego o składowych $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ względem osi x, y, z . Zatem wielkości te, dane związkami [126], wyrażają obrót przedstawiony w etapie 3, czyli obrót osi głównych odkształcenia naokoło punktu O . Są one nazywane po prostu *składowymi obrotami*.

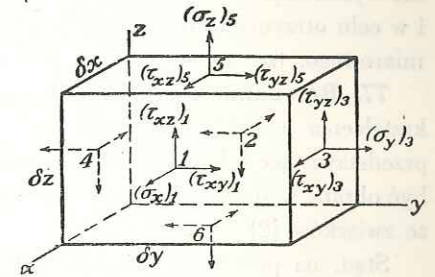
ZADANIE

1. Podać równanie powierzchni o środku w punkcie O , typu $f(x, y, z) = 0$, która po jednorodnym odkształceniu przedstawionym w par. 72 będzie powierzchnią kuli $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Jaki to rodzaj powierzchni?

ROZDZIAŁ 9

TWIERDZENIA OGÓLNE

76. Równania różniczkowe równowagi. W par. 67 rozważaliśmy stan naprężenia w punkcie ciała sprężystego. Rozpatrzmy obecnie zmianę stanu naprężeń wraz ze zmianą położenia punktu. W tym celu musimy zbadać warunki równowagi prostopadłościanu o bokach $\delta x, \delta y, \delta z$ (rys. 135). Składowe naprężenia działające na boki tego małego elementu i ich dodatnie kierunki są zaznaczone na rysunku. Bierzymy tu pod uwagę małe zmiany składowych naprężenia, spowodowane małymi przyrostami współrzędnych $\delta x, \delta y, \delta z$. Oznaczając środki boków elementu przez 1, 2, 3, 4, 5, 6 jak na rys. 135, rozróżniamy wartości σ_x w punkcie 1 i w punkcie 2 pisząc odpowiednio $(\sigma_x)_1$ i $(\sigma_x)_2$. Symbol σ_x oznacza oczywiście wartość tej składowej naprężenia w punkcie x, y, z . Przy wyznaczaniu sił działających na element, przyjmiemy, że boki elementu są bardzo małe. Siły te otrzymamy, mnożąc naprężenia w środku ciężkości ściany elementu przez jego powierzchnię.



Rys. 135

Należy zauważyć, że siły masowe działające na element, które w przypadku rozpatrywania równowagi czworościanu (rys. 132) były pomijane jako wielkości małe wyższego rzędu, teraz muszą być wzięte pod uwagę; są one bowiem wielkościami tego samego rzędu co i tym razem uwzględniane wyrazy, zawierające zmiany składowych naprężenia. Jeżeli X, Y, Z będą oznaczać składowe tych sił odniesione do jednostki objętości elementu, to równanie równowagi, otrzymane przez sumowanie wszystkich sił działających na element w kierunku osi x , ma postać

$$[(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_2] \delta y \delta z + [(\tau_{xy})_3 - (\tau_{xy})_4] \delta x \delta z + [(\tau_{xz})_5 - (\tau_{xz})_6] \delta x \delta y + X \delta x \delta y \delta z = 0$$

W ten sam sposób otrzymamy dwa pozostałe równania równowagi. Po podzieleniu przy $\delta x, \delta y, \delta z$ i przejściu do granicy przez ograniczenie elementu do punktu x, y, z , znajdujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \quad [127]$$

Równania [127] muszą być spełnione we wszystkich punktach ciała. Naprężenia zmieniają

się w obrębie ciała i na jego powierzchni muszą być w równowadze z siłami zewnętrznymi, działającymi na powierzchnię ciała. Te warunki równowagi na powierzchni możemy otrzymać z równań [112]. Gdy bok BCD czworobokianu $OBCD$ (rys. 132) pokrywa się z powierzchnią ciała, wówczas składowe sił powierzchniowych $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ odniesionych do jednostki powierzchni w tym punkcie (równanie [112]) przyjmą postać

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ \bar{Y} &= \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l \\ \bar{Z} &= \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m\end{aligned}\quad [128]$$

gdzie l, m, n są cosinusami kierunkowymi zewnętrznej normalnej do powierzchni ciała w rozpatrywanym punkcie.

Jeżeli naszym zadaniem jest wyznaczenie stanu naprężenia w ciele poddanym działaniu zadanych sił, musimy rozwiązać równania [127], przy czym rozwiązanie musi spełniać warunki brzegowe [128]. Równania te, zawierające sześć składowych stanu naprężenia $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots$, nie wystarczają do wyznaczenia tych składowych. Zagadnienie jest statycznie niewyznaczalne i w celu otrzymania rozwiązania musimy postąpić tak jak w przypadku zagadnienia dwuwymiarowego, tzn. musimy wziąć pod uwagę również odkształcenia sprężyste ciała.

77. Równania ciągłości odkształceń. Należy zauważyć, że sześć składowych odkształceń w każdym punkcie jest w zupełności określonych przez trzy funkcje u, v, w , przedstawiające składowe przemieszczenia. Wynika stąd, że składowe odkształcenia nie mogą być obrane w sposób dowolny jako funkcje x, y, z , lecz muszą spełniać zależności wynikające ze związków [2] (patrz str. 23).

Stąd, na podstawie związków [2], mamy

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

skąd

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad [a]$$

Dwie dalsze zależności tego samego rodzaju możemy otrzymać przez cykliczną zamianę liter x, y, z .

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}; & \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\end{aligned}$$

skąd znajdziemy, że

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad [b]$$

Dwie dalsze zależności rodzaju [b] możemy otrzymać przez zamianę liter x, y, z . W ten sposób doszliśmy do następujących sześciu różniczkowych zależności pomiędzy składowymi odkształ-

cenia, które muszą być spełnione na podstawie związków [2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad [129]$$

Te zależności¹⁾ różniczkowe są nazywane *równaniami nierozdzielności* lub *równaniami ciągłości odkształceń*.

Wykorzystując prawo Hooke'a (równanie [3]), zależności [129] możemy przekształcić w zależności pomiędzy składowymi naprężenia. Weźmy np. warunek

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad [c]$$

Z zależności [3] i [4], stosując oznaczenia [7], znajdziemy

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_y - \nu \Theta]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_z - \nu \Theta]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1 + \nu) \tau_{yz}}{E}$$

Podstawiając wyrażenia te do [c], otrzymamy

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \quad [d]$$

Prawa strona równania może być przekształcona za pomocą równań równowagi [127]. Z tych równań znajdziemy

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - Z$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - Y$$

Różniczkując pierwsze z tych równań względem z oraz drugie względem y i dodając je do siebie, mamy

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial y}$$

1) Dowody, że te sześć równań wystarcza, aby zapewnić istnienie stanu przemieszczenia, odpowiadającego danemu zbiorowi funkcji $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$, można znaleźć w książce A. E. H. Love'a: „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 wyd. str. 49 i I. S. Sokolnikoffa: „Mathematical Theory of Elasticity“, str. 24, 1946.

lub wykorzystując pierwsze z równań [127]

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Podstawiając powyższe równanie do równania [d] i stosując w celu uproszczenia zapisu symbol

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

znajdziemy

$$(1 + \nu) \left(\nabla^2 \Theta - \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) = (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \quad [e]$$

Dwa analogiczne równania możemy otrzymać z dwu pozostałych równań ciągłości typu [c].

Dodając do siebie wszystkie trzy równania typu [e], znajdziemy

$$(1 - \nu) \nabla^2 \Theta = - (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)$$

Podstawiając to wyrażenie na $\nabla^2 \Theta$ do równania [e], mamy

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = - \frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \quad [f]$$

Możemy otrzymać trzy równania tego rodzaju odpowiadające pierwszym trzem równaniom [129]. W ten sam sposób przekształcone pozostałe trzy warunki [129] przyjmują postać

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \quad [g]$$

Jeżeli nie działają siły masowe lub jeżeli są one stałe, to równania [f] i [g] przyjmą postać

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0; & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0; & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0; & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad [130]$$

Widzimy stąd, że oprócz równań równowagi [127] i warunków brzegowych, składowe naprężenia w ciele izotropowym muszą spełniać dodatkowo sześć równań nierozdzielności [f] i [g] lub sześć warunków [130]. Ten układ równań jest w ogólności dostateczny do jednoznacznego wyznaczenia składowych stanu naprężenia (patrz par. 82).

Równania nierozdzielności zawierają jedynie drugie pochodne składowych stanu naprężenia. Stąd, jeżeli zewnętrzne siły są tego rodzaju, że równania równowagi [127] łącznie z warunkami brzegowymi [128] mogą być spełnione przez przyjęcie składowych naprężenia w postaci bądź to stałych, bądź też liniowych funkcji współrzędnych, równania nierozdzielności będą spełnione tożsamościowo i taki układ naprężeń będzie prawidłowym rozwiązaniem zagadnienia. Kilka przykładów takich zagadnień rozpatrzmy w rozdziale 10.

78. Wyznaczenie przemieszczeń. Jeśli składowe stanu naprężenia zostały znalezione za pomocą poprzednich równań, to składowe odkształcenia mogą być wyznaczone na podstawie prawa *Hooke'a* (zależności [3] i [6]). Równania [2] wykorzystamy do określenia przemieszczeń u, v, w . Różniczkując wyrażenia [2] względem x, y, z możemy otrzymać 18 równań, zawierających 18 drugich pochodnych u, v, w z których można wyznaczyć wszystkie te pochodne. Dla u otrzymujemy np.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad [a]$$

Drugie pochodne dla dwu pozostałych składowych przemieszczenia v i w możemy otrzymać przez cykliczną zmianę w równaniach [a] liter x, y, z .

Teraz u, v, w możemy otrzymać przez dwukrotne całkowanie tych drugich pochodnych. Wprowadzenie dowolnych stałych całkowania spowoduje dodanie do wielkości u, v, w liniowych funkcji x, y, z , jest bowiem jasne, że funkcje takie można dodać do u, v, w bez wpływu na równania [a]. Aby składowe odkształcenia [2] pozostały przy takim dodaniu niezmiennione, dodatkowe funkcje liniowe muszą mieć postać

$$\begin{aligned} u' &= a + by - cz \\ v' &= d - bx + ez \\ w' &= f + cx - ey \end{aligned} \quad [b]$$

Oznacza to, że przemieszczenia nie są całkowicie określone przez naprężenia i odkształcenia. Do przemieszczeń znalezionych z równań różniczkowych [127], [128], [130] możemy dodać przemieszczenie odpowiadające przemieszczeniom ciała sztywnego. Stałe a, d, f w wyrażeniach [b] przedstawiają postępowy ruch ciała, a stałe b, c, e są trzema obrotami sztywnego ciała wokół osi układu współrzędnych. O ile dysponujemy dostateczną liczbą więzów, aby zapobiec ruchowi ciała sztywnego, to sześć stałych z wyrażań [b] możemy łatwo obliczyć tak, aby były spełnione warunki więzów. Poniżej podajemy kilka przykładów takich obliczeń.

79. Równania równowagi wyrażone przez przemieszczenia. Jednym ze sposobów rozwiązania zagadnień sprężystości jest eliminacja składowych naprężenia z równań [127] i [128] na podstawie prawa *Hooke'a* i wyrażenie składowych stanu odkształcenia w przemieszczeniach za pomocą związków [2]. W ten sposób otrzymujemy trzy równania równowagi zawierające tylko trzy nieznanne funkcje u, v, w . Podstawiając z [11] do pierwszego z równań [127]

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad [a]$$

i z równań [6]

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad [b]$$

znajdujemy

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X = 0$$

Dwa pozostałe równania mogą być przekształcone w ten sam sposób. Następnie stosując symbol ∇^2 (patrz str. 212) doprowadzimy równania równowagi [127] do postaci

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0 \end{aligned} \quad [131]$$

oraz w przypadku znikania sił masowych

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \quad [132]$$

Różniczkując te równania, pierwsze względem x , drugie względem y i trzecie względem z oraz dodając je do siebie, mamy

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 e = 0$$

tzn. że rozszerzenie objętościowe $[e]$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad [133]$$

Dojdziemy do tego samego wniosku, gdy siły masowe będą stałe w całej objętości ciała.

Podstawiając wielkości naprężeń z takich równań jak [a] i [b] do warunków brzegowych [128], dostaniemy

$$\bar{X} = \lambda e l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) \quad [134]$$

Równania [131] wraz z warunkami brzegowymi [134] wyznaczają w zupełności trzy funkcje u, v, w . Znając je, otrzymamy składowe odkształcenia ze związków [2] oraz składowe naprężenia z zależności [9] i [6]. Zastosowanie tych równań będzie pokazane w rozdziale 15.

80. Ogólne rozwiązanie wyrażone w przemieszczeniach. Możemy łatwo sprawdzić przez podstawienie, że równania różniczkowe równowagi w przemieszczeniach [132]

są spełnione przez funkcje¹⁾

$$\begin{aligned} u &= \Phi_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3) \\ v &= \Phi_2 - \alpha \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3) \\ w &= \Phi_3 - \alpha \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3) \end{aligned}$$

gdzie $4\alpha = 1/(1-\nu)$, a cztery funkcje $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ są harmoniczne, tzn.

$$\nabla^2 \Phi_0 = 0; \quad \nabla^2 \Phi_1 = 0; \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0; \quad \nabla^2 \Phi_3 = 0$$

Możemy wykazać, że rozwiązanie to jest ogólne i, że dowolna z powyższych czterech funkcji może być opuszczona bez uszczerbku dla ogólności rozważań.

Ta postać rozwiązania została przystosowana do współrzędnych krzywoliniowych przez *Neubera*, który zastosował ją do rozwiązywania zagadnień ciał o kształcie brył obrotowych²⁾ ograniczonych hiperbolami (rowek hiperboliczny na walcu) i elipsami (wydrążenie w postaci elipsoidy obrotowej), przenoszących rozciąganie, zginanie, skręcanie lub siły poprzeczne z towarzyszącym im zginaniem.

81. Zasada superpozycji. Rozwiązanie zagadnienia dla danego ciała sprężystego, gdy zadane są siły powierzchniowe i masowe, wymaga wyznaczenia składowych naprężenia lub przemieszczeń, które spełniają równania różniczkowe i warunki brzegowe. Jeżeli mamy do czynienia ze składowymi naprężeniami, to musimy spełnić: a) równania równowagi [127]; b) równania nierozdzielności [129]; c) warunki brzegowe [128]. Niech $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ będą składowymi naprężeniami wyznaczonymi w ten sposób i wywołanymi przez siły powierzchniowe $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ oraz siły masowe X, Y, Z .

Niech $\sigma'_x, \dots, \tau'_{xy}, \dots$ będą składowymi naprężeniami w tym samym ciele sprężystym, spowodowanymi przez siły powierzchniowe $\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}'$ oraz siły masowe X', Y', Z' . Wtedy składowe naprężenia $\sigma_x + \sigma'_x, \dots, \tau_{xy} + \tau'_{xy}, \dots$ będą przedstawiać naprężenia spowodowane siłami powierzchniowymi $\bar{X} + \bar{X}', \dots$, oraz siłami masowymi $X + X', \dots$. Otrzymujemy rozwiązanie w takiej postaci, ponieważ wszystkie równania różniczkowe i warunki brzegowe są liniowe. Przeto dodając pierwsze z równań [127] do odpowiadającego mu równania

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X' = 0$$

otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x + \sigma'_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} + \tau'_{xz}) + X + X' = 0$$

i podobnie przez dodanie pierwszego z równań [128] do jego odpowiednika mamy

$$\bar{X} + \bar{X}' = (\sigma_x + \sigma'_x) l + (\tau_{xy} + \tau'_{xy}) m + (\tau_{xz} + \tau'_{xz}) n$$

¹⁾ Rozwiązanie to zostało podane niezależnie przez *P. F. Papkowicza*: „Compt. Rend.“, tom 195, str. 513 i 754, 1932 i przez *H. Neubera*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 14, str. 203, 1934. Inne rozwiązania ogólne zostały podane przez *B. Galerkinę*: „Compt. rend.“, tom 190, str. 1047, 1930 i przez *Boussinesqa* i *Kelwina* patrz *Todhunter* i *Pearson*: „History of Elasticity“, tom 2, część 2, str. 268. Patrz również *R. D. Mindlin*: „Bull. Am. Math. Soc.“, 1936, str. 373.

²⁾ *H. Neuber*: „Kerbspannungslehre“. Książka ta zawiera rozwiązania zagadnień dwuwymiarowych. Patrz powyżej, rozdział 7.

W podobny sposób możemy połączyć równania nierozdzielności. Kompletny układ równań wskazuje, że $\sigma_x + \sigma'_x, \dots, \tau_{xy} + \tau'_{xy}, \dots$, spełniają wszystkie równania i warunki wyznaczające naprężenia spowodowane siłami $\bar{X} + \bar{X}', \dots, X + X', \dots$. Jest to *zasada superpozycji*.

Przy wyprowadzeniu naszych równań równowagi [127] i warunków brzegowych [128] nie robiliśmy różnicy pomiędzy położeniem i postacią elementu przed obciążeniem i jego położeniem i postacią po obciążeniu. W związku z tym, nasze równania i wyprowadzone z nich wnioski są ważne tylko w przypadku, gdy małe przemieszczenia i odkształcenia nie wpływają w sposób istotny na działanie sił zewnętrznych. Istnieją jednak przypadki, w których musimy wziąć pod uwagę odkształcenie. Wtedy podane powyżej uzasadnienie zasady superpozycji zawodzi. Belka poddana równoczesnemu ściskaniu i siłom poprzecznym jest przykładem tego rodzaju; wiele innych przykładów dostarcza rozważanie stateczności sprężystej konstrukcji cienkościennych.

82. Jednoznaczność rozwiązania. Rozważmy obecnie, czy nasze równania mogą posiadać więcej niż jedno rozwiązanie odpowiadające zadanym siłom powierzchniowym i masowym.

Niech $\sigma'_x, \dots, \tau'_{xy}, \dots$ przedstawiają rozwiązanie dla obciążeń \bar{X}, \dots, X, \dots , i niech $\sigma''_x, \dots, \tau''_{xy}, \dots$ przedstawiają *drugie* rozwiązanie dla tych *samych* obciążeń \bar{X}, \dots, X, \dots . Wówczas dla pierwszego z rozwiązań mamy następujące równania

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\bar{X} = \sigma'_x l + \tau'_{xy} m + \tau'_{xz} n$$

oraz równania nierozdzielności.

Dla drugiego rozwiązania mamy

$$\frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\bar{X} = \sigma''_x l + \tau''_{xy} m + \tau''_{xz} n$$

oraz równania nierozdzielności.

Odejmując otrzymamy, że rozkład naprężeń dany różnicami $\sigma'_x - \sigma''_x, \dots, \tau'_{xy} - \tau''_{xy}$ spełnia równania

$$\frac{\partial (\sigma'_x - \sigma''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau'_{xz} - \tau''_{xz})}{\partial z} = 0$$

$$0 = (\sigma'_x - \sigma''_x) l + (\tau'_{xy} - \tau''_{xy}) m + (\tau'_{xz} - \tau''_{xz}) n$$

w których wszystkie zewnętrzne siły znikają. Równania nierozdzielności [129] będą również spełnione przez odpowiednie składowe odkształcenia $\epsilon'_x - \epsilon''_x, \dots, \gamma'_{xy} - \gamma''_{xy}, \dots$

Tak więc otrzymany rozkład naprężeń jest tym, który odpowiada zerowym siłom powierzchniowym i masowym. Praca wykonana przez te siły w czasie obciążenia jest równa zeru i stąd wynika, że $\iiint V_0 dx dy dz$ znika. Lecz wyrażenie [85] wskazuje, że V_0 jest dodatnie dla wszystkich stanów odkształcenia i dlatego całka może zniknąć tylko wtedy, gdy V_0 znika we wszystkich punktach ciała. Jeśli tak jest istotnie, to każda składowa odkształcenia $\epsilon'_x - \epsilon''_x, \dots, \gamma'_{xy} - \gamma''_{xy}, \dots$ powinna równać się zeru. Dlatego dwa stany odkształcenia $\epsilon'_x, \dots, \gamma'_{xy}, \dots$ i $\epsilon''_x, \dots, \gamma''_{xy}, \dots$, a tym samym dwa stany naprężeń $\sigma'_x, \dots, \tau'_{xy}, \dots$ i $\sigma''_x, \dots, \tau''_{xy}, \dots$, są identyczne. Oznacza to, że równania mogą mieć tylko rozwiązanie odpowiadające danemu obciążeniu¹⁾.

Dowód jednoznaczności rozwiązania był oparty na założeniu, że energia odkształcenia, a stąd i same naprężenia, znikają w ciele, gdy jest ono wolne od sił zewnętrznych. Istnieją jednak przypadki, kiedy naprężenia wstępne w ciele mogą istnieć bez obecności sił zewnętrznych. Przykłady tego rodzaju napotkaliśmy przy badaniu pierścienia kołowego (patrz par. 39). Jeżeli wytniemy z pierścienia dwoma blisko leżącymi przekrojami jego część i końce pierścienia połączymy z powrotem za pomocą spawania lub innym sposobem, to w pierścieniu powstaną naprężenia własne²⁾ (samonaprężenia lub naprężenia wstępne). Kilka przykładów tego rodzaju rozważaliśmy przy rozpatrywaniu zagadnień dwuwymiarowych.

Naprężenia własne mogą również powstawać w ciałach jednospójnych na skutek niesprężystych odkształceń, występujących w czasie procesu obróbki. Na przykład mogą występować znaczne naprężenia własne w wielkich odkuwkach na skutek nierównomiernego ostygnięcia, jak również w metalowych belkach walcowanych na skutek płynięcia plastycznego, występującego przy obróbce na zimno. Do wyznaczenia tych naprężeń własnych równania sprężystości nie wystarczają i musimy rozważyć dodatkowe informacje, dotyczące procesu formowania ciała.

Należy zauważyć, że we wszystkich przypadkach, w których zasada superpozycji ma zastosowanie, naprężenia wstępne nie wpływają na naprężenia i odkształcenia, powstałe na skutek działania sił zewnętrznych i mogą być wyznaczone — tak, jak gdyby nie było samonaprężeń. Wtedy naprężenia całkowite otrzymamy przez superpozycję naprężeń spowodowanych siłami zewnętrznymi i samonaprężeń. W przypadkach gdy nie możemy zastosować zasady superpozycji, naprężenia spowodowane obciążeniem zewnętrznym nie mogą być wyznaczone bez znajomości naprężeń własnych. Nie możemy, na przykład, obliczyć naprężeń zginających w cienkiej belce, spowodowanych obciążeniami poprzecznymi, jeżeli belka jest poddana wstępnemu rozciąganiu lub ściskaniu, bez znajomości wielkości tych naprężeń własnych.

83. Twierdzenie o wzajemności prac. Ograniczmy się do rozważania przypadku dwuwymiarowego i rozpatrzmy tarczę, poddaną dwóm różnym obciążeniom. Oznaczmy przez $\bar{X}_1, \bar{Y}_1, X_1$ i Y_1 składowe siły występujących na brzegu i sił masowych w pierwszym

¹⁾ Jest to twierdzenie G. Kirchhoffa. Patrz jego „Vorlesungen über Math. Phys., Mechanik“.

²⁾ Pierścień jest najprostszym przykładem ciała wielospójnego. W przypadku takich ciał ogólne równania sprężystości wyrażone w składowych naprężeniach nie wystarczają do wyznaczenia naprężeń i w celu otrzymania pełnego rozwiązania musimy dodatkowo zbadać przemieszczenia. Pierwsze badania tego rodzaju przeprowadził J. H. Michell: „Proc. London Math. Soc.“, tom 31, str. 103, 1899. Patrz również L. N. G. Filon: „Brit. Assoc. Advancement Sci.“ Rept. 1921, str. 305, i V. Volterra: „Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexés“, Ann. école norm., Paryż, seria 3, tom 24, str. 401—517, 1907. Dalsze informacje dotyczące samonaprężeń dane są w pracy P. Neményi'ego: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 11, str. 59, 1931.

przypadku oraz przez $\bar{X}_2, \bar{Y}_2, X_2$ i Y_2 — w drugim przypadku. Przemieszczenia, składowe odkształcenia i składowe naprężenia będziemy w obu przypadkach oznaczać odpowiednio przez $u_1, v_1, \varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \gamma'_{xy}, \sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ i $u_2, v_2, \varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \gamma''_{xy}, \sigma''_x, \sigma''_y, \tau''_{xy}$. Rozważmy obecnie pracę, jaką wykonałyby siły pierwszego stanu naprężenia na odpowiednich przemieszczeniach drugiego stanu. Pracę tę przedstawia następujące wyrażenie

$$T = \int \bar{X}_1 u_2 ds + \int \bar{Y}_1 v_2 ds + \iint X_1 u_2 dx dy + \iint Y_1 v_2 dx dy \quad [a]$$

w którym pierwsze dwie całki są wzięte wzdłuż całego brzegu tarczy, a drugie dwie — po całej powierzchni tarczy. Podstawiając zamiast \bar{X}_1 jego wartość z wyrażenia [20] str. 37 możemy przedstawić pierwszy wyraz prawej strony wyrażenia [a] następująco

$$\int \bar{X}_1 u_2 ds = \int \sigma'_x u_2 ds + \int m \tau'_{xy} u_2 ds \quad [b]$$

Postępując obecnie zgodnie z objaśnieniem na str. 155 otrzymujemy

$$\int \sigma'_x u_2 ds = \iint u_2 \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} dx dy + \iint \frac{\partial u_2}{\partial x} \sigma'_x dx dy$$

$$\int m \tau'_{xy} u_2 ds = \iint u_2 \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} dx dy + \iint \frac{\partial u_2}{\partial y} \tau'_{xy} dx dy$$

Podstawiając powyższe do [b] znajdziemy pierwszy i trzeci wyraz wyrażenia [a]

$$\int \bar{X}_1 u_2 ds + \iint X_1 u_2 dx dy = \iint \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + X_1 \right) u_2 dx dy + \iint \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \sigma'_x + \frac{\partial u_2}{\partial y} \tau'_{xy} \right) dx dy \quad [c]$$

Podobnie drugi i czwarty wyraz

$$\int \bar{Y}_1 v_2 ds + \iint Y_1 v_2 dx dy = \iint \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + Y_1 \right) v_2 dx dy + \iint \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \sigma'_y + \frac{\partial v_2}{\partial x} \tau'_{xy} \right) dx dy \quad [d]$$

Zauważmy teraz, że pierwsze wyrazy prawych stron wyrażeń [c] i [d] znikają na podstawie równań równowagi [18]. Podstawiając do wyrażenia [a] otrzymujemy

$$T = \iint (\varepsilon''_x \sigma'_x + \varepsilon''_y \sigma'_y + \gamma''_{xy} \tau'_{xy}) dx dy = \frac{1}{E} \iint [\sigma''_x \sigma'_x + \sigma''_y \sigma'_y - \nu \sigma''_x \sigma'_x - \nu \sigma''_y \sigma'_y + 2(1 + \nu) \tau''_{xy} \tau'_{xy}] dx dy$$

Otrzymamy dokładnie ten sam wynik, jeżeli obliczymy pracę wykonaną przez siły drugiego stanu naprężenia na przemieszczeniach pierwszego stanu. W ten sposób, porównując dwa stany naprężenia ciała sprężystego, dochodzimy do wniosku, że praca wykonana przez siły pierwszego stanu na odpowiednich przemieszczeniach stanu drugiego jest równa pracy,

wykonanej przez siły drugiego stanu na odpowiednich przemieszczeniach pierwszego stanu. Jest to *twierdzenie o wzajemności prac*. Twierdzenie to może być łatwo rozszerzone na przypadek ciał w ruchu lub wykonujących drgania. Musimy tylko do sił zewnętrznych dodać siły bezwładności. Twierdzenie o wzajemności prac znalazło ważne zastosowanie w mechanice budowli w konstrukcji linii wpływowych. Również użyteczne zastosowania tego twierdzenia spotykamy w teorii sprężystości.

Weźmy prosty przykład, a mianowicie przypadek belki pryzmatycznej ściskanej¹⁾ dwiema równymi i przeciwnie skierowanymi siłami P (rys. 136a). Zagadnienie znalezienia naprężeń wywołanych tymi siłami jest skomplikowanym problemem, lecz przypuśćmy, że interesujemy się nie naprężeniami, ale całkowitym wydłużeniem δ belki. Zagadnienie możemy rozwiązać od razu, stosując twierdzenie o wzajemności prac. W tym celu rozważmy oprócz zadanego warunku naprężeniowego, przedstawionego na rys. 136a, proste osiowe rozciąganie belki, pokazane na rys. 136b. Dla tego drugiego przypadku znajdziemy zwięzienie poprzeczne $\delta_1 = \nu \frac{Qh}{AE}$, gdzie A jest powierzchnią przekroju belki. Twierdzenie o wzajemności prac daje nam równanie

$$P \cdot \nu \frac{Qh}{AE} = Q \delta$$

a wydłużenie belki spowodowane dwiema siłami P (rys. 136a) wynosi

$$\delta = \frac{\nu Ph}{AE}$$

i jest niezależne od kształtu przekroju.

Jako drugi przykład obliczymy zmniejszenie Δ objętości ciała sprężystego, spowodowane dwiema równymi i przeciwnie skierowanymi siłami P (rys. 137a). Jako drugi przypadek naprężeń rozpatrzymy działanie równomiernie rozłożonego ciśnienia p na to samo ciało. W tym ostatnim przypadku będziemy mieć w każdym punkcie ciała równomierne ściskanie we wszystkich kierunkach o wielkości $(1-2\nu)p/E$ (por. równanie [8] str. 25), a odległość l pomiędzy punktami przyłożenia A i B zmniejszy się o wielkość $(1-2\nu)pl/E$. Twierdzenie o wzajemności prac, zastosowane do dwu warunków naprężeń²⁾ (rys. 137), da nam

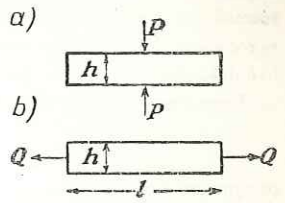
$$P \cdot \frac{(1-2\nu)pl}{E} = \Delta p$$

i stąd zmniejszenie objętości ciała

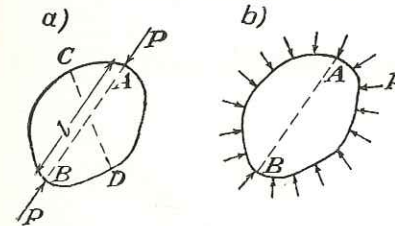
$$\Delta = \frac{Pl(1-2\nu)}{E}$$

¹⁾ W celu uniknięcia osobliwości możemy przyjąć, że siły są rozmieszczone na małej powierzchni. Siły skupione w zagadnieniach dwuwymiarowych wywołują zwykle przemieszczenia nieskończone, co wskazuje na to, że w rzeczywistości przemieszczenia zależą od rozkładu sił.

²⁾ Inne zastosowania tego rodzaju patrz *A. E. H. Love: „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 wyd., str. 174–176, 1927.*



Rys. 136



Rys. 137

84. **Przybliżony charakter rozwiązań dla płaskiego stanu naprężenia.** Wskazaliśmy na str. 39 że układ równań, który był wystarczający dla płaskiego stanu naprężenia przy założeniach ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ niezależnie od z), nie zapewniał spełnienia wszystkich równań nierozdzielności. Założenia te zakładają, że $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}$ są niezależne od z oraz że γ_{xz}, γ_{yz} są równe zero. Pierwsze z równań nierozdzielności [129] było włączone do teorii płaskiego stanu naprężenia jako równanie [21]. Możemy łatwo sprawdzić, że pozostałe pięć równań jest spełnionych jedynie, gdy ε_z jest liniową funkcją x i y , co stanowi przypadek szczególny (nie regułę) w rozwiązaniach płaskiego stanu naprężenia otrzymanych w rozdz. 3 do 7. Oczywiście rozwiązania te nie mogą być dokładne, lecz zobaczymy obecnie, że są one dużym przybliżeniem w przypadku cienkich tarcz.

Poszukajmy dokładnych rozwiązań równań trójwymiarowych zagadnień, dla których¹⁾

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

przyjmując siły masowe równe zero. Rozwiązania takie muszą spełniać równania równowagi [127] i równania ciągłości odkształceń [130].

Ponieważ $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ równają się zero, to druga kolumna równań [130] da nam

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0$$

co oznacza, że $\partial \Theta / \partial z$ jest stałe. Oznaczając tę stałą przez k , mamy po scałkowaniu względem z

$$\Theta = kz + \Theta_0 \quad [a]$$

gdzie Θ_0 jest jak dotąd dowolną funkcją x i y .

Trzecie z równań [127] jest spełnione tożsamościowo, a pierwsze dwa sprowadzają się do postaci dwuwymiarowej:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

i są spełnione, jak poprzednio, przez

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad [b]$$

przy czym obecnie Φ jest funkcją x, y i z .

Wracając do równań [130], zauważymy, że przez dodanie trzech równań po lewej stronie (przypominamy, że $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$) otrzymujemy

$$\nabla^2 \Theta = 0 \quad [c]$$

i dlatego z [a] mamy

$$\nabla^2 \Theta_0 = 0 \quad [d]$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Również, ponieważ σ_z jest równe zero a σ_x i σ_y są dane pierwszymi dwoma równaniami [b], możemy napisać $\Delta_1^2 \Phi = \Theta$ i dlatego, wykorzystując [a], mamy

$$\nabla_1^2 \Phi = kz + \Theta_0 \quad [e]$$

gdzie Θ_0 jest funkcją x i y , spełniającą równanie [d]. Biorąc pod uwagę [a] i pierwsze z równań [b], pierwsze z równań [130] przyjmie postać

$$(1 + \nu) \nabla^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} = 0 \quad [f]$$

lecz

$$\nabla^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\nabla_1^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\Theta_0 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)$$

¹⁾ A. Clebsch: „Elasticität“, par. 39. Patrz również A. E. H. Love: „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 wyd. str. 145, 1927.

gdzie w ostatnim etapie wykorzystaliśmy równanie [e]. Również, z powodu równania [d], możemy zastąpić $\partial^2 \Theta_0 / \partial y^2$ w [f] przez $-\partial^2 \Theta_0 / \partial x^2$. Wtedy [f] przyjmie postać

$$(1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\Theta_0 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2} = 0$$

lub

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \Theta_0 \right) = 0 \quad [g]$$

Równanie to zastępuje pierwsze z równań [130]. Podobnie drugie i ostatnie może być zastąpione następującymi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \Theta_0 \right) = 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \Theta_0 \right) = 0$$

Równania te łącznie z równaniem [g] wskazują, że wszystkie trzy drugie pochodne względem x i y funkcji (zmiennych x, y i z) w nawiasach znikają. A więc funkcja ta musi być liniowa względem x oraz y i możemy napisać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \Theta_0 = a + bx + cy \quad [h]$$

gdzie a, b i c są dowolnymi funkcjami z . Całkując powyższą równość dwukrotnie względem z , znajdziemy

$$\Phi = - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1 + \nu} \Theta_0 z^2 + A + Bx + Cy + \Phi_1 z + \Phi_0 \quad [i]$$

gdzie A, B, C są funkcjami z , otrzymanymi przez dwukrotne całkowanie a, b, c , a Φ_1, Φ_0 są funkcjami x i y , dotychczas dowolnymi.

Jeżeli obliczymy $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ z równania [i] za pomocą związków [b], to okazuje się, że wyrazy

$$A + Bx + Cy$$

nie mają wpływu na wielkość naprężeń. Możemy przeto przyjąć A, B i C równe zero, co odpowiada przyjęciu zerowych wartości dla a, b i c w równaniu [h].

Ograniczmy się do zagadnień, w których rozkład naprężeń jest symetryczny względem płaszczyzny środkowej tarczy, $z=0$. Wtedy $\Phi_1 z$ musi być również równe zero. A więc k w równaniu [a] również musi być równe zero.

W ten sposób [i] uprości się do

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1 + \nu} \Theta_0 z^2 \quad [j]$$

Jednakże Φ i Θ_0 są ze sobą związane równaniem [e], w którym obecnie możemy przyjąć $k=0$. W ten sposób, podstawiając [j] do [e] i wykorzystując [d], otrzymamy

$$\nabla_1^2 \Phi_0 = \Theta_0 \quad [k]$$

i dlatego z [d]

$$\nabla_1^4 \Phi_0 = 0 \quad [l]$$

Pozostałe równania [130] są spełnione z powodu równania [a] i znikania $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Obecnie możemy otrzymać rozkład naprężeń przez przyjęcie Φ_0 jako funkcji x i y , która spełnia równanie [l], oraz znalezienie Θ_0 z równania [k] i Φ z równania [j]. Naprężenia znajdziemy z zależności [b]. Każde z nich będzie się składać z dwóch części, pierwszej, wyprowadzonej z Φ_0 w równaniu [j] i drugiej, wyrazu $-\frac{1}{2} \frac{\nu}{1 + \nu} \Theta_0 z^2$. Wobec

równania [l] pierwsza część jest dokładnie taka, jak składowe płaskiego stanu naprężeń, wyznaczone w rozdz. 3 do 7. Drugą część, proporcjonalną do z^2 , możemy uczynić tak małą, jak tylko sobie życzymy, w porównaniu z pierwszą, przez ograniczanie się do tarcz dostatecznie cienkich. Stąd wniosek, że nasze rozwiązania w rozdz. 3 do 7, które nie spełniają równań ciągłości, są mimo to dobrymi przybliżeniami dla cienkich tarcz.

„Dokładne“ rozwiązania, przedstawione funkcją naprężeń w postaci [j], będą wymagały, aby naprężenia na brzegu, tak jak i wszędzie, zmieniały się na grubości parabolicznie. Jednak dowolna zmiana tego rozkładu, dopóki nie zmienia natężenia sił na jednostkę długości krzywej brzegu, wpływa na naprężenia jedynie w bezpośredniej bliskości brzegu, zgodnie z zasadą *Saint-Venanta* (str. 45). Postać rozwiązania, rozważona powyżej, będzie zawsze przedstawiała rzeczywiste naprężenia, a składowe $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ będą rzeczywiście równe zero z wyjątkiem okolicy brzegów.

ZADANIA

1. Udowodnić, że

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2); \quad \varepsilon_y = k(y^2 + z^2); \quad \gamma_{xy} = k'xyz; \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

gdzie k, k' są stałymi o małej wielkości, nie przedstawia możliwego stanu odkształcenia.

2. Ciało stałe zostało podgrzane nierównomiernie do temperatury T , będącej funkcją x, y i z . Jeżeli założymy, że każdy element może się rozszerzyć swobodnie pod działaniem temperatury, to składowe odkształcenia mają postać

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

gdzie α jest stałym współczynnikiem rozszerzalności cieplnej.

Udowodnić, że będzie to miało miejsce jedynie wtedy, gdy T jest liniową funkcją x, y i z . (Naprężenia i, co za tym idzie, odkształcenia powstałe na skutek nieliniowości T są rozpatrzone w rozdz. 14).

3. Tarcza lub walec o kształcie pokazanym na rys. 137a jest ściskana siłami P w punktach C i D wzdłuż CD , powodującymi wydłużenie odcinka AB . Następnie jest ściskana siłami P wzdłuż AB (rys. 137a), powodującymi wydłużenie CD . Udowodnić, że wydłużenia te są sobie równe.

4. Jakie funkcje $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ w rozwiązaniu ogólnym par. 80 dadzą nam ogólne rozwiązanie w przypadku płaskiego stanu odkształcenia ($w=0$)?

ROZDZIAŁ 10

ELEMENTARNE TRÓJWYMIAROWE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

85. Równomierny rozkład naprężenia. Rozważając równania równowagi [127] oraz warunki brzegowe [128] stwierdziliśmy, że rzeczywiste rozwiązanie zagadnienia musi spełniać nie tylko równania [127] i [128], lecz również równania ciągłości odkształceń (por. par. 77). Jeżeli nie działają siły masowe, albo jeżeli są one stałe, równania te zawierają jedynie drugie pochodne składowych stanu naprężenia. Jeżeli więc równania [127] i warunki [128] mogą być spełnione przez przyjęcie składowych naprężenia bądź stałych, bądź będących liniowymi funkcjami współrzędnych, to równania nierozdzielności będą spełnione tożsamościowo i naprężenia te będą prawidłowym rozwiązaniem postawionego zadania.



Rys. 138

Jako bardzo prosty przykład możemy wziąć rozciąganie pryzmatycznego pręta w kierunku osiowym (rys. 138). Siły masowe pomijamy. Równania równowagi są spełnione, jeśli przyjmujemy

$$\sigma_x = \text{const}; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad [a]$$

Jest oczywiste, że warunki brzegowe [128] na powierzchniach bocznych pręta, na które nie działają siły zewnętrzne, są spełnione, ponieważ wszystkie składowe naprężenia z wyjątkiem σ_x są równe zeru. Warunki brzegowe na końcach pręta sprowadzają się do warunku

$$\sigma_x = \bar{X} \quad [b]$$

tzn. mamy równomierny rozkład naprężeń rozciągających w przekroju poprzecznym pręta pryzmatycznego, jeżeli tylko naprężenia rozciągające są rozmieszczone równomiernie na jego końcach. W tym przypadku rozwiązanie [a] spełnia równania [127] i [128] i jest ścisłym rozwiązaniem zadania, ponieważ równania ciągłości [130] są spełnione tożsamościowo.

Jeżeli naprężenia rozciągające nie są rozmieszczone równomiernie na końcach pręta, to rozwiązanie [a] przestaje być rozwiązaniem ścisłym, ponieważ nie spełnia warunków brzegowych na końcach pręta. Prawdziwe rozwiązanie okaże się bardziej skomplikowane, ponieważ naprężenia w przekroju poprzecznym nie będą już rozmieszczone równomiernie. Przykłady takich nierównomiernych rozkładów napotykalismy przy rozważaniu zagadnień dwuwymiarowych (patrz str. 61 i 157).

Jako drugi przykład rozpatrzmy przypadek równomiernego ciśnienia hydrostatycznego przy braku sił masowych. Równania równowagi [127] są spełnione przez przyjęcie

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad [c]$$

W tym przypadku elipsoida naprężeń jest kulą. Dowolne trzy wzajemnie prostopadłe kierunki mogą być przyjęte jako kierunki główne i naprężenie w dowolnej płaszczyźnie jest normalnym

naprężeniem ściskającym równym p . Warunki na powierzchni [128] są oczywiście spełnione, jeśli ciśnienie p jest rozmieszczone w sposób równomierny na powierzchni ciała.

86. Rozciąganie pręta pryzmatycznego pod działaniem ciężaru własnego. Jeżeli ρg jest ciężarem jednostki objętości pręta (rys. 139), to siły masowe są równe

$$X = Y = 0; \quad Z = -\rho g \quad [a]$$

Równania różniczkowe równowagi [127] są spełnione, jeśli przyjmiemy

$$\sigma_z = \rho g z; \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad [b]$$

tn. założymy, że każdy przekrój poprzeczny jest poddany działaniu równomiernego rozciągania pod wpływem ciężaru dolnej części pręta.

Możemy łatwo przekonać się, że warunki brzegowe [128] na powierzchniach bocznych, na które nie działają siły, są spełnione. Dla dolnego końca pręta warunki brzegowe dają naprężenia równe zeru, a dla górnego końca równomiernie rozłożone naprężenia rozciągające $\sigma_z = \rho g l$, gdzie l jest długością pręta.

Rozwiązanie [b] spełnia również równania ciągłości [130], a stąd jest dokładnym rozwiązaniem zadania dla równomiernego rozkładu sił na górnym brzegu pręta. Rozwiązanie to pokrywa się z rozwiązaniem, które zwykle przytacza się w elementarnych podręcznikach wytrzymałości materiałów.

Rozważmy obecnie odkształcenia (por. par. 78). Z prawa Hooke'a, przy pomocy związków [3] i [6], znajdziemy

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho g z}{E} \quad [c]$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E} \quad [d]$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad [e]$$

Przemieszczenia u , v , w możemy teraz wyznaczyć całkując równania [c], [d] oraz [e]. Po scałkowaniu równania [c] otrzymujemy

$$w = \frac{\rho g z^2}{2E} + w_0 \quad [f]$$

gdzie w_0 jest funkcją x i y i zostanie wyznaczona później. Podstawiając [f] do drugiego i trzeciego z równań [e], znajdziemy

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

skąd

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0; \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0 \quad [g]$$

gdzie u_0 i v_0 są funkcjami tylko x i y . Podstawiając wyrażenia [g] do równania [d], mamy

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\nu \frac{\rho g z}{E}; \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E} \quad [h]$$

Pamiętając, że u_0 i v_0 nie zależą od z , równania [h] mogą być spełnione jedynie, gdy

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\nu \rho g}{E} \quad [k]$$

Podstawiając wyrażenia [g] na u i v do pierwszego z równań [e], otrzymamy

$$-2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

Ponieważ u_0 i v_0 nie zależą od z , muszą być spełnione warunki

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \quad [l]$$

Obecnie na podstawie równań [k] i [l] możemy napisać ogólne wyrażenia na funkcje u_0 , v_0 i w_0 . Łatwo zauważyć, że wszystkie te równania będą spełnione jeśli przyjmiemy

$$u_0 = \delta y + \delta_1$$

$$v_0 = -\delta x + \gamma_1$$

$$w_0 = \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma$$

w których α , β , γ , δ , δ_1 , γ_1 są dowolnymi stałymi. Teraz z wyrażeń [f] i [g] otrzymamy ogólne wyrażenia na przemieszczenia

$$u = -\frac{\nu \rho g x z}{E} - \alpha z + \delta y + \delta_1$$

$$v = -\frac{\nu \rho g y z}{E} - \beta z - \delta x + \gamma_1 \quad [m]$$

$$w = \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma$$

Sześć stałych dowolnych musimy wyznaczyć z warunków podparcia. Podparcie musi być takie, by zapobiec dowolnemu ruchowi pręta jako ciała sztywnego. Aby zapobiec ruchowi postępowemu pręta, założymy, że środek ciężkości A górnego końca pręta będzie tak ustalony, że $u=v=w=0$ dla $x=y$ oraz $z=l$. Aby zapobiec obrotowi pręta wokół osi przechodzącej przez punkt A i równoległej do osi x i y zamocujemy element osi z w punkcie A . Wtedy $\partial u/\partial x = \partial v/\partial z = 0$ w tym punkcie. Obrót wokół osi z zostanie uniemożliwiony przez ustalenie elementu płaszczyzny, przechodzącej przez punkt A i równoległej do płaszczyzny zx . Wtedy $\partial v/\partial x = 0$ w punkcie A . Wykorzystując związki [m], otrzymamy powyższe sześć warunków w punkcie A w postaci następującej

$$-\alpha l + \delta_1 = 0; \quad -\beta l + \gamma_1 = 0; \quad \frac{\rho g l^2}{2E} + \gamma = 0$$

$$\alpha = 0; \quad \beta = 0; \quad \delta = 0$$

Stąd

$$\delta_1 = 0; \quad \gamma_1 = 0; \quad \gamma = -\frac{\rho g l^2}{2E}$$

Ostatecznie wyrażenia dla przemieszczeń przyjmują postać

$$u = -\frac{\nu \rho g x z}{E}$$

$$v = -\frac{\nu \rho g y z}{E}$$

$$w = \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E}$$

Zauważymy, że punkty na osi z posiadają tylko przemieszczenia pionowe

$$w = -\frac{\rho g}{2E} (l^2 - z^2)$$

Inne punkty pręta z powodu zwichnięcia poprzecznego wykazują nie tylko pionowe, ale również i poziome przemieszczenia. Linie, które były równoległe do osi z przed odkształceniem, będą nachylone do tej osi po odkształceniu. Postać pręta po odkształceniu została zaznaczona na rys. 139 linią kreskowaną. Przekroje poprzeczne pręta prostopadłe do osi z , po odkształceniu zakrzywią się do powierzchni paraboloidy. Na przykład punkty przekroju $z=c$, po odkształceniu będą leżeć na powierzchni

$$z = c + w = c + \frac{\rho g c^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E}$$

Powierzchnia ta jest prostopadła do wszystkich podłużnych włókien pręta, te zaś po odkształceniu nachylone są do osi z tak, że nie będzie tam występowało odkształcenie postaciowe γ_{xy} lub γ_{xz} .

87. Skręcanie wałów o stałym przekroju kołowym. Elementarna teoria skręcania wałów kołowych zakłada, że naprężenia styczne τ w każdym punkcie przekroju poprzecznego (rys. 140) są prostopadłe do promienia r i proporcjonalne do jego długości oraz do kąta skręcenia jednostkowego θ wału:

$$\tau = G\theta r \quad [a]$$

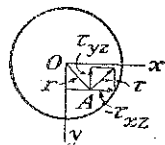
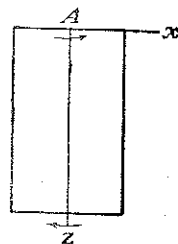
gdzie G jest modułem odkształcenia postaciowego. Rozkładając to naprężenie na dwie składowe równoległe do osi x i y , znajdziemy

$$\tau_{yz} = G\theta r \cdot \frac{x}{r} = G\theta x$$

$$\tau_{xz} = -G\theta r \cdot \frac{y}{r} = -G\theta y$$

Teoria elementarna zakłada również, że

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$



Rys. 140

Możemy udowodnić, że to rozwiązanie elementarne jest przy pewnych warunkach rozwiązaniem dokładnym. Ponieważ składowe naprężenia są albo liniowymi funkcjami współrzędnych, albo są równe zero, to równania ciągłości odkształceń [130] są spełnione i musimy rozważyć tylko równania równowagi [127] i warunki brzegowe [128]. Podstawiając powyższe wyrażenia składowych naprężenia do równań [127] stwierdzamy, że równania te są spełnione, jeżeli tylko nie działają siły masowe. Na powierzchni bocznej nie ma sił zewnętrznych, a warunki brzegowe [128], jeśli tylko wspomnimy, że dla powierzchni walcowej $\cos(Nz) = n = 0$, sprowadzają się do równania

$$0 = \tau_{xz} \cos(Nx) + \tau_{yz} \cos(Ny) \quad [c]$$

W przypadku walca kołowego mamy również

$$\cos(Nx) = \frac{x}{r}; \quad \cos(Ny) = \frac{y}{r} \quad [d]$$

Podstawiając te wartości i wyrażenia [b] na składowe naprężenia do równania [c], widzimy, że równanie to jest spełnione. Również jest oczywiste, że dla przekroju poprzecznego innego niż kołowy, dla którego wyrażenia [d] przestają być ważne, składowe naprężenia [b] nie spełniają warunków brzegowych [c] i rozwiązanie [a] nie może być zastosowane. Te bardziej skomplikowane zagadnienia skręcania zostaną rozpatrzone później (por. rozdz. 11).

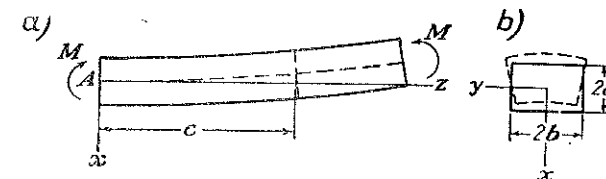
Rozważając obecnie warunki brzegowe na końcach wału widzimy, że siły styczne na powierzchni muszą być rozmieszczone dokładnie w ten sam sposób jak naprężenia τ_{xz} i τ_{yz} w przekrojach pośrednich wału. Jedynie w tym przypadku rozkład naprężeń dany wyrażeniami [b] będzie ścisłym rozwiązaniem zagadnienia. Praktycznie jednak zastosowanie tego rozwiązania nie ogranicza się do tych przypadków. Z zasady *Saint-Venanta* możemy wywnioskować, że w długim skręcanym pręcie w dostatecznej odległości od końców naprężenia zależą tylko od wielkości momentu skręcającego M , i praktycznie są niezależne od sposobu rozmieszczenia sił na końcach.

Przemieszczenia w tym przypadku mogą być znalezione w ten sam sposób, jak w poprzednim paragrafie. Przyjmując te same warunki więzów w punkcie A , co w poprzednim zadaniu, znajdziemy, że

$$u = -\theta y z; \quad v = \theta x z; \quad w = 0$$

Oznacza to, że przekrój poprzeczny pozostaje płaski, a promień pozostaje prosty, co stanowi założenie przyjmowane zwykle w elementarnej teorii skręcania.

88. Czyste zginanie belek pryzmatycznych. Rozpatrzmy belkę pryzmatyczną zginaną w jednej z jej płaszczyzn głównych dwiema równymi i przeciwnie skierowanymi parami sił M (rys. 141). Obierając początek układu współrzędnych w środku ciężkości prze-



Rys. 141

króju poprzecznego oraz płaszczyznę xz — w głównej płaszczyźnie zginania a składowe naprężenia określone na podstawie elementarnej teorii zginania, mamy

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R}; \quad \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad [a]$$

gdzie R jest promieniem krzywizny belki po zgięciu. Podstawiając wyrażenia [a] dla składowych naprężenia do równań równowagi [127], znajdziemy, że równania te są spełnione, jeżeli nie działają siły masowe. Warunki brzegowe [128] na bocznych powierzchniach belki, na których nie działają siły zewnętrzne, są również spełnione. Warunki brzegowe [128] na końcach belki żądają, aby siły powierzchniowe były rozmieszczone na końcach w ten sam sposób jak naprężenia σ_z . Jedyne przy tym warunku naprężenia [a] przedstawiają ściśle rozwiązanie zadania. Moment zginający M dany jest następującym wyrażeniem

$$M = \int \sigma_z x dA = \int \frac{Ex^2 dA}{R} = \frac{EJ_y}{R}$$

w którym J_y jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego belki względem osi obrotnej, równoległej do osi y . Z tego wyrażenia znajdziemy

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ_y}$$

Jest to znana zależność elementarnej teorii zginania.

Rozważmy obecnie przemieszczenia w przypadku czystego zginania. Stosując prawo Hooke'a i związki [2], otrzymamy zgodnie z rozwiązaniem [a]

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{R} \quad [b]$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R} \quad [c]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad [d]$$

Wykorzystując te równania różniczkowe i biorąc pod uwagę warunki zamocowania belki, możemy otrzymać przemieszczenia w ten sam sposób, jak w par. 86.

Z równania [b] znajdziemy

$$w = \frac{xz}{R} + w_0$$

gdzie w_0 jest wyłącznie funkcją x i y . Z drugiego i trzeciego równania [d] mamy

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

skąd

$$u = -\frac{z^2}{2R} - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0; \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0 \quad [e]$$

Tutaj u_0 i v_0 oznaczają nieznaną funkcje x i y , które zostaną wyznaczone poniżej. Podstawiając wyrażenia [e] do równań [c], mamy

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\nu x}{R}; \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R}$$

Równania te muszą być spełnione dla dowolnej wartości z , stąd

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad [f]$$

i po scałkowaniu

$$u_0 = -\frac{\nu x^2}{2R} + f_1(y); \quad v_0 = -\frac{\nu xy}{R} + f_2(x) \quad [g]$$

Podstawiając [e] i [g] do pierwszego z równań [d], dostajemy

$$2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} + \frac{\nu y}{R} = 0$$

Zauważmy, że tylko pierwszy wyraz tego równania zależy od z . Dochodzimy więc do wniosku, że konieczne jest spełnienie warunków

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - \frac{\nu y}{R} = 0$$

Równania te i równanie [f] żądają, żeby

$$w_0 = mx + ny + p$$

$$f_1(y) = \frac{\nu y^2}{2R} + \alpha y + \gamma$$

$$f_2(x) = -\alpha x + \beta$$

gdzie $m, n, p, \alpha, \beta, \gamma$ są dowolnymi stałymi. Obecnie dla przemieszczeń otrzymamy następujące wyrażenia

$$u = -\frac{z^2}{2R} - mz - \frac{\nu x^2}{2R} + \frac{\nu y^2}{2R} + \alpha y + \gamma$$

$$v = -nz - \frac{\nu xy}{R} - \alpha x + \beta$$

$$w = \frac{xz}{R} + mx + ny + p$$

Stałe dowolne wyznaczmy z warunków zamocowania. Przyjmując, że punkt A , środek ciężkości lewego końca belki, jak również element liniowy osi z oraz element płaszczyzny xz są zamocowane, mamy dla $x = y = z = 0$

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Warunki te są spełnione, jeśli przyjmujemy wartości wszystkich stałych dowolnych równe zeru. Wtedy

$$u = -\frac{1}{2R} [z^2 + \nu(x^2 - y^2)]; \quad v = -\frac{\nu xy}{R}; \quad w = \frac{xz}{R} \quad [h]$$

W celu otrzymania linii ugięcia osi belki podstawimy do powyższych wyrażeń [h] $x = y = 0$. Wtedy

$$u = -\frac{z^2}{2R} = -\frac{Mz^2}{2EJ_y}; \quad v = w = 0$$

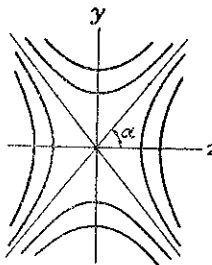
Jest to linia ugięcia, jaką znamy z elementarnej teorii zginania.

Rozważmy teraz dowolny przekrój poprzeczny $z = c$ w odległości c od lewego końca belki. Po odkształceniu punkty tego przekroju będą leżeć na płaszczyźnie

$$z = c + w = c + \frac{cx}{R}$$

tzn., że przy czystym zginaniu przekrój poprzeczny pozostaje płaski, tak jak to przyjęto w teorii elementarnej. W celu zbadania odkształceń przekroju poprzecznego w jego płaszczyźnie, rozważmy brzegi $y = \pm b$ (rys. 141b). Po zgięciu mamy

$$y = \pm b + v = \pm b \left(1 - \frac{vx}{R}\right)$$

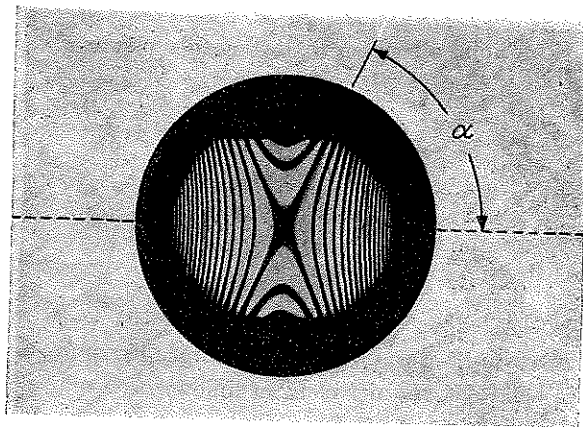


Rys. 142a

Brzegi nachyła się tak, jak to pokazano na rysunku linią kreskowaną. Pozostałe dwa brzegi przekroju poprzecznego $x = \pm a$ będą przedstawione po zgięciu równaniami

$$x = \pm a + u = \pm a - \frac{1}{2R} [c^2 + v(a^2 - y^2)]$$

Zginają się więc one według parabol, które można w przypadku małych odkształceń z dostateczną dokładnością zastąpić przez łuk koła o promieniu R/v . Rozważając górny lub dolny brzeg belki, widzimy, że podczas gdy krzywizna tych boków po zgięciu zwrócona jest wy-



Rys. 142b

kłością do dołu w kierunku długości belki, to krzywizna w kierunku poprzecznym zwrócona jest wypukłością do góry. Warstwice tej powierzchni siodłowej pokazane są na rys. 142a.

Przyjmując w pierwszym z równań [h], że x i u jest stałe, znajdziemy równanie warstwic

$$z^2 - vy^2 = \text{const}$$

Są więc one hiperbolami o asymptotach

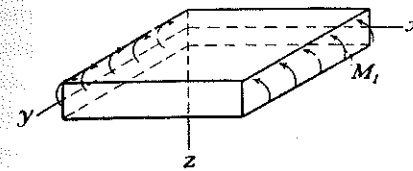
$$z^2 - vy^2 = 0$$

Z tego równania dostaniemy wyrażenie dla kąta α (rys. 142a)

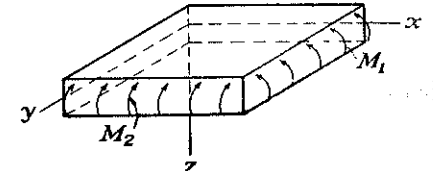
$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{v}$$

Z wyrażenia tego obliczono¹⁾ liczbę Poissona ν . Jeżeli górną powierzchnię belki wypolerujemy i położymy na niej płytkę szklaną, to po zgięciu, pomiędzy płytką szklaną i zakrzywioną powierzchnią belki, powstanie warstewka powietrza o zmiennej grubości. Grubość tę można zmierzyć sposobem optycznym. Wiązka światła monochromatycznego, powiedzmy żółtego światła sodu, prostopadła do płytki szklanej, będzie częściowo odbijana od płytki, a częściowo od powierzchni belki. Dwa odbite promienie światła ulegają interferencji w punktach, gdzie grubość szczeliny powietrznej jest taka, że różnica pomiędzy drogą dwóch promieni jest równa nieparzystej liczbie długości półfal danego światła. Fotografia pokazana na rys. 142b przedstawia otrzymane tym sposobem warstwice o kształcie hiperbol.

89. Czyste zginanie płyt. Wyniki poprzedniego paragrafu mogą być zastosowane do badania zginania płyt o stałej grubości. Jeżeli naprężenia $\sigma_x = Ez/R$ są rozmieszczone na



Rys. 143



Rys. 144

brzegach płyty równoległych do osi y (rys. 143), to powierzchnia płyty będzie²⁾ powierzchnią siodłową, której krzywizna w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny xz jest równa $1/R$, a w kierunku prostopadłym $-v/R$. Jeśli h oznacza grubość płyty, M_1 — moment zginający odniesiony do jednostki długości na brzegach równoległych do osi y oraz

$$J_y = \frac{1 \cdot h^3}{12}$$

jest momentem bezwładności odniesionym do jednostki długości, to wtedy związek pomiędzy M_1 i R , na podstawie poprzedniego paragrafu, przyjmie postać

$$\frac{1}{R} = \frac{M_1}{EJ_y} = \frac{12M_1}{Eh^3} \quad [a]$$

W przypadku gdy mamy zginanie momentami w dwóch prostopadłych kierunkach (rys. 144), krzywizny powierzchni ugięcia możemy otrzymać przez superpozycję. Niech $1/R_1$ i $1/R_2$ będą krzywiznami powierzchni ugięcia w płaszczyznach odpowiednio równoległych do płaszczyzn układu współrzędnych xz i zy ; następnie niech M_1 i M_2 będą momentami zginającymi na jednostkę długości, działającymi na brzegach równoległych odpowiednio do osi y i x . Wtedy, wykorzystując wyrażenie [a] i stosując zasadę superpozycji, mamy

$$\frac{1}{R_1} = \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) \quad [b]$$

¹⁾ A. Cornu: „Compt. rend“, tom 69, str. 333, 1869. Patrz również R. Straubel: „Wied. Ann“, tom 68, str. 369, 1899.

²⁾ Przyjęto, że ugięcia są małe w porównaniu z grubością płyty.

Zakładamy, że momenty są dodatnie i powodują ugięcie płyty wypukłością do dołu. Rozwiązując równania [b] względem M_1 i M_2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \nu \frac{1}{R_2} \right) \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_2} + \nu \frac{1}{R_1} \right) \end{aligned} \quad [c]$$

Dla małych ugięć możemy wykorzystać następujące przybliżenia

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Wtedy, oznaczając

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D \quad [135]$$

dostajemy

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad [136]$$

Stała D jest nazywana *płytową sztywnością zginania*. W szczególnym przypadku zginania walcowego płyty z tworzącymi równoległymi do osi y , mamy $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ i z wyrażeń [136] otrzymujemy

$$M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad [137]$$

$$M_2 = -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

W przypadku szczególnym, gdy $M_1 = M_2 = M$, mamy

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

Jest to kuliste zgięcie płyty i związek pomiędzy krzywizną i momentami zginającymi z wyrażenia [c] jest następujący

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \cdot \frac{1}{R} = \frac{D(1+\nu)}{R} \quad [138]$$

Wyniki te wykorzystamy w dalszym ciągu.

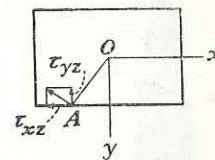
Wyrażenia [136] są używane w teorii płyt w przypadkach, gdy momenty nie są rozłożone równomiernie i towarzyszą im siły poprzeczne oraz ciśnienia powierzchniowe. W tych warunkach można je wyprowadzić z ogólnych równań rozdz. 9 jako przybliżenia, ważne w przypadku cienkiej płyty. W podobnym stosunku do siebie pozostają równania ogólne oraz elementarna teoria zginania¹⁾.

¹⁾ J. N. Goodier: „Trans. Roy. Soc. Can.“, 3 seria., sekcja III, tom 32, str. 65, 1938.

ROZDZIAŁ 11

SKRĘCANIE

90. Skręcanie prętów pryzmatycznych. Pokazaliśmy już w par. 87, że ściśle rozwiązanie zagadnienia skręcania wału kołowego otrzymamy przy założeniu, że przekrój poprzeczny pręta pozostanie płaski i obraca się w czasie skręcania bez zniekształcenia. Teoria ta, rozwinięta przez *Coulomba*¹⁾, została następnie zastosowana przez *Naviera*²⁾ do prętów pryzmatycznych o przekrojach niekołowych. Stosując powyższe założenie, *Navier* doszedł do błędnych wniosków, że przy danym momencie skręcającym kąt skręcenia pręta jest odwrotnie proporcjonalny do biegunowego momentu bezwładności przekroju poprzecznego oraz, że maksymalne naprężenia styczne występują w punktach najbardziej oddalonych od środka ciężkości przekroju³⁾. Łatwo sprawdzić, że powyższe założenie pozostaje w sprzeczności z warunkami brzegowymi. Weźmy dla przykładu pręt o przekroju prostokątnym (rys. 145). Z założenia *Naviera* wynika, że w każdym punkcie A brzegu naprężenie styczne powinno działać w kierunku prostopadłym do promienia OA . Rozkładając naprężenie to na dwie składowe τ_{xz} i τ_{yz} widzimy, że na element powierzchni bocznej pręta w punkcie A działałoby uzupełniające naprężenie styczne τ_{yz} (por. str. 21), co jest sprzeczne z założeniem, że na powierzchni bocznej pręta nie działają żadne siły zewnętrzne, a skręcanie jest wywołane parami sił, przyłożonymi na końcach pręta. Proste doświadczenie z prętem prostokątnym przedstawionym na rys. 146 pokazuje, że przekrój poprzeczny pręta nie pozostaje płaski w czasie skręcania i że zniekształcenia prostokątnych elementów na powierzchni pręta są największe w środkach boków pręta, tzn. w punktach, które są najbliższe osi pręta.



Rys. 145

Prawidłowe rozwiązanie zagadnienia skręcania prętów pryzmatycznych parami sił przyłożonymi na końcach pochodzi od *Saint-Venanta*⁴⁾.

Zastosował on tak zwaną *metodę półodwrotną*, polegającą na tym, że na początku przyjął pewne założenia, dotyczące odkształcenia skręcane go pręta i udowodnił, że stosując te założenia można spełnić równania równowagi [127] i warunki brzegowe [128]. Następnie z jednoznaczności rozwiązań równań teorii sprężystości (par. 82) wynika, że początkowe założenia są prawidłowe i że otrzymane rozwiązanie jest ścisłym rozwiązaniem zagadnienia skręcania.

Rozważmy pręt pryzmatyczny o dowolnym przekroju poprzecznym, skręcany parami sił przyłożonymi na końcach (rys. 147). Kierując się rozwiązaniem dla wału kołowego (str. 226),

¹⁾ „Histoire de l'académie“, 1784, str. 229—269, Paryż, 1787.⁵⁾

²⁾ *Navier*: „Resumé des leçons sur l'application de la mécanique“, 3 wyd., Paryż, 1864, wydane przez Saint-Venanta.

³⁾ Wnioski te są prawidłowe dla cienkiej warstwy sprężystej wyciętej z pręta dwoma przekrojami i utwierdzonej między doskonale sztywnymi tarczami. Patrz J. N. Goodier: „J. Applied Phys.“, tom 13, str. 167, 1942.

⁴⁾ „Mém. savants étrangers“, tom 14, 1855. Patrz również uwaga *Saint-Venanta* do książki *Naviera*, loc. cit., i I. Todhunter i K. Pearson: „History of the Theory of Elasticity“, tom 2.