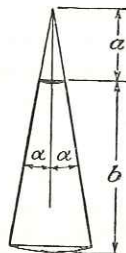


Rozpatrując wał kołowy o stałym przekroju, opisać zadanie rozwiązane za pomocą funkcji $\Phi = Czr^4$, gdzie C jest stałą dla $0 < z < l$.

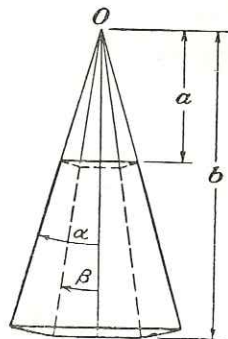
21. Udowodnić, że względny obrót końców (stożkowego) wału zbieżnego, pokazanego na rys. 185, wywołany momentem skręcającym M , wynosi

$$\frac{M}{2\pi \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right)} \cdot \frac{1}{3G} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right)$$

Jeżeli a i b są duże przy $b - a = l$, a α jest małe, to powyższy obrót powinien być bliski względnemu obrotowi końców skręcanego momentem M , wału, o stałym przekroju, długości l i promieniu α . Udowodnić, że tak jest w istocie.



Rys. 185



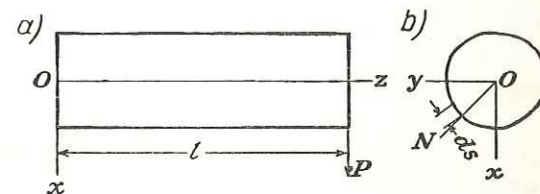
Rys. 186

22. Stosując funkcje, dane równaniami [o] i [q] par. 104 wyrazić względny obrót końców wydrążonego wału stożkowego, pokazanego na rys. 186, przez wielkość M . Końce wału ograniczone są powierzchniami kul o promieniach a i b i środku O .

ROZDZIAŁ 12

ZGINANIE PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH

105. Zginanie belek wspornikowych. Rozpatrując czyste zginanie (par. 88) pokazaliśmy, że jeżeli belka pryzmatyczna jest zginana w jednej z jej głównych płaszczyzn dwoma równymi i przeciwnie skierowanymi parami sił przyłożonymi na końcach, to jej linia ugięcia leży w tej samej płaszczyźnie, a z sześciu składowych naprężeń jedynie naprężenia normalne, równoległe do osi belki, są różne od zera. Naprężenia te są proporcjonalne do odległości od osi obojętnej. W ten sposób rozwiązanie ściśle pokrywa się w tym przypadku z elementarną teorią zginania. Rozpatrując zginanie siłą przyłożoną na końcu belek wspornikowych o wąskim przekroju prostokątnym (par. 20) pokazaliśmy, że oprócz naprężeń normalnych, proporcjonalnych w każdym przekroju do momentu zginającego, będą również występować naprężenia styczne proporcjonalne do siły poprzecznej.



Rys. 187

Rozpatrzmy obecnie przypadek ogólniejszy zginania belki wspornikowej dowolnego kształtu o stałym przekroju, siłą P przyłożoną na końcu i równoległą do jednej z głównych osi przekroju¹⁾ (rys. 187). Przyjmijmy początek układu współrzędnych w środku ciężkości utwierdzonego końca. Oś z pokrywa się z linią środkową belki, a osie x i y pokrywają się z głównymi osiami przekroju. Przy rozwiązywaniu zagadnienia zastosujemy metodę półodwrotną *Saint-Venanta* i na samym początku poczynimy pewne założenia, dotyczące naprężeń. Przyjmijmy, że naprężenia normalne, działające w przekroju poprzecznym w odległości z od utwierdzonego końca są rozmieszczone w ten sam sposób, co w przypadku czystego zginania:

$$\sigma_z = - \frac{P(l-z)x}{I} \quad [a]$$

Przyjmijmy również, że na te same przekroje poprzeczne działają naprężenia styczne, które rozkładamy w każdym punkcie na składowe τ_{xz} oraz τ_{yz} . Przyjmijmy, że pozostałe trzy składowe naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ są równe zero. Pokażemy obecnie, że stosując te założenia do rozwiązania, które spełnia wszystkie równania teorii sprężystości i dlatego jest ścisłym rozwiązaniem zagadnienia.

¹⁾ Zagadnienie to rozwiązał *Saint-Venant*: „J. mathématique”. (Liouville), seria 2, tom 1, 1856.

Przy podanych założeniach równania równowagi [127] z pominięciem sił masowych przyjmą postać

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad [b]$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{Px}{I} \quad [c]$$

Z równań [b] wnioskujemy, że naprężenia styczne nie zależą od z i są takie same we wszystkich przekrojach belki.

Rozważając teraz warunki brzegowe [128] i stosując je do powierzchni bocznej belki, wolnej od sił zewnętrznych, stwierdzimy, że pierwsze dwa z tych równań są spełnione tożsamościowo, a z trzeciego otrzymujemy

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0$$

Z rys. 187b widzimy, że

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}; \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}$$

gdzie ds jest elementem krzywej, ograniczającej przekrój poprzeczny. Warunek na brzegu przyjmuje postać

$$\tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0 \quad [d]$$

Przechodząc do równań nierozdzielności [130] widzimy, że pierwsze trzy z tych równań, zawierające składowe normalne naprężenia i ostatnie równanie, zawierające τ_{xy} , są spełnione tożsamościowo. Wtedy układ [130] upraszcza się do dwu równań

$$\nabla^2 \tau_{yz} = 0; \quad \nabla^2 \tau_{xz} = -\frac{P}{I(1+\nu)} \quad [e]$$

W ten sposób rozwiązanie zagadnienia zginania pryzmatycznej belki wspornikowej o dowolnym przekroju sprowadza się do znalezienia dla τ_{xz} i τ_{yz} funkcji x i y , spełniających równania równowagi [c], warunek brzegowy [d] oraz równania ciągłości [e].

106. Funkcja naprężeń. Przy rozpatrywaniu zagadnień zginania będziemy znowu wykorzystywać funkcję naprężeń $\Phi(x, y)$. Łatwo stwierdzić, że równania różniczkowe równowagi [b] i [c] poprzedniego paragrafu będą spełnione przez przyjęcie:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + f(y); \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad [171]$$

gdzie Φ jest funkcją naprężeń, zależną od x i y a $f(y)$ jest funkcją tylko y ; wyznaczmy ją później z warunku brzegowego.

Podstawiając [171] do równań ciągłości [e] poprzedniego paragrafu otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} - \frac{d^2 f}{dy^2}$$

Z równań tych dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy} + c \quad [a]$$

gdzie c jest stałą całkowania. Stała ta ma bardzo proste fizyczne znaczenie. Rozważmy obrót elementu powierzchni w płaszczyźnie przekroju poprzecznego belki wspornikowej. Obrót ten jest wyrażony równaniem

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Przyrost tego obrotu w kierunku osi z można zapisać w następujący sposób

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}$$

Stosując prawo Hooke'a i wyrażenia [171] na składowe naprężenia, otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial z} (2\omega_z) = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{df}{dy} \right)$$

Podstawiając do równania [a] mamy

$$-G \frac{\partial}{\partial z} (2\omega_z) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} + c \quad [b]$$

Jeżeli oś x jest osią symetrii przekroju poprzecznego, to zginanie siłą P wzdłuż tej osi da w wyniku symetryczny rozkład obrotu ω_z elementów przekroju (odpowiadającego krzywiznie siodłowej) o średniej wartości równej zero dla całego przekroju. A więc również średnia wartość $\partial \omega_z / \partial z$ będzie równa zero, co pociąga za sobą konieczność przyjęcia w równaniu [b] stałej c równej zero. Jeżeli przekrój poprzeczny nie jest symetryczny, to warunek znikania wartości średniej $\partial \omega_z / \partial z$ uznać możemy za *definicję*¹⁾ zginania bez skręcania, przy czym oczywiście znowu będziemy mieli $c=0$. Równanie [b] wskazuje wtedy, że $\partial \omega_z / \partial z$ znika dla elementów w środkach ciężkości przekrojów, tzn. elementy położone wzdłuż osi mają zerowy obrót względny, a jeżeli jeden z nich jest utwierdzony, to i pozostałe nie obracają się wokół osi. Przy c różnym zero równanie [a] przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy} \quad [172]$$

Podstawiając [172] do warunku brzegowego [d] poprzedniego paragrafu otrzymujemy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left[\frac{Px^2}{2I} - f(y) \right] \frac{dy}{ds} \quad [173]$$

Z równania tego, przy zadanej funkcji $f(y)$, możemy obliczyć wartości funkcji Φ wzdłuż brzegu przekroju poprzecznego. Równanie [172] wraz z warunkiem brzegowym [173] wyznaczają funkcję naprężeń Φ .

¹⁾ J. N. Goodier: „J. Aeronaut. Sci.“, tom 11, str. 273, 1944. Inną definicję zaproponował E. Trefftz: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 15, str. 220, 1935.

W zagadnieniach, które rozpatrzmy poniżej, będziemy przyjmować funkcję $f(y)$ w taki sposób, aby prawa strona równania [173] była równa zeru¹⁾. A więc Φ jest stałe wzdłuż brzegu. Przyjmując stałą tę równą zeru, sprowadzimy zagadnienie zginania do rozwiązywania równania różniczkowego [172] z warunkiem brzegowym $\Phi=0$ na brzegu. Zagadnienie to jest analogiczne do zagadnienia ugięcia równomiernie naciągniętej błony, mającej taki sam brzeg jak przekrój poprzeczny belki zginanej i poddanej ciągłemu obciążeniu, określone prawą stroną równania [172]. Obecnie pokażemy kilka zastosowań tej analogii.

107. Kołowy przekrój poprzeczny. Niech brzeg przekroju dany będzie równaniem

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad [a]$$

Prawa strona warunku brzegowego [173] stanie się zerem, o ile weźmiemy

$$f(y) = \frac{P}{2I} (r^2 - y^2) \quad [b]$$

Podstawiamy powyższe do równania [172]; funkcja naprężeń Φ jest wtedy określona równaniem

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1+2\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} \quad [c]$$

i warunkiem, że $\Phi=0$ na brzegu. W ten sposób funkcja naprężeń określona jest ugięciami błony o brzegu kołowym i o promieniu r , równomiernie rozciągniętej i poddanej obciążeniu poprzecznemu o intensywności proporcjonalnej do

$$-\frac{1+2\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

Jest jasne, że równanie [c] i warunek brzegowy są spełnione w przypadku przyjęcia

$$\Phi = m(x^2 + y^2 - r^2)y \quad [d]$$

gdzie m jest stałym współczynnikiem. Funkcja ta jest równa zeru na brzegu [a] i spełnia równanie [c], jeżeli przyjmiemy

$$m = \frac{(1+2\nu)P}{8(1+\nu)I}$$

Równanie [d] przyjmie wtedy postać

$$\Phi = \frac{(1+2\nu)P}{8(1+\nu)I} (x^2 + y^2 - r^2)y \quad [e]$$

Składowe naprężenia otrzymamy teraz z równania [171]:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{(3+2\nu)P}{8(1+\nu)I} \left(r^2 - x^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2 \right) \\ \tau_{yz} &= -\frac{(1+2\nu)Pxy}{4(1+\nu)I} \end{aligned} \quad [174]$$

Pionowa składowa naprężeń stycznych τ_{xz} jest parzystą funkcją x i y , a pozioma składowa

¹⁾ Patrz S. Timoshenko: „Biul. Inst. Inż. Dróg i Komunikacji“, Petersburg, 1913. Również „Proc. London Math. Soc.“, seria 2, tom 20, str. 398, 1922.

τ_{yz} — nieparzystą funkcją tych samych zmiennych. Stąd rozkład naprężeń [174] da wypadkową wzdłuż pionowej średnicy przekroju kołowego.

Wzdłuż poziomej średnicy przekroju jest $x=0$ i z [174] otrzymujemy

$$\tau_{xz} = \frac{(3+2\nu)P}{8(1+\nu)I} \left(r^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2 \right); \quad \tau_{yz} = 0 \quad [f]$$

Maksymalne naprężenia styczne dostajemy w środku ($y=0$), gdzie

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{(3+2\nu)Pr^2}{8(1+\nu)I} \quad [g]$$

Naprężenia styczne na końcach poziomej średnicy ($y=\pm r$) są równe

$$(\tau_{xz})_{y=\pm r} = \frac{(1+2\nu)Pr^2}{4(1+\nu)I} \quad [h]$$

Wielkość naprężeń stycznych zależy od wielkości współczynnika *Poissona*. Przy $\nu=0,3$ [g] i [h] przyjmą postać

$$(\tau_{xz})_{\max} = 1,38 \frac{P}{A}; \quad (\tau_{xz})_{y=\pm r} = 1,23 \frac{P}{A} \quad [k]$$

gdzie A jest powierzchnią przekroju belki. Elementarna teoria belek oparta na założeniu, że naprężenie styczne τ_{xz} jest równomiernie rozmieszczone na przekroju poprzecznym, da nam

$$\tau_{xz} = \frac{4}{3} \frac{P}{A}$$

W ten sposób błąd elementarnego rozwiązania dla wartości maksymalnego naprężenia wynosi w tym przypadku około 4%.

108. Przekrój eliptyczny. Metoda przedstawiona w poprzednim paragrafie może być również zastosowana w przypadku przekroju eliptycznego. Niech

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad [a]$$

będzie brzegiem przekroju. Prawa strona równania [173] zniknie o ile przyjmiemy

$$f(y) = -\frac{P}{2I} \left(\frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) \quad [b]$$

Podstawiając do równania [172] znajdziemy

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{Py}{I} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \right) \quad [c]$$

Równanie to, łącznie z warunkiem $\Phi=0$ na brzegu, określa funkcję naprężeń Φ . Warunek brzegowy i [c] są spełnione, gdy przyjmiemy

$$\Phi = \frac{(1+\nu)a^2 + \nu b^2}{2(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \cdot \frac{P}{I} \left(x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) y \quad [d]$$

Gdy $a=b$, rozwiązanie to pokrywa się z rozwiązaniem [c] poprzedniego paragrafu.

Podstawiając [b] i [d] do wyrażeń [171] znajdziemy składowe naprężenia

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \cdot \frac{P}{2I} \left[a^2 - x^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2} y^2 \right] \\ \tau_{yz} &= -\frac{(1+\nu)a^2+\nu b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \frac{Pxy}{I} \end{aligned} \quad [175]$$

Dla poziomej osi przekroju eliptycznego ($x=0$) mamy

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \frac{P}{2I} \left[a^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2} y^2 \right] \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Maksymalne naprężenie występuje w środku ($y=0$) i dane jest wyrażeniem następującym

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{Pa^2}{2I} \left[1 - \frac{a^2+\nu b^2/(1+\nu)}{3a^2+b^2} \right]$$

Jeżeli b jest bardzo małe w porównaniu z a , to możemy pominąć wyrazy zawierające b^2/a^2 i w tym przypadku

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{Pa^2}{3I} = \frac{4}{3} \frac{P}{A}$$

co pokrywa się z rozwiązaniem elementarnej teorii zginania belek. Jeśli b jest bardzo duże w porównaniu z a , otrzymujemy

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{2}{1+\nu} \frac{P}{A}$$

Naprężenia na końcach osi poziomej ($y=\pm b$) w tym przypadku są równe

$$\tau_{xz}^{\pm} = \pm \frac{4\nu}{1+\nu} \frac{P}{A}$$

Rozkład naprężeń wzdłuż poziomej osi jest bardzo daleki od równomiernego i zależy od wielkości współczynnika Poissona ν . Biorąc $\nu=0,30$, otrzymamy

$$(\tau_{xz})_{\max} = 1,54 \frac{P}{A}; \quad (\tau_{xz})_{x=0, y=b} = 0,92 \frac{P}{A}$$

Maksymalne naprężenie jest około 14% większe od danego równaniem elementarnym.

109. Przekrój prostokątny. Równanie linii brzegowej w przypadku prostokąta pokazanego na rys. 188 ma postać

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0 \quad [a]$$

Jeżeli podstawimy do równania [173] zamiast $f(y)$ stałą $Pa^2/2I$, to wyrażenie $Px^2/2I - Pa^2/2I$ będzie równe zeru na bokach prostokąta $x = \pm a$. Wzdłuż pionowych boków $y = \pm b$ pochodna $dy/ds=0$. W ten sposób prawa strona równania [173] jest równa zeru wzdłuż linii brzegu i możemy przyjąć na brzegu $\Phi=0$. Równanie różniczkowe [172] przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} \quad [b]$$

Równanie to, łącznie z warunkiem brzegowym, wyznacza w zupełności funkcję naprężeń.

Zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia ugięć równomiernie rozciągniętej błony prostokątnej pod wpływem obciążenia ciągłego o intensywności proporcjonalnej do

$$-\frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

Krzywa mnp na rys. 188 przedstawia przekrój błony płaszczyzną yz .

Ze związków [171] widzimy, że naprężenia styczne można rozłożyć na dwa następujące układy

$$(1) \quad \tau'_{xz} = \frac{P}{2I} (a^2 - x^2); \quad \tau'_{yz} = 0 \quad [c]$$

$$(2) \quad \tau''_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau''_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Pierwszy układ przedstawia paraboliczny rozkład naprężeń, wynikający ze zwykłej, elementarnej teorii belek. Drugi układ, zależny od funkcji Φ , przedstawia konieczne poprawki do elementarnego rozwiązania. Wielkości tych poprawek określone są kątem nachylenia błony. Wzdłuż osi y z warunku symetrii $\partial \Phi / \partial x = 0$ poprawkami do elementarnej teorii są pionowe naprężenia styczne dane kątem nachylenia $\partial \Phi / \partial y$. Zgodnie z rys. 188 τ''_{xz} jest dodatnie w punktach m i p oraz ujemne w punkcie n . W ten sposób wzdłuż poziomej osi symetrii naprężenie τ_{xz} nie jest rozłożone równomiernie jak w elementarnej teorii, lecz posiada maksymalne wartości na końcach m i p oraz minimum w środku n .

Z warunków obciążenia błony widzimy, że Φ jest parzystą funkcją x i nieparzystą funkcją y . Warunki te oraz warunek brzegowy są spełnione przez przyjęcie Φ w postaci szeregu Fouriera

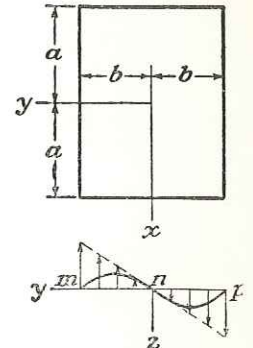
$$\Phi = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2m+1,n} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad [d]$$

Podstawiając powyższe do równania [b] i stosując zwykły sposób obliczania współczynników szeregu Fouriera, otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} A_{2m+1,n} \tau^2 ab \left[\left(\frac{2m+1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] &= -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \int_{-a}^a \int_{-b}^b y \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ A_{2m+1,n} &= -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b(-1)^{m+n-1}}{\pi^4 (2m+1)n \left[\left(\frac{2m+1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

Podstawiając do równania [d], znajdziemy

$$\Phi = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^3}{\pi^4} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{(2m+1)n \left[(2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$



Rys. 188

Znając powyższą funkcję naprężeń, możemy znaleźć z równań [c] składowe naprężenia stycznego.

Wyprowadźmy poprawki do naprężeń, otrzymywanych z teorii elementarnej wzdłuż osi y . Możemy zauważyć z ugięcia błony (rys. 188), że wzdłuż tej osi poprawki mają największą wartość i dlatego maksymalne naprężenie powstaje w środkowych punktach boków $y = \pm b$. Obliczając pochodną $\partial\Phi/\partial y$ i biorąc $x=0$, otrzymamy

$$(\tau'_{xz})_{x=0} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} \cos \frac{n\pi y}{b}}{(2m+1) \left[(2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

Stąd znajdziemy następujące związki określające naprężenia w środku przekroju ($y=0$) i dla środka pionowych boków prostokąta:

$$(\tau'_{xz})_{x=0, y=0} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(2m+1) \left[(2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

$$(\tau'_{xz})_{x=0, y=b} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m+1) \left[(2m+1)^2 \frac{b^2}{4a^2} + n^2 \right]}$$

Sumowanie tych szeregów uprości się znacznie, gdy zastosujemy znane zależności

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1) [(2m+1)^2 + k^2]} = \frac{\pi^3}{32} \frac{\left(1 - \operatorname{sech} \frac{k\pi}{2}\right)^*}{\frac{1}{2}(k\pi/2)^2}$$

*) Zależność tę możemy otrzymać stosując szereg trygonometryczny [h] (str. 147) dla przypadku pręta obciążonego siłami poprzecznymi P i osiowymi siłami rozciągającymi S ; otrzymamy, że

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2(n^2 + k^2)}$$

gdzie

$$k^2 = \frac{Sl^2}{EI\pi^2}$$

a [c] jest odległością obciążenia P od lewej podpory (rys. 112). Podstawiając obecnie $c=0$ i $Pc=M$, dochodzimy

Wtedy

$$\begin{aligned} (\tau'_{xz})_{x=0, y=0} &= -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{3P}{2A} \cdot \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cosh \frac{n\pi a}{b}} \right] \\ (\tau'_{xz})_{x=0, y=b} &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{3P}{2A} \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 \cosh \frac{n\pi a}{b}} \right] \end{aligned} \quad [176]$$

gdzie $A=4ab$ jest powierzchnią przekroju poprzecznego. Szeregi te są szybkozbieżne i obliczenie poprawek τ'_{xz} dla dowolnej wartości stosunku a/b nie przedstawia trudności. Poprawki te musimy dodać do wartości $3P/2A$ danej zależnością elementarną.

Punkt	$\frac{a}{b} =$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$x=0, y=0$	dokładna	0,983	0,940	0,856	0,805
	przybliżona	0,981	0,936	0,856	0,826
$x=0, y=b$	dokładna	1,033	1,126	1,396	1,988
	przybliżona	1,040	1,143	1,426	1,934

W pierwszych wierszach powyższej tablicy podano współczynniki liczbowe, przez które należy pomnożyć przybliżoną wartość naprężenia stycznego $3P/2A$, aby otrzymać dokładne wartości naprężeń¹⁾.

Współczynnik *Poissona* ν w tych obliczeniach równa się jednej czwartej. Z powyższej tablicy widać, że związek elementarny daje bardzo dokładne wartości tych naprężeń, gdy $a/b \gg 2$. Dla przekroju kwadratowego błąd dla maksymalnego naprężenia otrzymanego z elementarnego związku wynosi około 10%.

Stosując analogię błonową możemy wyprowadzić wygodne, przybliżone równania dla obliczania naprężeń stycznych. Jeżeli a jest duże w porównaniu z b (rys. 188), to możemy

cd. notki ze str. 286

do następującej linii ugięcia pod działaniem pary sił M przyłożonej na lewym końcu

$$y = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n(n^2 + k^2)}$$

a ugięcie w środku wynosi

$$\delta = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1) [(2m+1)^2 + k^2]} \quad [a]$$

To samo ugięcie otrzymamy przez całkowanie równania różniczkowego linii ugięcia

$$\delta = \frac{Ml^2}{2EI\pi^2 k^2} \left(1 - \operatorname{sech} \frac{k\pi}{2}\right) \quad [b]$$

Powyższe równanie w tekście wynika z porównania [a] i [b].

¹⁾ Liczby w tej tablicy są nieco różne od podanych przez *Saint-Venanta*. Przy sprawdzaniu wyników okazało się, że w jego obliczeniach znajdują się błędy numeryczne.

przyjąć, że w punktach dostatecznie dalekich od krótkich boków prostokąta powierzchnia błony jest praktycznie walcowa. Wtedy równanie [b] przyjmie postać

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

i znajdziemy

$$\Phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{6I} (y^3 - b^2y) \quad [c]$$

Podstawiając do równania [c], otrzymamy naprężenia wzdłuż osi y

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2I} \left[a^2 + \frac{\nu}{1+\nu} \left(y^2 - \frac{b^2}{3} \right) \right] \quad [f]$$

Stąd widać, że w przypadku wąskiego prostokąta poprawka do równania elementarnego, określona drugim wyrazem w nawiasie, jest zawsze mała.

Jeżeli b jest duże w porównaniu z a , to ugięcia błony w punktach odległych od krótkich boków prostokąta mogą być przyjęte jako liniowa funkcja y i z równania [b] otrzymamy

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I}$$

$$\Phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2) \quad [g]$$

Podstawiając do równań [c], otrzymujemy składowe naprężenia stycznego

$$\tau_{xz} = \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{P}{2I} (a^2 - x^2), \quad \tau_{yz} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I} xy$$

W środku ciężkości przekroju poprzecznego ($x=y=0$), mamy

$$\tau_{xz} = \frac{1}{1+\nu} \frac{Pa^2}{2I}, \quad \tau_{yz} = 0$$

W porównaniu ze zwykłym rozwiązaniem elementarnym, naprężenia w tym punkcie redukują się w stosunku $1/(1+\nu)$.

Aby spełnić warunek brzegowy na krótkich bokach prostokąta, weźmiemy zamiast [g] następujące wyrażenie na funkcję naprężeń

$$\Phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2) [1 - e^{-(b-y)m}] \quad [h]$$

gdzie m musi być wyznaczone z warunku minimum energii (por. par. 97). W ten sposób znajdujemy

$$m = \frac{1}{2a} \sqrt{10}$$

Przy tej wartości m i za pomocą wyrażenia [h] możemy obliczyć z dostateczną dokładnością maksymalne naprężenie styczne, które występuje w środku krótkich boków prostokąta.

Jeżeli oba boki prostokąta są wielkościami tego samego rzędu, to możemy otrzymać przybliżone rozwiązanie dla rozkładu naprężeń w postaci wielomianu, przyjmując następującą funkcję naprężeń

$$\Phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(my + ny^3) \quad [k]$$

Obliczając współczynniki m i n z warunku minimum energii¹⁾ otrzymujemy

$$m = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{8Ib^2} \frac{\frac{1}{11} + \frac{8a^2}{b^2}}{\left(\frac{1}{7} + \frac{3a^2}{5b^2}\right)\left(\frac{1}{11} + \frac{8a^2}{b^2}\right) + \frac{1}{21} + \frac{9a^2}{35b^2}}$$

$$n = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{8Ib^4} \frac{1}{\left(\frac{1}{7} + \frac{3a^2}{5b^2}\right)\left(\frac{1}{11} + \frac{8a^2}{b^2}\right) + \frac{1}{21} + \frac{9a^2}{35b^2}}$$

Naprężenia styczne, obliczone z [k], są równe

$$(\tau_{xz})_{x=0, y=0} = \frac{Pa^2}{2I} + ma^2b^2 \quad [l]$$

$$(\tau_{xz})_{x=0, y=b} = \frac{Pa^2}{2I} - 2a^2b^2(m + nb^2)$$

Przybliżone wartości naprężeń stycznych podane w drugich wierszach tablicy (por. str. 287) zostały obliczone za pomocą tych związków. Zobaczmy, że przybliżone równania [l] dają wystarczającą dokładność w tym zakresie wartości a/b .

Jeżeli szerokość prostokąta jest duża w porównaniu z wysokością, to maksymalne naprężenia są o wiele większe od wartości $3P/2A$, podanej przez teorię elementarną. Co więcej, o ile b/a przekracza 15, to maksymalnym naprężeniem nie jest składowa τ_{xz} w punktach $x=0, y=\pm b$, czyli w środkowych punktach pionowych boków. Maksymalnym naprężeniem jest pozioma składowa τ_{yz} w punktach $x=a, y=\pm\eta$, a więc na górnym i dolnym brzegu w pobliżu naroży. Wartości tych naprężeń podane są w tablicy²⁾ poniżej. Wartości η są podane w postaci $(b-\eta)/2a$ w ostatniej kolumnie, $b-\eta$ jest odległością punktu maksymalnego naprężenia od naroża.

$\frac{b}{a}$	$\frac{(\tau_{xz})_{x=0, y=b}}{3P/2A}$	$\frac{(\tau_{yz})_{x=a, y=\eta}}{3P/2A}$	$\frac{b-\eta}{2a}$
0	1,000	0,000	0,000
2	1,39(4)	0,31(6)	0,031(4)
4	1,988	0,968	0,522
6	2,582	1,695	0,649
8	3,176	2,452	0,739
10	3,770	3,226	0,810
15	5,255	5,202	0,939
20	6,740	7,209	1,030
25	8,225	9,233	1,102
50	15,650	19,466	1,322

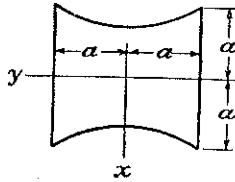
¹⁾ Patrz Timoshenko, loc. cit.

²⁾ E. Reissner i G. B. Thomas: „J. Math. Phys.“, tom 25, str. 241, 1946.

110. Dalsze wyniki. Rozpatrzmy przekrój o brzegach składających się z dwu boków pionowych $y = \pm a$ (rys. 189) oraz dwóch hiperbol¹⁾

$$(1 + \nu)x^2 - \nu y^2 = a^2$$

Możemy łatwo wykazać, że prawa strona równania [173] na str. 281 będzie równa zero na brzegu, jeśli przyjmiemy



Rys. 189

$$f(y) = \frac{P}{2I} \left(\frac{\nu}{1 + \nu} y^2 + \frac{a^2}{1 + \nu} \right)$$

Podstawiając do równania [172], otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Równanie to i warunek brzegowy [173] są spełnione, gdy przyjmiemy $\Phi = 0$. Wtedy składowe naprężenia stycznego z równań [171] przyjmą postać

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2I} \left(-x^2 + \frac{\nu}{1 + \nu} y^2 + \frac{a^2}{1 + \nu} \right)$$

$$\tau_{yz} = 0$$

W każdym punkcie przekroju naprężenie styczne jest pionowe. Maksymalne naprężenie występuje w środku pionowych boków przekroju i równa się

$$\tau_{\max} = \frac{Pa^2}{2I}$$

Zagadnienie może być również łatwo rozwiązane, gdy brzegi przekroju poprzecznego są dane równaniami

$$\left(\pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right); \quad a > x > -a \quad [b]$$

Dla $\nu = 1/4$ przekrój poprzeczny posiada kształt pokazany na rys. 190. O ile weźmiemy

$$f(y) = \frac{Pa^2}{2I} \left[1 - \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right]$$

to lewa strona warunku brzegowego [173] znika, tzn. Φ musi być stałe wzdłuż brzegu. Równanie [172] przyjmie postać

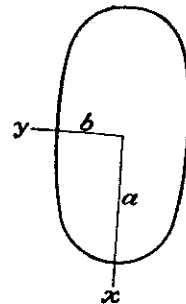
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I} \pm \frac{Pa^2}{2bI\nu} \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu} - 1}$$

Równanie to i warunek brzegowy będzie spełniony przez przyjęcie

$$\Phi = \frac{Pa^2\nu}{2(1 + \nu)I} \left[y \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \pm b \left(\pm \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{\nu} - 1} \right]$$

Podstawiając do równań [171], znajdziemy

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2(1 + \nu)I} (a^2 - x^2); \quad \tau_{yz} = -\frac{P\nu}{(1 + \nu)I} xy \quad [c]$$



Rys. 190

Ten sam wynik możemy otrzymać na innej drodze. Rozważając naprężenia w prostokątnej belce o szerokości dużej w porównaniu z wysokością, stosowaliśmy jako przybliżone rozwiązanie na funkcję naprężeń (wyrażenie [g] par. 109) następujące wyrażenie

$$\Phi = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{2I} (x^2 - a^2)$$

¹⁾ Zagadnienie to rozpatrzył F. Grashof: „Elastizität und Festigkeit“, str. 246, 1878.

skąd możemy wyprowadzić wyrażenie [c] na składowe naprężenia. Równanie brzegu można obecnie znaleźć z warunku, że na brzegu kierunek naprężeń pokrywa się z kierunkiem stycznej do brzegu. Stąd

$$\frac{dx}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{\tau_{yz}}$$

Podstawiając z [c] i całkując, dochodzimy do równania brzegu

$$y = b(a^2 - x^2)^\nu$$

Stosując metodę energetyczną (par. 109) możemy otrzymać przybliżone rozwiązanie w wielu innych przypadkach. Rozważmy na przykład przekrój pokazany na rys. 191. Pionowe boki dane są równaniami $y = \pm b$, pozostałe dwa boki są łukami koła

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad [d]$$

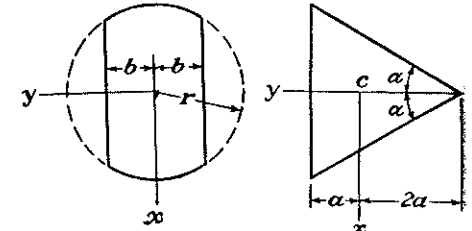
Prawa strona równania [173] znika o ile weźmiemy

$$f(y) = \frac{P}{2I} (r^2 - y^2)$$

Wtedy przybliżone wyrażenie na funkcję naprężeń ma postać

$$\Phi = (y^2 - b^2) (x^2 + y^2 - r^2) (Ay + By^3 + \dots)$$

gdzie współczynniki A, B, \dots muszą być obliczone z warunku minimum energii.



Rys. 191

Rys. 192

Dla wielu kształtów przekroju poprzecznego otrzymano rozwiązania stosując biegunowe i inne krzywoliniowe współrzędne i funkcje zmiennej zespolonej. Są to przekroje ograniczone dwoma kołami, współśrodkowymi¹⁾ lub mimośrodkowymi²⁾, koła z promieniowymi szczelinami³⁾, kardioidą⁴⁾, ślimakiem Pascala⁵⁾, konchoidą eliptyczną⁶⁾, dwoma elipsami o wspólnych ogniskach⁷⁾, elipsą i hiperbolą o wspólnym ognisku⁸⁾, trójkątami i wielokątami⁹⁾, włącznie z prostokątem ze szczelinami¹⁰⁾ i przekrojem w kształcie wycinka pierścienia kołowego¹¹⁾.

111. Przekroje niesymetryczne. Jako pierwszy przykład rozważmy przypadek trójkąta równobocznego (rys. 192). Brzeg przekroju poprzecznego dany jest równaniem

$$(y - a) [x + (2a + y) \operatorname{tg} \alpha] [x - (2a + y) \operatorname{tg} \alpha] = 0$$

Prawa strona równania [173] jest równa zero, o ile przyjmiemy

$$f(y) = \frac{P}{2I} (2a + y)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Wtedy równanie [172] wyznaczające funkcję naprężeń Φ przyjmie postać następującą

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I} - \frac{P}{I} (2a + y) \operatorname{tg}^2 \alpha \quad [a]$$

¹⁾ Rozwiązanie jest podane w książce A. E. H. Love: „Mathematical Theory of Elasticity“, wyd. 4 str. 335 i w książce I. S. Sokolnikoffa: „Mathematical Theory of Elasticity“, str. 253.

²⁾ B. R. Seth: „Proc. Indian Acad. Sci.“, tom 4, sec. A, str. 531, 1936, oraz tom 5, str. 23, 1937.

³⁾ W. M. Shepherd: „Proc. Roy. Soc.“ (London), seria A, tom 138, str. 607, 1932; L. A. Wigglesworth: „Proc. London Math. Soc.“, seria 2, tom 47, str. 20, 1940 i „Proc. Roy. Soc.“ (London), seria A, tom 170, str. 365, 1939.

⁴⁾ W. M. Shepherd: „Proc. Roy. Soc.“ (London), seria A, tom 154, str. 500, 1936.

⁵⁾ D. L. Holl i D. H. Rock: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 19, str. 141, 1939.

⁶⁾ A. C. Stevenson: „Proc. London Math. Soc.“, seria 2, tom 45 str. 126, 1939.

⁷⁾ A. E. H. Love: „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 wyd. str. 336.

⁸⁾ B. G. Galerkin: „Biul. Inst. Inż. Dróg i Komunikacji“, Petersburg, tom 96, 1927. Również S. Ghosh: „Bull. Calcutta Math. Soc.“, tom 27, str. 7, 1935.

⁹⁾ B. R. Seth: „Phil. Mag.“, tom 22, str. 582, 1936, oraz tom 23, str. 745, 1937.

¹⁰⁾ D. F. Gunder: „Physics“, tom 6, str. 38, 1935.

¹¹⁾ M. Seegar i K. Pearson: „Proc. Roy. Soc.“ (London), seria A, tom 96, str. 211, 1920.

Przybliżone rozwiązanie możemy otrzymać stosując metodę energetyczną. W szczególnym przypadku gdy

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\nu}{1 + \nu} = \frac{1}{3} \quad [b]$$

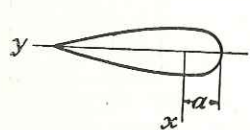
rozwiązanie ściśle równania [a] otrzymujemy przyjmując jako funkcję naprężeń wyrażenie

$$\Phi = \frac{P}{6I} \left[x^2 - \frac{1}{3} (2a + y)^2 \right] (y - a)$$

Składowe naprężenia otrzymujemy z równań [171]:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{P}{6I} (2a + y)^2 = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^4} [-x^2 + a(2a + y)] \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^4} x(a - y) \end{aligned} \quad [c]$$

Wzdłuż osi y ($x=0$) wypadkowe naprężenie styczne jest pionowe i przedstawione w postaci liniowej funkcji



$$(\tau_{xz})_{x=0} = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^3} (2a + y)$$

Maksymalna wartość tego naprężenia występuje w środku pionowych boków przekroju poprzecznego i wynosi

Rys. 193

$$\tau_{\max} = \frac{2\sqrt{3}P}{9a^2} \quad [d]$$

Przez obliczenie momentu sił stycznych danych naprężeniami [c] względem osi z możemy wykazać, że w tym przypadku wypadkowa siła poprzeczna przechodzi przez środek ciężkości C przekroju.

Rozważmy następnie przypadek ogólniejszy przekroju o poziomej osi symetrii (rys. 193), którego dolna i górna część brzegu dana jest równaniami

$$x = \psi(y) \quad \text{dla } x > 0$$

$$x = -\psi(y) \quad \text{dla } x < 0$$

Wtedy funkcja

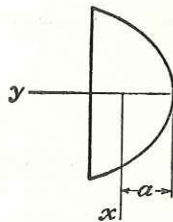
$$[x + \psi(y)][x - \psi(y)] = x^2 - [\psi(y)]^2$$

znika wzdłuż brzegu i w naszych wyrażeniach na składowe naprężenia [171] możemy przyjąć

$$f(y) = \frac{P}{2I} [\psi(y)]^2$$

Przy tym założeniu funkcja naprężeń musi spełniać równanie różniczkowe o postaci

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{Py}{I} - \frac{P}{I} \psi(y) \frac{d\psi}{dy}$$



Rys. 194

i jest stała na brzegu. Zagadnienie sprowadza się do znalezienia ugięcia równomiernie naciągniętej błony, w przypadku gdy intensywność obciążenia dana jest prawą stroną powyższego równania. Zagadnienie to rozwiązuje się zwykle z wystarczającą dokładnością metodą energetyczną — tak, jak to było pokazane w przypadku przekroju prostokątnego (str. 289).

Przykład pokazany na rys. 194 może być potraktowany w podobny sposób. Przyjmijmy np., że przekrój jest segmentem parabolicznym i że równanie paraboli jest następujące

$$x^2 = A(y + a)$$

Wtedy weźmiemy

$$f(y) = \frac{P}{2I} \cdot A(y + a)$$

Przy tym wyrażeniu na $f(y)$ pierwszy czynnik prawej strony równania [173] znika wzdłuż części parabolicznej brzegu. Drugi czynnik dy/ds znika wzdłuż prostoliniowej części brzegu. W ten sposób znowu znajdziemy, że funkcja jest stała wzdłuż brzegu i zadanie można rozwiązać za pomocą metody energetycznej.

112. Środek ścinania. Przy rozważaniu zagadnienia belki wspornikowej przyjęliśmy, że oś z przechodzi przez oś środkową belki, a x i y są głównymi osiami przekroju. Przyjęliśmy, że siła P jest równoległa do osi x i znajduje się w takiej odległości od środka ciężkości, że nie występuje skręcanie belki. Odległość ta, ważna w obliczeniach praktycznych, może być łatwo znaleziona, gdy naprężenia przedstawione równaniem [171] są znane. W tym celu obliczymy moment naprężeń stycznych τ_{xz} i τ_{yz} względem środka ciężkości. Moment ten oczywiście wynosi

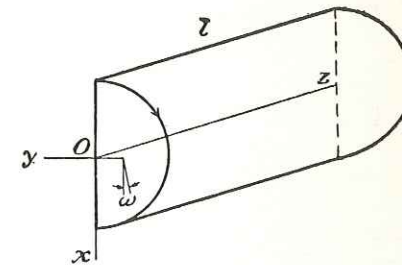
$$M_z = \iint (\tau_{xz}y - \tau_{yz}x) dx dy \quad [a]$$

Zauważwszy, że naprężenia rozmieszczone na końcowym przekroju belki są statycznie równoważne działającej sile P , dochodzimy do wniosku, że odległość d siły P od środka ciężkości przekroju równa się

$$d = \frac{|M_z|}{P} \quad [b]$$

Dla dodatnich M_z odległość d musimy przyjąć w kierunku dodatnim y . W poprzednich rozważaniach przyjęliśmy założenie, że siła działa równoległe do osi x .

Gdy siła P jest równoległa do osi y zamiast osi x , to możemy za pomocą podobnych obliczeń ustalić takie położenie linii działania siły P , że nie występuje obrót środków ciężkości przekrojów poprzecznych. Punkt przecięcia tych dwóch linii działania sił zginających ma ważne znaczenie. Jeżeli siła prostopadła do osi belki zostanie przyłożona w tym punkcie, to możemy ją rozłożyć na dwie składowe równoległe do osi x i y . Na podstawie powyższych rozważań dochodzimy do wniosku, że nie spowoduje ona obrotów środków ciężkości belki. Punkt ten jest nazywany środkiem ścinania lub czasami środkiem sztywności.



Rys. 195

Jeżeli przekrój belki ma dwie osie symetrii, to możemy natychmiast dojść do wniosku, że środek ścinania pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju. Jeżeli istnieje tylko jedna oś symetrii, to wnioskujemy z warunku symetrii, że środek ścinania leży na tej osi. Biorąc jako oś symetrii y , obliczymy położenie środka ścinania z wyrażenia [b].

Rozważmy na przykład przekrój półkolisty¹⁾ pokazany na rys. 195. Aby znaleźć naprężenia styczne zużytkujemy rozwiązanie, wyprowadzone dla belek kołowych (por. str. 281). W przypadku tym nie występują naprężenia działające na pionową średnicę przekroju xz . Możemy wyobrazić sobie belkę podzieloną płaszczyzną xz na dwie połowy, z których każda przedstawia półkolistą belkę zginaną siłą $P/2$. Naprężenia dane są związkami [174]. Podstawiając do wyrażenia [a], całkując i dzieląc moment M_z przez $P/2$, otrzymamy odległość siły zginającej od początku O

$$e = \frac{2M_z}{P} = \frac{8}{15\pi} \frac{3 + 4\nu}{1 + \nu} r$$

¹⁾ Patrz S. Timoshenko: „Biul. Inst. Inż. Dróg i Komunikacji“. Petersburg, 1913. Wydaje się, że rozmieszczenie siły zginającej ze środka ciężkości przekroju zostało w pracy tej zbadane po raz pierwszy.

Wielkość ta określa położenie siły, przy którym element przekroju w punkcie O (środku koła) nie obraca się. Równocześnie element w środku ciężkości przekroju półkolistego obróci się o wartość (por. równanie [b] str. 281)

$$\omega = \frac{\nu P(l-z)}{EI} \cdot 0,424r$$

gdzie $0,424r$ jest odległością od początku O do środka ciężkości przekroju półkolistego. Aby usunąć ten obrót, musimy przyłożyć moment skręcający tak, jak pokazano na rys. 195. Wielkość tego momentu skręcającego znajdziemy, wykorzystując tablicę na str. 250, z której dla przekroju półkolistego otrzymujemy jednostkowy kąt skręcenia

$$\theta = \frac{M_t}{0,296Gr^4}$$

Wtedy z warunku, że element w środku ciężkości przekroju nie obróci się, otrzymujemy

$$\frac{M_t(l-z)}{0,296Gr^4} = \frac{\nu P(l-z)}{EI} \cdot 0,424r; \quad M_t = \frac{\nu P \cdot 0,296r^4 \cdot 0,424r}{2(1+\nu)I}$$

Moment ten będzie spowodowany przesunięciem siły zginającej $P/2$, w kierunku osi z o wielkość

$$\delta = \frac{2M_t}{P} = \frac{8\nu \cdot 0,296 \cdot 0,424r}{2(1+\nu)\pi}$$

W celu otrzymania odległości środka ścinania od środka koła O , wielkość powyższa musi być odjęta od poprzednio obliczonej odległości e . Przyjmując $\nu=0,3$ otrzymamy

$$e - \delta = 0,548r - 0,037r = 0,511r$$

Dla przekrojów takich jak na rys. 193 składowe naprężenia stycznego wynoszą

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{P}{2I} [x^2 - \psi^2(y)]; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Stąd

$$M_z = \iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} x \right) dx dy - \frac{P}{2I} \iint [x^2 - \psi^2(y)] y dx dy \quad [c]$$

Całkując przez części i uwzględniając, że Φ znika na brzegu, $x = \pm \psi(y)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} x \right) dx dy &= -2 \iint \Phi dx dy \\ \int [x^2 - \psi^2(y)] dx &= \frac{2}{3} \psi^3(y) - 2\psi^3(y) = -\frac{4}{3} \psi^3(y) \\ \iint [x^2 - \psi^2(y)] y dx dy &= -\frac{4}{3} \int y \psi^3(y) dy \\ I = \iint x^2 dx dy &= \frac{2}{3} \int \psi^3(y) dy \end{aligned}$$

Podstawiając do [c] i dzieląc przez P mamy

$$d = \frac{|M_z|}{P} = \left| -\frac{2}{P} \iint \Phi dx dy + \frac{\int y \psi^3(y) dy}{\int \psi^3(y) dy} \right|$$

Znając $\psi(y)$ i stosując analogię błonową w celu znalezienia Φ możemy zawsze obliczyć¹⁾ z wystarczającą dokładnością położenie środka ścinania dla tych przekrojów poprzecznych.

¹⁾ Przykłady takich obliczeń można znaleźć w książce *L. S. Leibsona*: „Variational Methods for Solving Problems of the Theory of Elasticity“, Moskwa 1943.

Zagadnienie środka ścinania jest szczególnie ważne w przypadku cienkościennych przekrojów otwartych. Położenie środka ścinania dla takich przekrojów może być łatwo wyznaczone z wystarczającą dokładnością przez przyjęcie, że naprężenia styczne są równomiernie rozmieszczone na grubości ścianki i że działają równoległe do powierzchni środkowej ścianki¹⁾.

Położenie środka ścinania w przekroju jest wyznaczone jedynie kształtem przekroju. Z drugiej strony położenie środka skręcania (por. str. 243) jest zależne od sposobu podparcia belki. Przez odpowiednie dobranie sposobu podparcia można doprowadzić do pokrycia się osi środków skręcania z osią środków ścinania. Możemy udowodnić, że zachodzi to wtedy, gdy belka jest tak podparta, że całka $\int \int w^2 dx dy$ na przekroju poprzecznym osiąga minimum²⁾, gdzie w jest przemieszczeniem pochodzącym od spaczenia przy skręcaniu (wyznaczonym przed zastosowaniem tego warunku, z dokładnością do liniowej funkcji x i y). W praktyce zamocowanie zwykle zaburzy rozkład naprężeń w pobliżu podpartej końca, jak np. w przypadku, gdy zapobiega całkowicie przemieszczeniom końcowego przekroju. W tym przypadku, jeżeli siła zginająca jest siłą skupioną przechodzącą przez środek ścinania, nie powodującą obrotu, to z twierdzenia o wzajemności przemieszczeń (str. 218) wynika, że moment skręcający spowoduje zerowe ugięcie środka ścinania. Oznacza to, że środek skręcania pokrywa się ze środkiem ścinania³⁾. Rozważania te są przybliżonego charakteru, ponieważ istnienie środka skręcania zależy od braku odkształcenia przekrojów w ich płaszczyźnie, a to nie ma miejsca w zaburzonej obszarze w pobliżu zamocowanego końca.

113. Rozwiązywanie zagadnień zginania za pomocą metody błony mydlanej.

Rozwiązania ściśle zagadnień zginania są znane jedynie dla kilku szczególnych przypadków, w których przekrój posiada pewną prostą postać. Ze względów praktycznych ważne jest posiadanie środków, pozwalających rozwiązać zagadnienie dla dowolnego zadanego przekroju. Możemy tego dokonać za pomocą numerycznych obliczeń opartych na równaniach różnic skończonych, jak to wyjaśniono w Dodatku, lub doświadczalnie za pomocą metody błony mydlanej⁴⁾, analogicznej do metody stosowanej w zagadnieniach skręcania (por. str. 258). W celu wyprowadzenia podstaw metody błony mydlanej wykorzystamy równania [171], [172] i [173] par. 106. Biorąc

$$f(y) = \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I}$$

równanie funkcji naprężeń [172] przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad [a]$$

Otrzymaliśmy to samo równanie co dla nieobciążonej i równomiernie rozciągniętej błony (por. str. 243). Warunek brzegowy [173] wyrazi się następująco

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left[\frac{Px^2}{2I} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I} \right] \frac{dy}{ds} \quad [b]$$

¹⁾ Odnośniki można znaleźć w książce *S. Timoshenko*: „Strength of Materials“ 2 wyd., tom 2, str. 55.
²⁾ *R. Kappus*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 19, str. 347, 1939, *A. Weinstein*: „Quart. Applied Math.“, tom 5, str. 79, 1947.

³⁾ *Patrz R. V. Southwell*: „Introduction to the Theory of Elasticity“, str. 29; *W. J. Duncan, D. L. Ellis i C. Scranton*: „Phil. Mag.“, tom 16, str. 201, 1933.

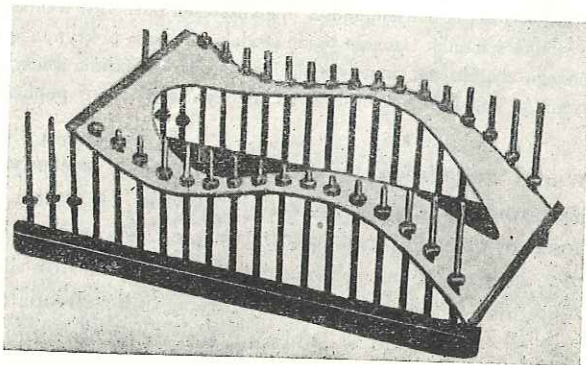
⁴⁾ Sposób ten po raz pierwszy wskazał *Vening Meinesz*: „De Ingenieur“, str. 108, Holland, 1911. Niezależnie został on rozwinięty przez *A. A. Griffitha i G. I. Taylora*: „Tech. Rept. Natl. Advisory Comm. Aeronaut.“, tom 3, str. 950, 1917—1918. Wyniki powyższe zaczerpnięto z tej pracy.

Całkując wzdłuż brzegu s , znajdziemy wyrażenie

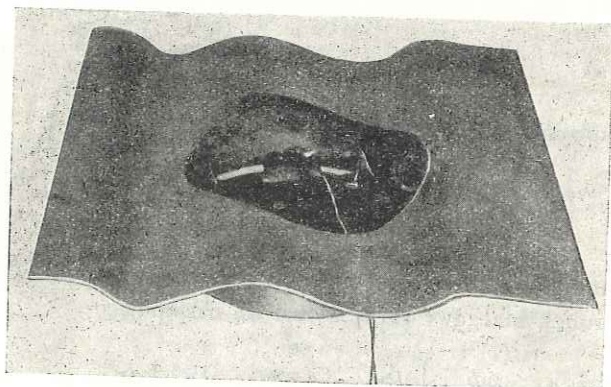
$$\Phi = \frac{P}{I} \int \frac{x^2 dy}{2} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^3}{3I} + \text{const} \quad [c]$$

Skąd możemy obliczyć wartość Φ dla każdego punktu brzegu. $\int (x^2/2) dy$ znika, jeśli weźmiemy ją wzdłuż całego brzegu, ponieważ przedstawia ona moment statyczny przekroju względem osi y , która przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Stąd Φ obliczone z [c] jest przedstawione wzdłuż brzegu krzywą zamkniętą.

Wyobraźmy sobie, że na tej krzywej jest rozciągnięta błona mydlana. Wtedy powierzchnia błony spełnia równanie [a] i warunek brzegowy [c]. Stąd rzędne błony przedstawiają funkcję naprężeń Φ we wszystkich punktach przekroju w skali przyjętej dla przedstawienia funkcji Φ wzdłuż brzegu (równanie [c]).



Rys. 196a



Rys. 196b

Fotografia na rys. 196a ilustruje jeden ze sposobów stosowany przy konstrukcji brzości błony mydlanej. W płytce celuloidowej wycina się otwór w taki sposób, że po zgięciu płytki rzut brzości otworu na płaszczyznę poziomą ma ten sam kształt co brzość przekroju poprzecznego belki. Płytkę jest umocowana na pionowych sworzniach i ustalana za pomocą nakrętek i podkładek w położeniu, w którym rzędne wzdłuż brzości otworu przedstawiają w pewnej skali wartości Φ dane wyrażeniem [c]. Fotografia na rys. 196b ilustruje drugi sposób kon-

strukcji brzości za pomocą cienkich arkuszy wyżarzanej blachy mosiężnej¹⁾. Niewielkie poprawki rzędnych wzdłuż brzości otworu mogą być dokonane przez małe wyginanie brzości.

Analogia pomiędzy równaniami błony mydlanej i zagadnieniem zginania zachodzi ściśle tylko w przypadku nieskończone małych ugięć błony. W doświadczeniach jest pożądane, aby całkowity zakres rzędnych błony nie przekraczał jednej dziesiątej jej największego wymiaru poziomego. Jeżeli jest to konieczne, to amplituda rzędnych funkcji wzdłuż brzości może być zmniejszona przez wprowadzenie nowej funkcji Φ_1 zamiast Φ i podstawienie

$$\Phi = \Phi_1 + ax + by \quad [d]$$

gdzie a i b są stałymi dowolnymi. Z wyrażenia tego widać, że funkcja Φ_1 również spełnia równanie błony [a]. Wzdłuż brzości z wyrażen [c] i [d] wartości funkcji

$$\Phi_1 = \frac{P}{I} \int \frac{x^2 dy}{2} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^3}{3I} - ax - by + \text{const}$$

Zmniejszenie zakresu funkcji Φ_1 na brzości można zwykle osiągnąć przez odpowiedni dobór stałych a i b .

Gdy funkcja Φ_1 jest wyznaczona za pomocą metody błony mydlanej, to funkcja Φ będzie obliczona z równania [d]. Gdy znamy funkcję naprężeń Φ , to składowe naprężenia otrzymamy z równań [171], które obecnie przyjmują następującą postać

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{Py^2}{I} \quad [e]$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

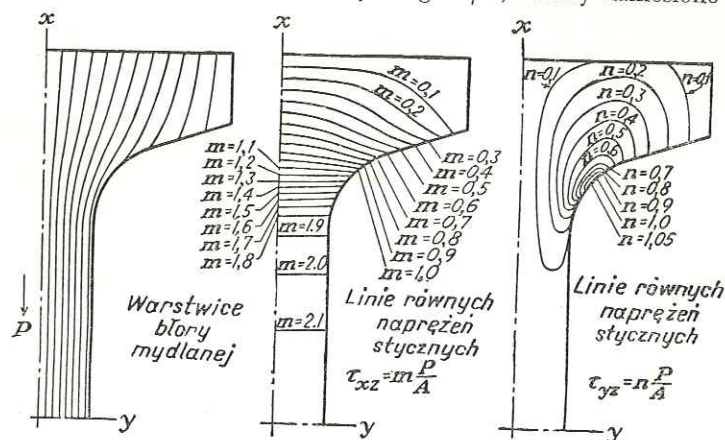
Obecnie możemy łatwo obliczyć składowe naprężenia w każdym punkcie przekroju, o ile tylko znamy wartości pochodnych $\partial \Phi / \partial y$ oraz $\partial \Phi / \partial x$ w tych punktach. Pochodne te są dane kątami nachylenia błony mydlanej w kierunkach y i x . W celu wyznaczenia kątów nachylenia postępujemy jak w przypadku zagadnień skręcania i najpierw wyznaczamy warstwicę powierzchni błony. Z planu warstwic możemy znaleźć kąty nachylenia przez wykreślenie prostych linii równoległych do osi współrzędnych i przez konstrukcję krzywych przedstawiających odpowiednie przekroje błony mydlanej. Nachylenie znalezione w ten sposób należy podstawić do wyrażen [e] na składowe naprężenia stycznego. Dokładność takiego postępowania można sprawdzić obliczając wypadkową wszystkich naprężeń stycznych, rozmieszczonych w przekroju. Wypadkowa ta powinna być równa sile zginającej P , przyłożonej na końcu belki wspornikowej.

Doświadczenia wykazują, że za pomocą metody błony mydlanej możemy osiągnąć zadowalającą dokładność przy wyznaczaniu naprężeń. Wyniki otrzymane w przypadku przekroju dwuteowego²⁾ są pokazane na rys. 197. Z wykresów tych widać, że w pełni potwierdzają się zwykłe założenia teorii elementarnej, że średnik dwuteownika przenosi większość sił poprzecznych oraz że naprężenia styczne są stałe na grubości średnika. Maksymalne naprężenia styczne występujące w warstwie obojętnej pozostają w bardzo dobrej zgodności z naprężeniami obliczonymi z teorii elementarnej. Składowa τ_{yz} w średniku praktycznie jest równa

¹⁾ Patrz praca P. A. Cushmana: „Trans. A. S. M. E.“, 1932.

²⁾ W tym przypadku symetrii wystarczy rozważyć tylko 1/4 przekroju poprzecznego.

zeru i osiąga maksimum w załomach. To maksimum powinno zależeć od promienia zaokrąglenia załomu. Dla przyjętych proporcji wynosi ono tylko około połowy maksymalnego naprężenia τ_{xz} w warstwie obojętnej. Linie równych naprężeń stycznych, dające stosunek tych składowych do średniego naprężenia stycznego P/A , zostały naniesione na rysunkach.



Rys. 197

Koncentracja naprężeń w załomie została rozpatrzona dla przekroju teowego. Promień załomu był stopniowo powiększany i dla każdego przypadku naniesiono warstwicę. Wykazano w ten sposób, że maksymalne naprężenie w narożu równa się maksymalnemu naprężeniu w środku, gdy promień zaokrąglenia wynosi około 1/16 grubości środka.

114. Przemieszczenia. Po znalezieniu składowych naprężenia, przemieszczenia u, v, w możemy obliczyć w ten sam sposób jak w przypadku czystego zginania (por. str. 227). Rozważmy tu linię ugięcia belki wspornikowej. Krzywizny w tej linii w płaszczyznach xz i yz dane są z dostateczną dokładnością wartościami pochodnych $\partial^2 u / \partial z^2$ i $\partial^2 v / \partial z^2$ dla $x=y=0$. Wielkości te możemy obliczyć z poniższych równań

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = \frac{P(l-z)}{EI} \quad [a]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} = 0$$

Widzimy, że linia środkowa belki wspornikowej jest zginana w płaszczyźnie xz , w której działa obciążenie, a krzywizna w dowolnym punkcie jest proporcjonalna do momentu zginającego w tym punkcie, tak jak to zwykle przyjmuje się w elementarnej teorii zginania. Przez całkowanie pierwszego z równań [a] znajdziemy

$$u = \frac{Plz^2}{2EI} - \frac{Pz^3}{6EI} + cz + d \quad [b]$$

gdzie c i d są stałymi całkowania, które musimy wyznaczyć z warunków na utwierdzonym końcu belki wspornikowej. Jeżeli koniec linii środkowej jest utwierdzony, to u i du/dz są równe zeru dla $z=0$ i stąd stałe c i d w równaniu [b] równają się zeru.

Przekroje poprzeczne belki nie pozostaną płaskie, lecz z powodu działania sił poprzecznych wypaczają się. Kąt nachylenia elementu powierzchni wypaczonego przekroju w środku ciężkości

względem ugiętej linii środkowej wynosi

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(\tau_{xz})_{x=0, y=0}}{G}$$

i możemy go obliczyć, gdy znamy naprężenia styczne w środku ciężkości.

115. Dalsze badania dotyczące zginania. W poprzednich paragrafach rozważaliśmy zagadnienie zginania belki wspornikowej utwierdzonej na jednym końcu i obciążonej siłą poprzeczną na drugim końcu. Otrzymane rozwiązania są rozwiązaniami ścisłymi zagadnienia zginania, o ile tylko siły zewnętrzne są rozmieszczone na końcowych przekrojach w ten sam sposób jak naprężenia $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ znalezione z rozwiązań. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to w rozkładzie naprężeń w pobliżu końców belki będą występowały miejscowe nieregularności, lecz na podstawie zasady *Saint-Venanta* możemy przyjąć, że w dostatecznej odległości od końców, powiedzmy w odległości większej niż wymiary przekroju belki, rozwiązanie nasze jest wystarczająco dokładne. Stosując tę samą zasadę, możemy rozszerzyć zastosowanie powyższych rozwiązań na inne przypadki obciążeń i podparcia belek. Możemy przyjąć z dostateczną dokładnością, że naprężenia w dowolnym przekroju belki w dostatecznej odległości od obciążenia zależą jedynie od wielkości momentu zginającego i siły poprzecznej w tym przekroju i mogą być obliczone przez superpozycję rozwiązań otrzymanych poprzednio dla belki wspornikowej.

Jeżeli siły zginające są nachylone do głównych osi przekroju belki, wtedy możemy zawsze rozłożyć je na dwie składowe działające w kierunkach osi głównych i zginanie w każdej z dwu płaszczyzn głównych może być rozpatrzone oddzielnie. Wtedy całkowite przemieszczenia i odkształcenia otrzymamy stosując zasadę superpozycji.

W pobliżu punktów przyłożenia sił zewnętrznych mają miejsce nieregularności w rozkładzie naprężeń, które rozważaliśmy uprzednio w przypadku wąskiego przekroju prostokątnego (por. par. 36). Analogiczne rozważania dla innych kształtów przekrojów wykazują, że nieregularności te mają charakter lokalny¹⁾.

Zagadnienie zginania jest rozwiązane również dla pewnych przypadków obciążenia ciągłego²⁾. Wykazano, że w takich przypadkach linia środkowa belki zwykle wydłuża się lub skraca tak jak w przypadku wąskiego przekroju prostokątnego (par. 21). W tych przypadkach krzywizna linii środkowej nie jest już proporcjonalna do momentu zginającego, choć konieczne poprawki są małe i mogą być pominięte w zadaniach praktycznych. W przypadku np. belki kołowej zginanej ciężarem własnym³⁾ krzywizna na końcu utwierdzonym dana jest za pomocą wyrażenia

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \left[1 - \frac{7 + 12\nu + 4\nu^2}{6(1+\nu)} \frac{a^2}{l^2} \right]$$

gdzie a jest promieniem przekroju, l długością belki wspornikowej. Drugi człon w nawiasie jest poprawką na wielkość krzywizny, spowodowaną rozkładem obciążenia. Jest ona mała, rzędu a^2/l^2 . Wniosek ten jest również ważny dla belek o innych kształtach przekrojów, zginanych ciężarem własnym⁴⁾.

¹⁾ Patrz L. Pochhammer: „Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes“, Kiel, 1879. Patrz również prace J. Dougalla: „Trans. Roy. Soc.“ (Edinburgh), tom 49, str. 895, 1914.

²⁾ J. H. Michell: „Quart. J. Math.“, tom 32, 1901, również K. Pearson, tamże, tom 24, 1889, i K. Pearson i L. N. G. Filon, tamże, tom 31, 1900.

³⁾ Problem ten rozważył A. E. H. Love: „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 wyd., str. 362, 1927.

⁴⁾ Przypadek belki wspornikowej o przekroju eliptycznym rozpatrzył J. M. Klitchieff; „Biul. Inst. Politech.“ Petersburg, str. 441, 1915.