

Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji

- **Adam Dacko**, dr hab. inż., prof. PW, ZWMiK, ITLiMS MEiL PW
- Gmach NL, pokój 34, antresola Lab. ZWMiK (wejście koło portierni)
- adam.dacko@pw.edu.pl tel. 22 234 5070 (ew. adam.dacko@gmail.com)

- MKwMK = 27 godzin (9W + 18L) spotkania 3-godzinne (3x9 godz)
- Obecność nadzorowana (WSKAZANA, zwłaszcza na wykładzie..)
- Ocena finalna = 2/3 kol wykład + 1/3 lab (to NIE JEST średnia arytm.)
- Zaliczenie przedmiotu wymaga POZYTYWNYCH składowych

Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji

• Część wykładowa

- MRS
- MEB
- MES
 - standard
 - Explicit
 - XFEM
- SPH

(brak literatury zwartej ...)

KOLOKWIUM

• Część laboratoryjna (komp.)

- Patran+NASTRAN
- Mentat+MARC
- FEMAP (??)

Możliwość instalacji wersji studenckich
(łącznie pewnie 8-10 GB dysku...)

(Instrukcje do ćwiczeń „do odklikania”)

Sprawozdania z 5 ćwiczeń

Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji

Część laboratoryjna (komp.)

- Patran+NASTRAN
- Mentat+MARC

<https://www.mscsoftware.com/student-editions>

- Wersje studenckie:
- formularz rejestracyjny
(skan legitymacji studenckiej.)

MSC Nastran with Patran

Fast & Accurate Multidiscipline Simulations

MSC Nastran is the world's most widely used Finite Element Analysis (FEA) solver, and Patran is a widely used modeling software that makes model creation and post-processing easy. When it comes to analyzing stress, dynamics, or vibration behavior of real-world complex systems, manufacturers of everything from parts and assemblies to full vehicles choose MSC Nastran because of its high reliability and accuracy.

Supported Platforms: Windows 7 64-bit, Windows 10 64-bit

Marc

Advanced Nonlinear Simulation Solution

Marc combines to deliver a complete solution (pre-processing, solution, and post-processing) for implicit nonlinear FEA. Marc provides the easiest to use and most robust capabilities for contact, large strain, and multiphysics analysis available today to solve static and quasi-static nonlinear problems.

Supported Platforms: Windows 7 64-bit, Windows 10 64-bit



Metoda Różnic Skończonych (MRS)

Finite Differences Method (FDM)

Metoda różnic skończonych (szczyt 1920- 1950/60)

Metoda różnic skończonych (MRS) oparta jest na dyskretyzacji matematycznej równań różniczkowych opisujących zachowanie się danego ośrodka ciągłego (kontinuum).

- Jej istotą jest zastąpienie operatorów różniczkowych odpowiednimi operatorami różnicowymi (ilorazami różnicowymi) określonymi na dyskretnym zbiorze punktów zwanym siatką dyskretyzacyjną.
- Elementy tego zbioru nazywane są węzłami.
- W wyniku takiego podejścia zagadnienie brzegowe sprowadzone zostaje do układu równań algebraicznych, w którym niewiadomymi są wartości poszukiwanej funkcji w węzłach siatki dyskretyzacyjnej

Zalety:

- Prostota i duża efektywność dla obszarów regularnych

Wady:

- Wersja podstawowa MRS dotyczy regularnej siatki węzłów, co stanowi znaczne ograniczenie w zastosowaniu do obszarów o złożonej geometrii.
- Brak możliwości lokalnego zagęszczenia siatki i trudność w łączeniu obszarów o różnych wymiarach.
- Mała dokładność rozwiązania dla zbyt małej liczby węzłów dyskretyzacji.

UWAGA:

Ważne jest, aby oszacować zbieżność rozwiązania, to znaczy sprawdzić czy kolejne zagęszczenie siatki daje podobne lub znacząco inne rozwiązanie w stosunku do poprzedniej (mniej dokładnej) dyskretyzacji. Rozwiązanie danej metody można/należy porównać z innymi metodami

Ilustracja wstępna (inżynierska) - BELKI

- ugięcia belek – RRZ 4 : ugięcie-obciążenie ciągłe

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x)$$

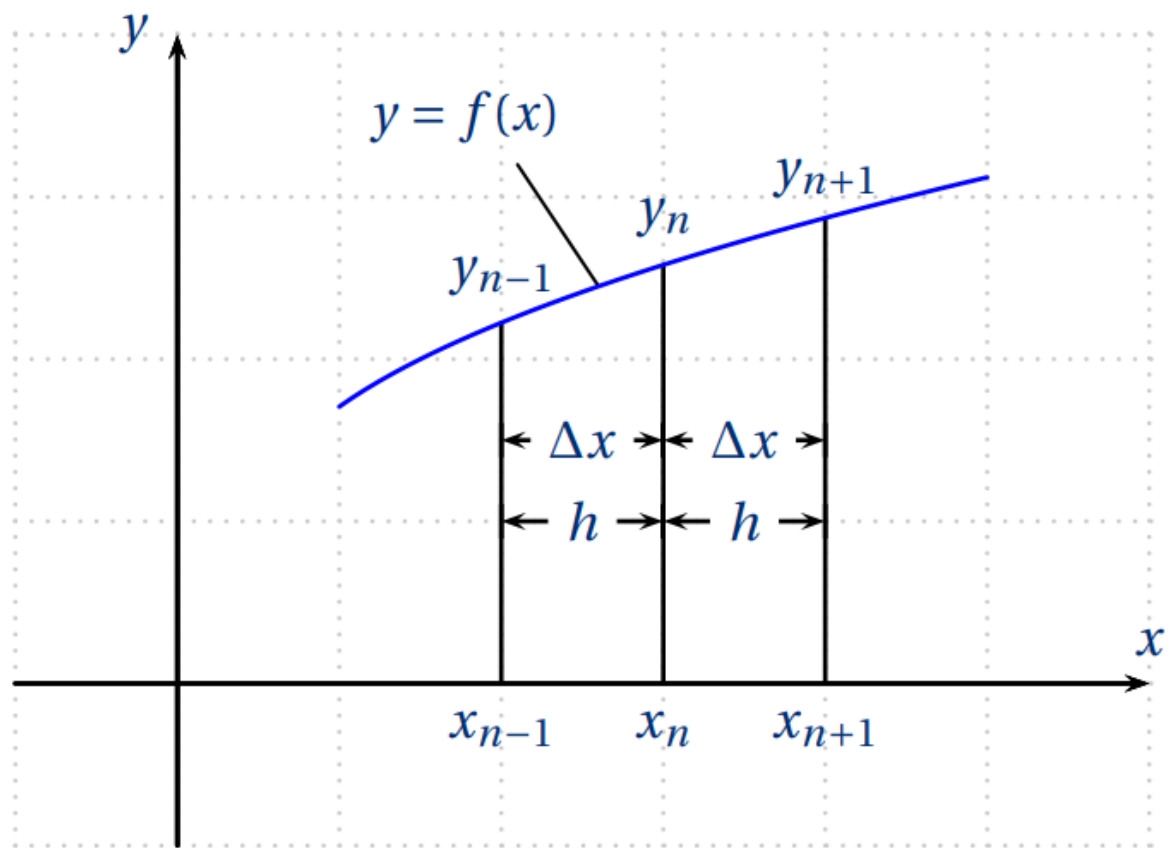
gdzie $w(x)$ – ugięcie, $q(x)$ – obciążenie poprzeczne belki

- zginanie belek –RRZ 2: ugięcie-moment

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

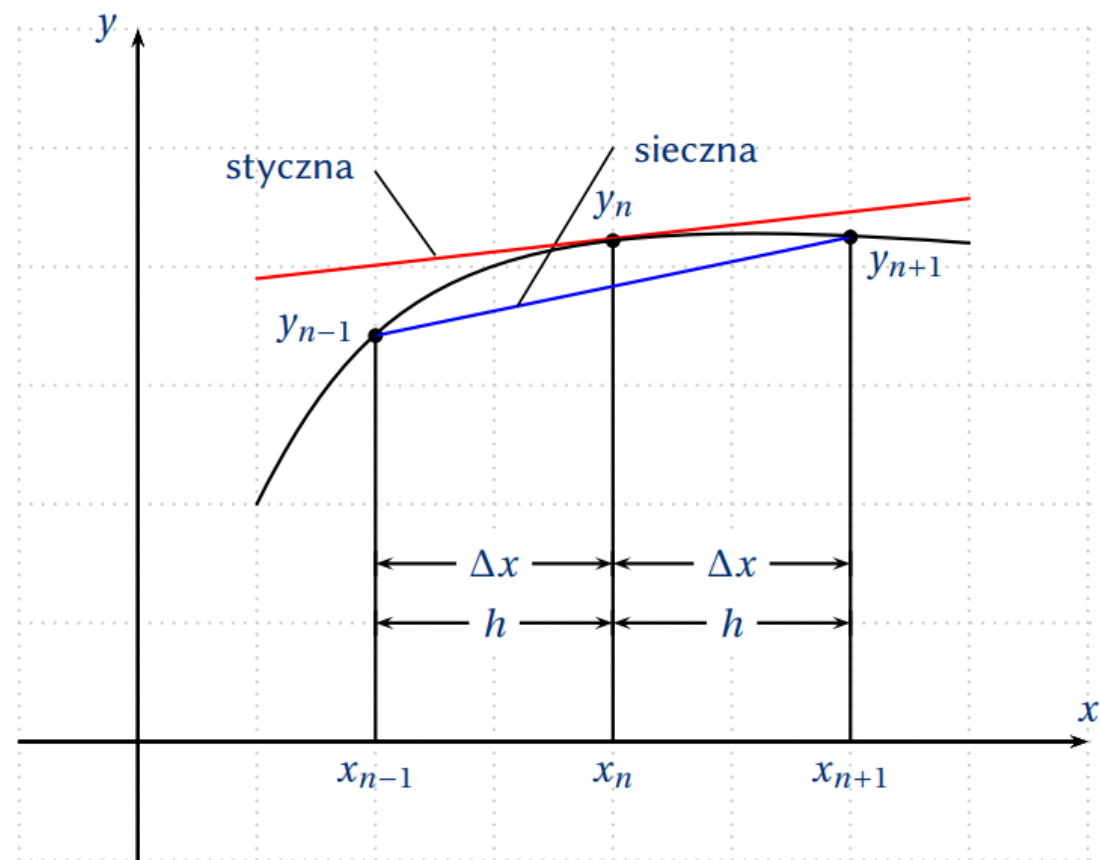
gdzie $\frac{M(x)}{EI} = \kappa(x)$ krzywizna belki w punkcie x .

- Operatory różnicowe stanowiące punkt wyjścia metody można otrzymać wychodząc z definicji pochodnej funkcji w punkcie.
- W tym celu rozpatruje się dowolną funkcję ciągłą $y = f(x)$



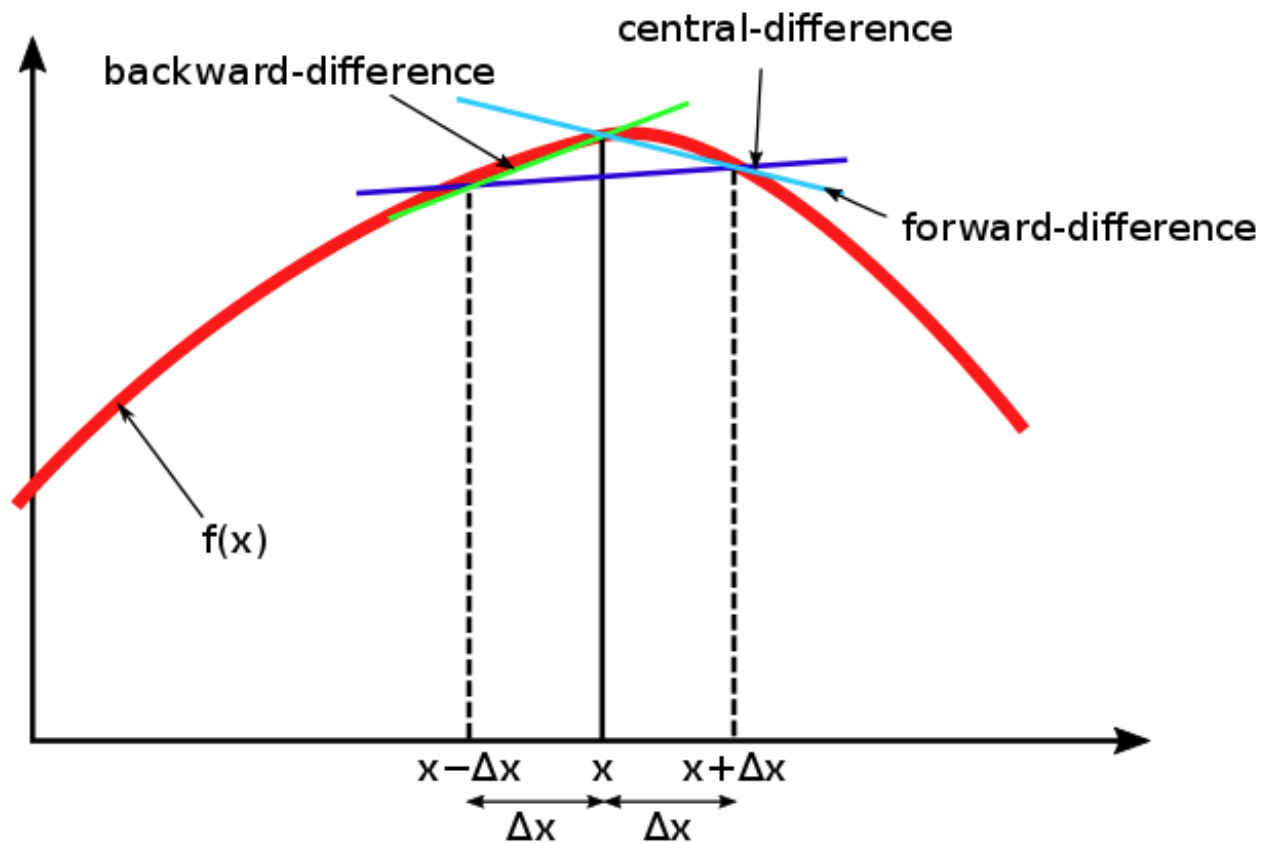
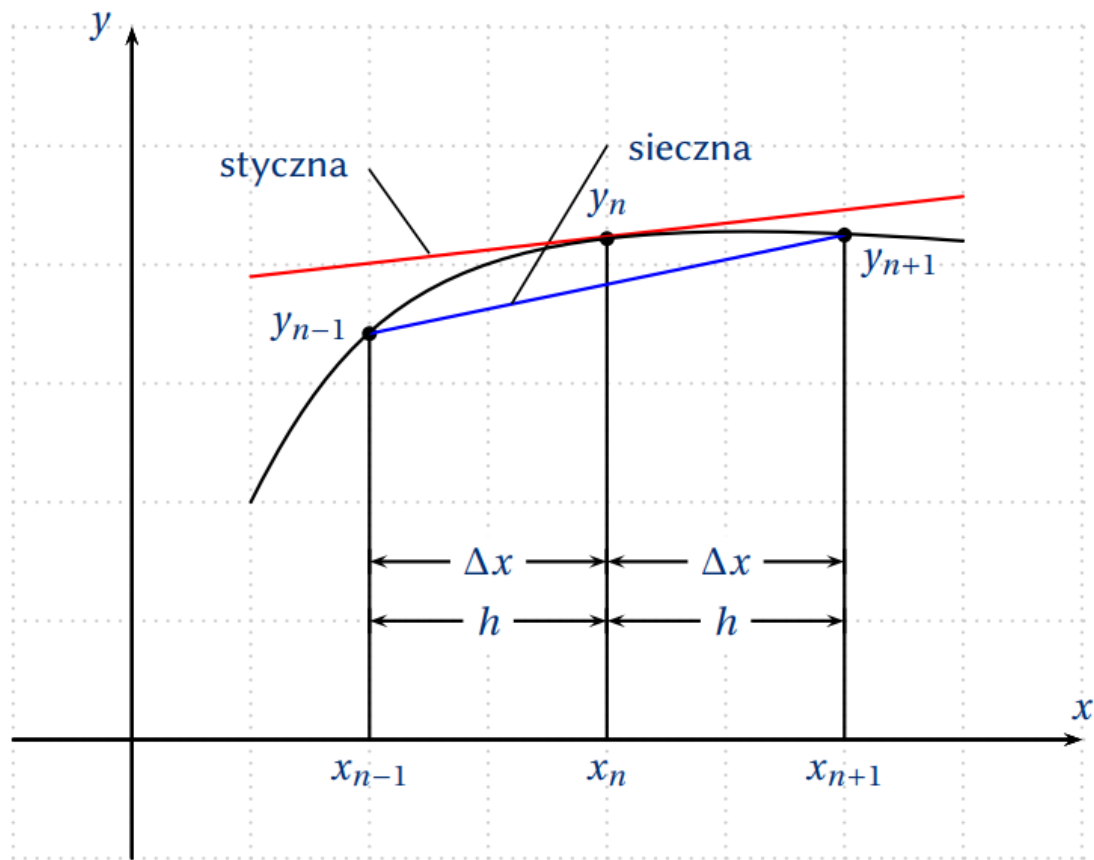
$$y' = \left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_n}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y_n}{\Delta x}$$



$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}$$



$$\frac{dy}{dx} \Big|_n = \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x}$$

Ilustracja liczbowa

Obliczyć przybliżoną wartość pierwszej pochodnej funkcji $y = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$, przyjmując $h = 0.1$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = 3x^2 \Big|_{x=2} = 3 \cdot 2^2 = 12 \quad \text{rozwiązanie ścisłe – pochodna analityczna}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx \frac{(2+0.1)^3 - 2^3}{0.1} = 12.61 \quad \text{iloraz różnicowy wprzód}$$

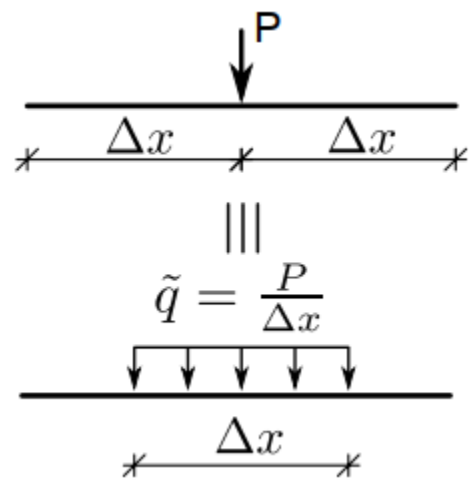
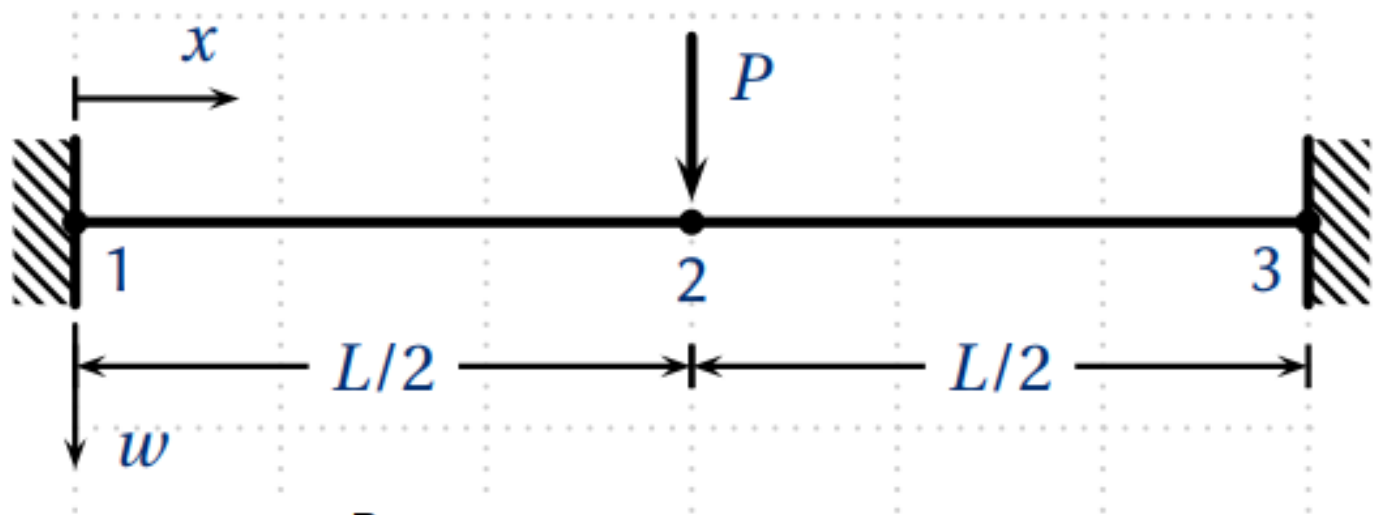
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx \frac{2^3 - (2-0.1)^3}{0.1} = 11.41 \quad \text{iloraz różnicowy wstecz}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx \frac{(2+0.1)^3 - (2-0.1)^3}{2 \cdot 0.1} = 12.01 \quad \text{iloraz różnicowy centralny}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_n &= \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta x^2} = \frac{\Delta}{\Delta x} \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y_{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{\Delta y_{n-1/2}}{\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{1/2\Delta x + 1/2\Delta x} - \frac{y_n - y_{n-1}}{1/2\Delta x + 1/2\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} - \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_n &= \frac{\Delta^4 y_n}{\Delta x^4} = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta x^2} = \frac{\frac{\Delta^2 y_{n+1}}{\Delta x^2} - 2\frac{\Delta^2 y_n}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 y_{n-1}}{\Delta x^2}}{\Delta x^2} \\
&= \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n - 2(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta x^4} \\
&= \frac{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta x^4}
\end{aligned}$$

$n=0$				1		
$n=1$			1	1		
$n=2$		1	-2	1		
$n=3$	-1	2	-2	1		
$n=4$	1	-4	6	-4	1	

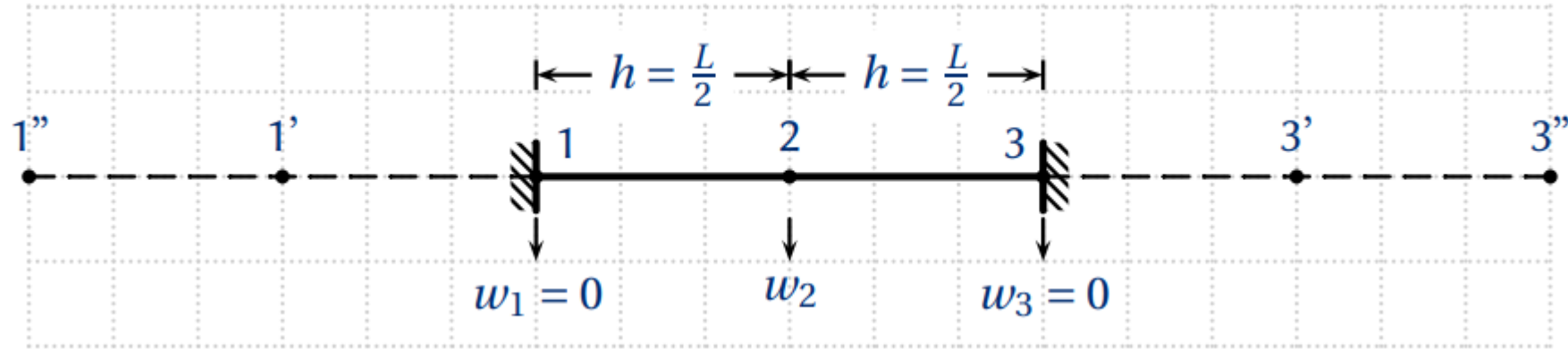


$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x)$$

$$w(x=0) = 0, \quad w(x=L) = 0,$$

$$\varphi(x=0) = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{i} \quad \varphi(x=L) = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

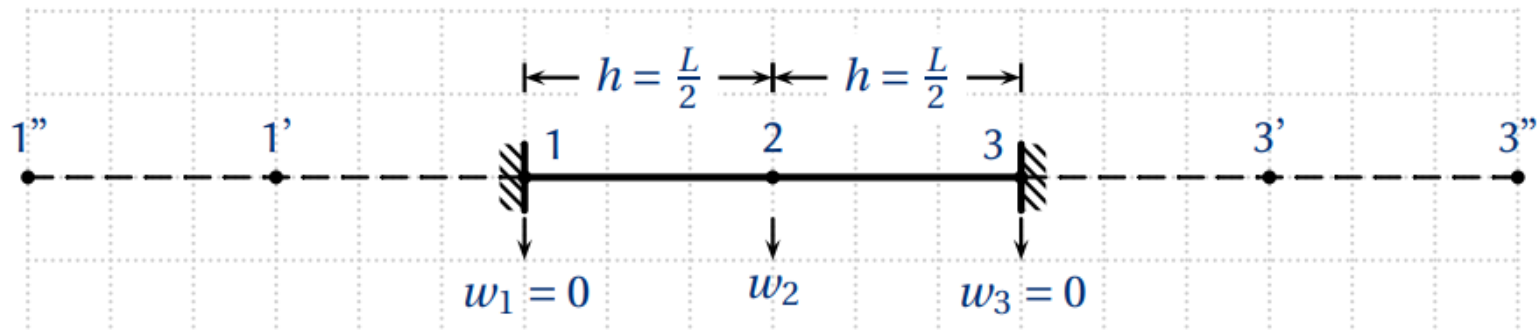
$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_n &= \frac{\Delta^4 y_n}{\Delta x^4} = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta x^2} = \frac{\frac{\Delta^2 y_{n+1}}{\Delta x^2} - 2 \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 y_{n-1}}{\Delta x^2}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n - 2(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta x^4} \\ &= \frac{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta x^4} \end{aligned}$$



$$w_1'' - 4w_1' + 6w_1 - 4w_2 + w_3 = \frac{q_1}{EI} h^4$$

$$w_1' - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_3' = \frac{q_2}{EI} h^4$$

$$w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_3' + w_3'' = \frac{q_3}{EI} h^4$$



$$\varphi_1 = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \frac{w_2 - w_1'}{2h} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1' = w_2$$

$$w_3' = w_2.$$

$$w_1 = w_3 = 0.$$

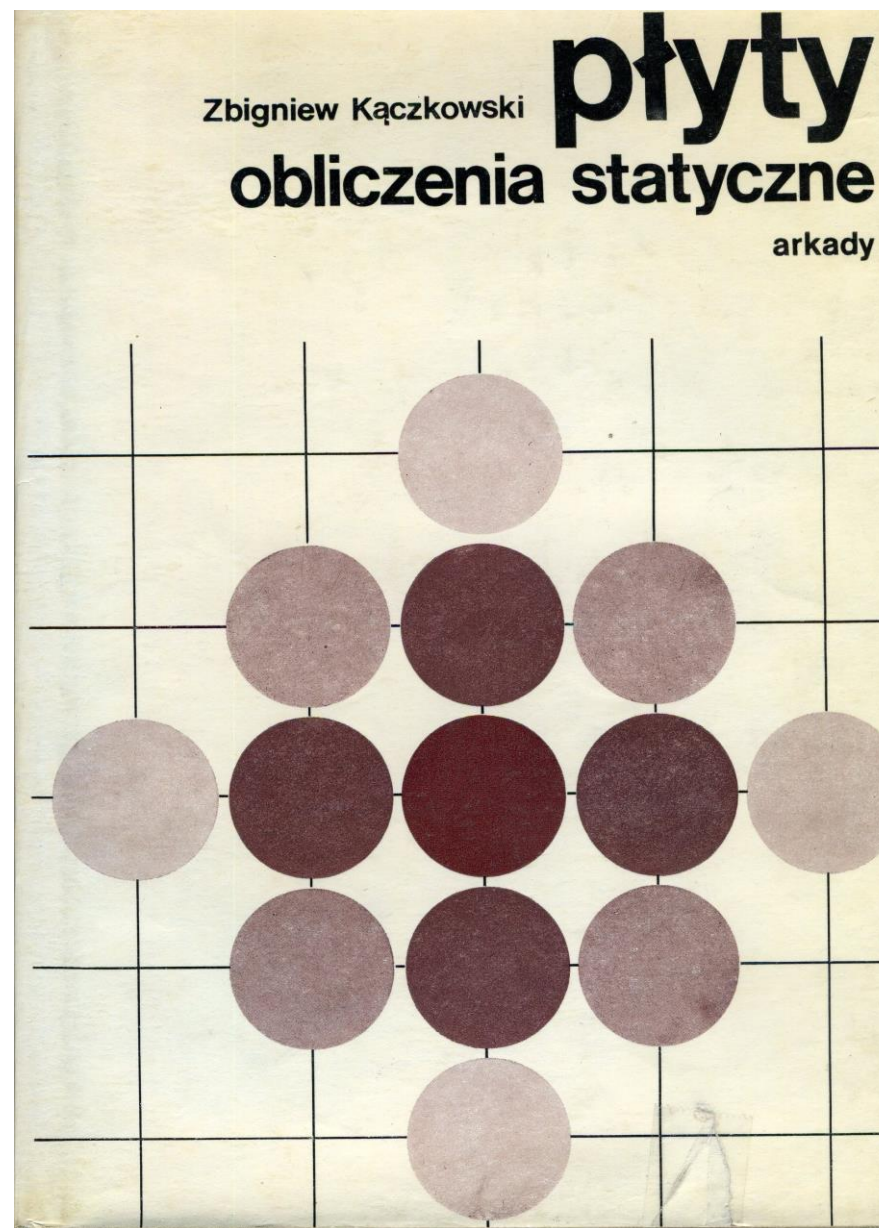
$$q_2 = P/h \text{ i } h = L/2$$

$$8w_2 = \frac{q_2}{EI} h^4 = \frac{P}{EI} h^3 = \frac{PL^3}{8EI} \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{PL^3}{64EI}$$

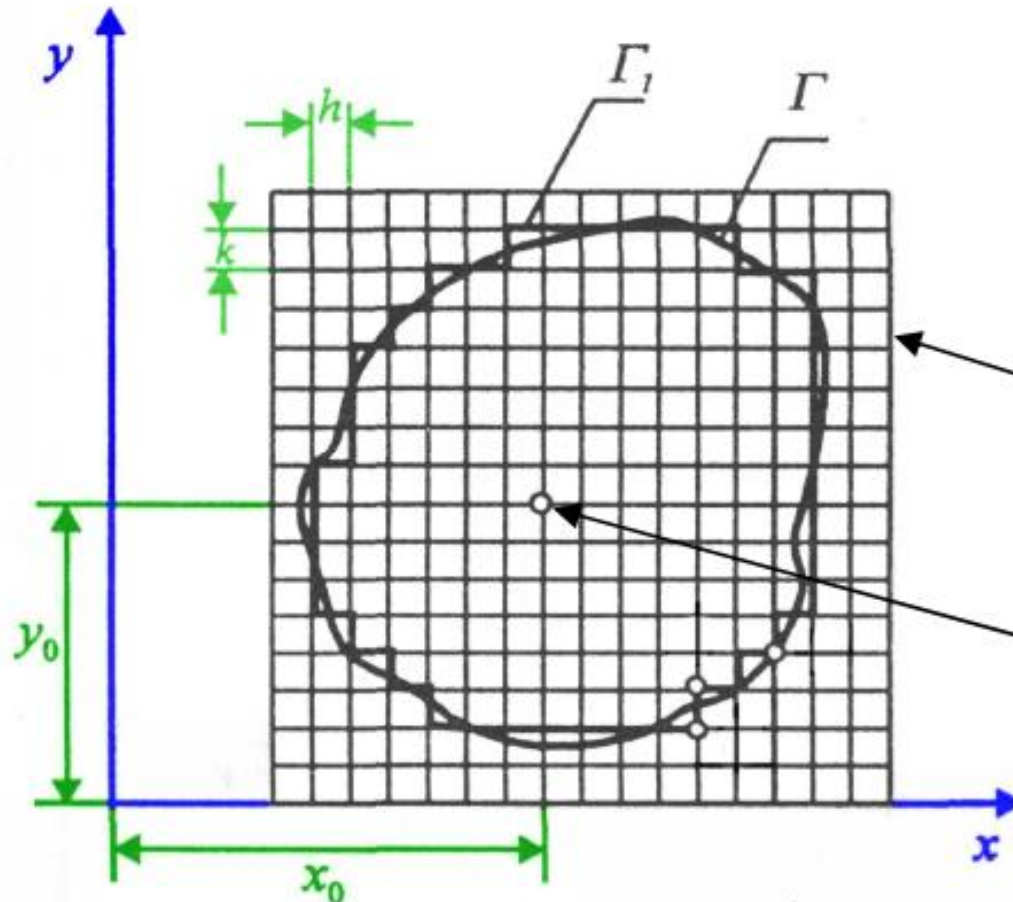
$$w_2^{\text{dok}} = \frac{PL^3}{192EI}$$

Prof. dr inż. Zbigniew Kączkowski
Wydział Inżynierii Lądowej PW

Płyty. Obliczenia statyczne.
Arkady, Warszawa 1980, pp 372...



MRS dla 2D (płyta). Definicje



Γ – brzeg obszaru obliczeń

Γ_1 – brzeg przybliżony

siatka: podział obszaru obliczeń

k, h – skok siatki

węzeł: punkt przecięcia linii siatki

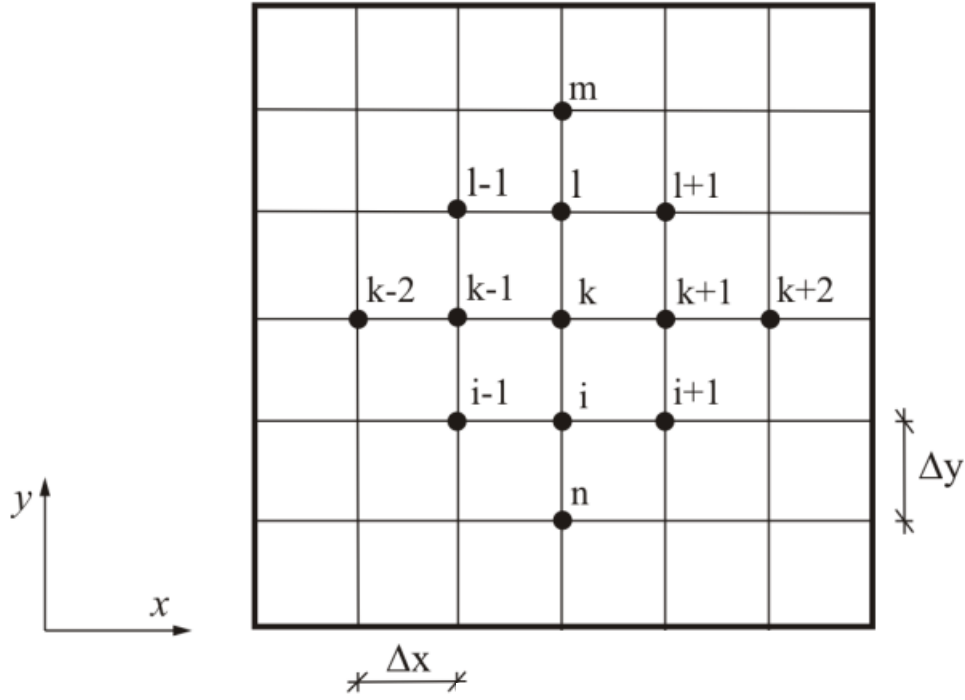
x_0, y_0 – współrzędne węzła

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right) = q(x, y)$$

plus odpowiednie Warunki Brzegowe

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

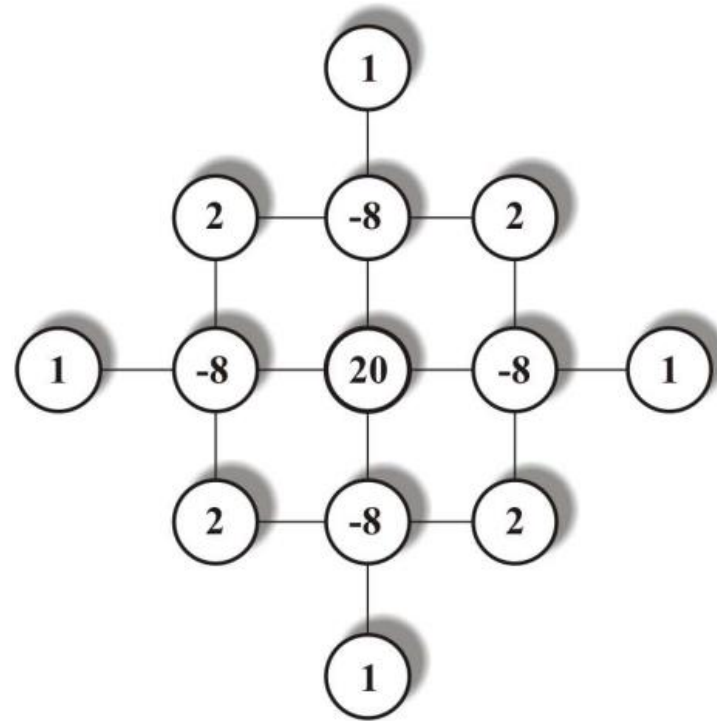


$$20w_k - 8(w_{k-1} + w_{k+1} + w_l + w_i) + 2(w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) + w_{k-2} + w_{k+2} + w_m + w_n = \frac{q_k \Delta x^4}{D}$$



$$\frac{1}{\Delta x^4} (w_{k-2} - 4w_{k-1} + 6w_k - 4w_{k+1} + w_{k+2}) + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} (w_{l-1} - 2w_l + w_{l+1} - 2w_{k-1} + 4w_k - 2w_{k+1} + w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) + \frac{1}{\Delta y^4} (w_m - 4w_l + 6w_k - 4w_i + w_n) = \frac{q_k}{D}$$

$$20w_k - 8(w_{k-1} + w_{k+1} + w_l + w_i) + 2(w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) + w_{k-2} + w_{k+2} + w_m + w_n = \frac{q_k \Delta x^4}{D}$$



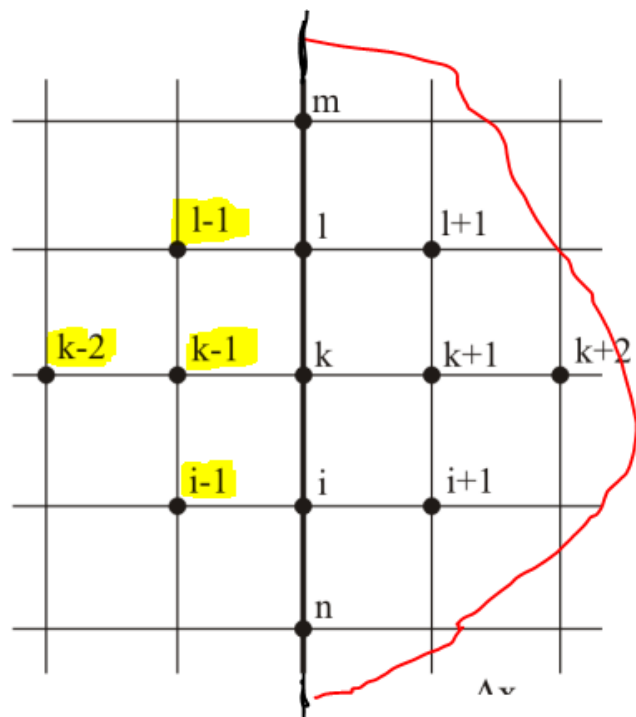
$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

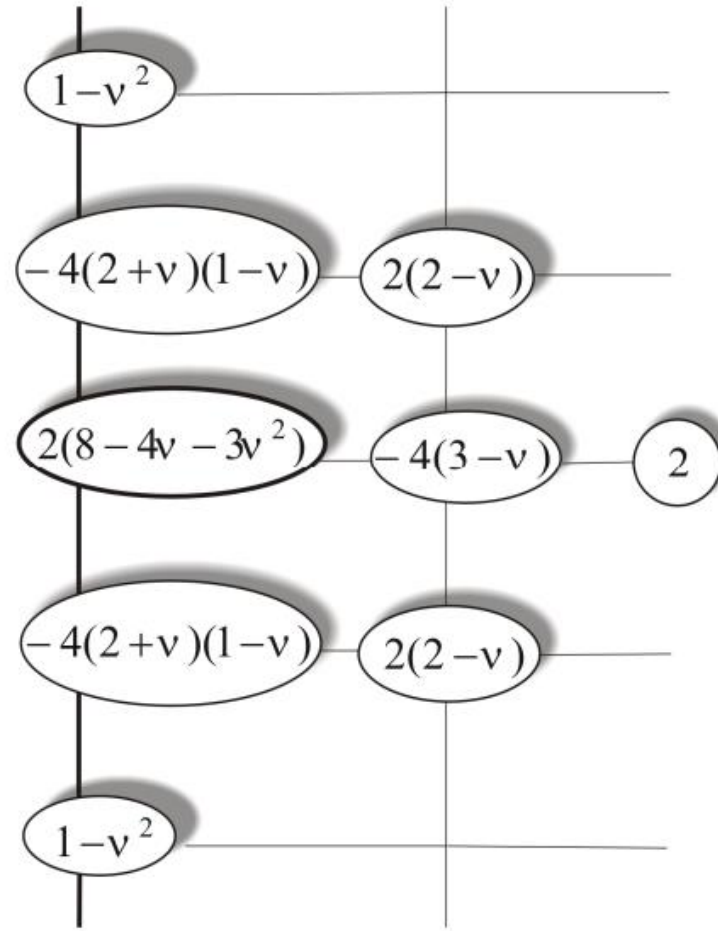
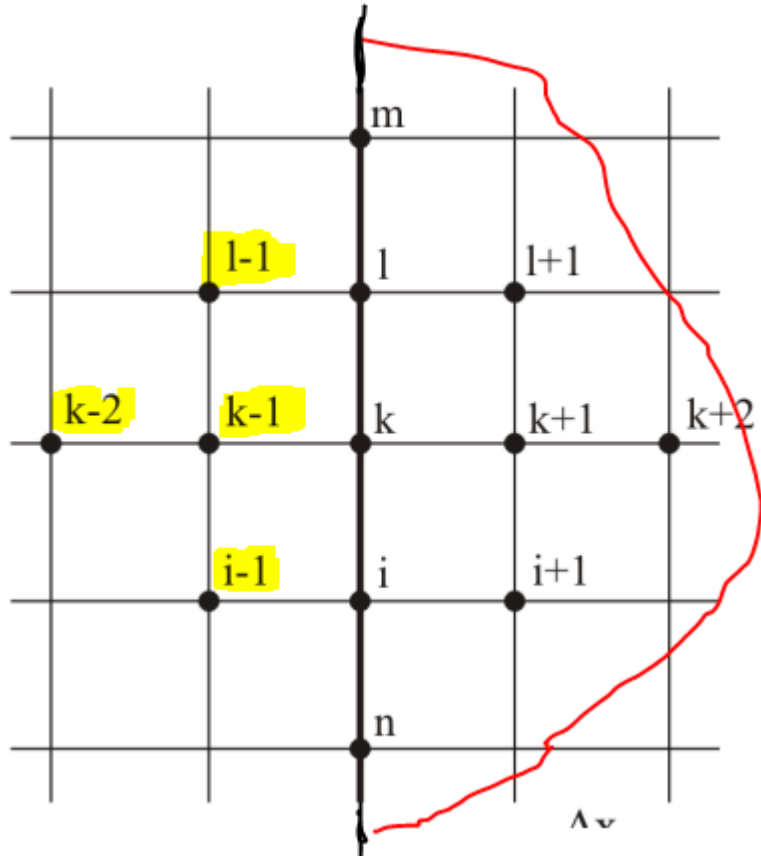
$$\bar{Q}_x = -D \left[\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$\bar{Q}_y = -D \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

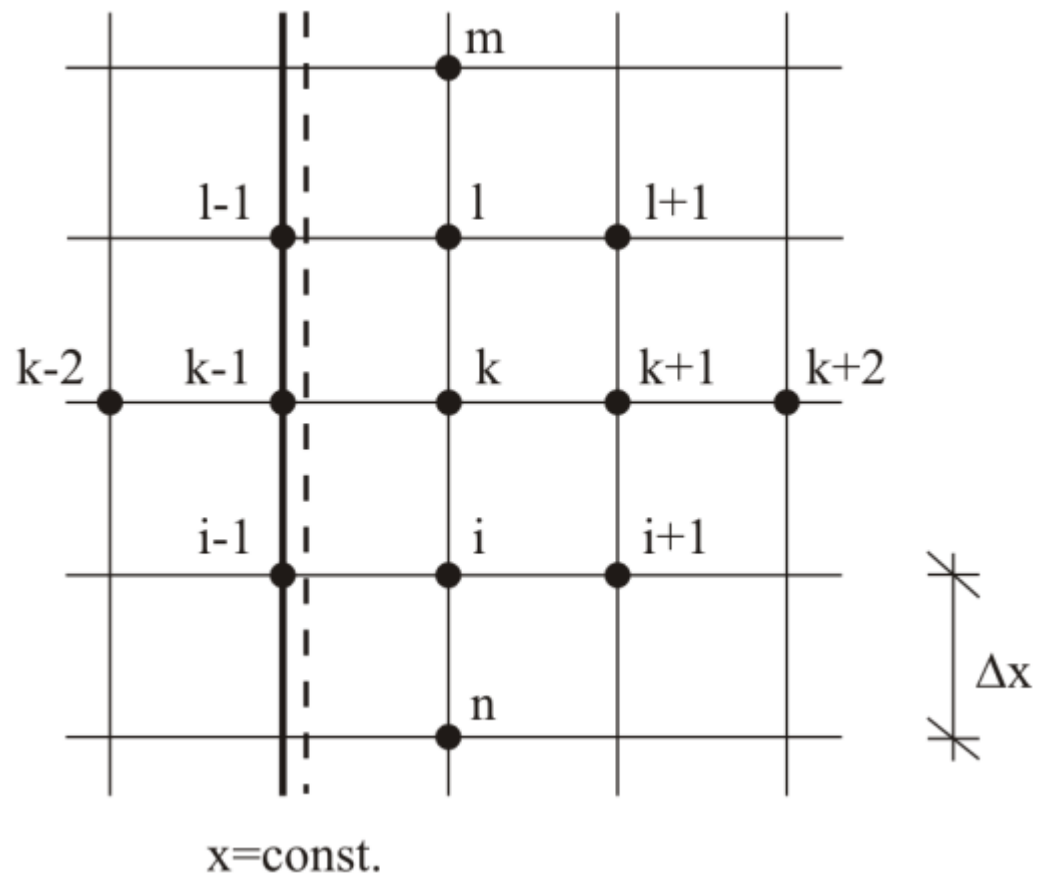


$$M_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

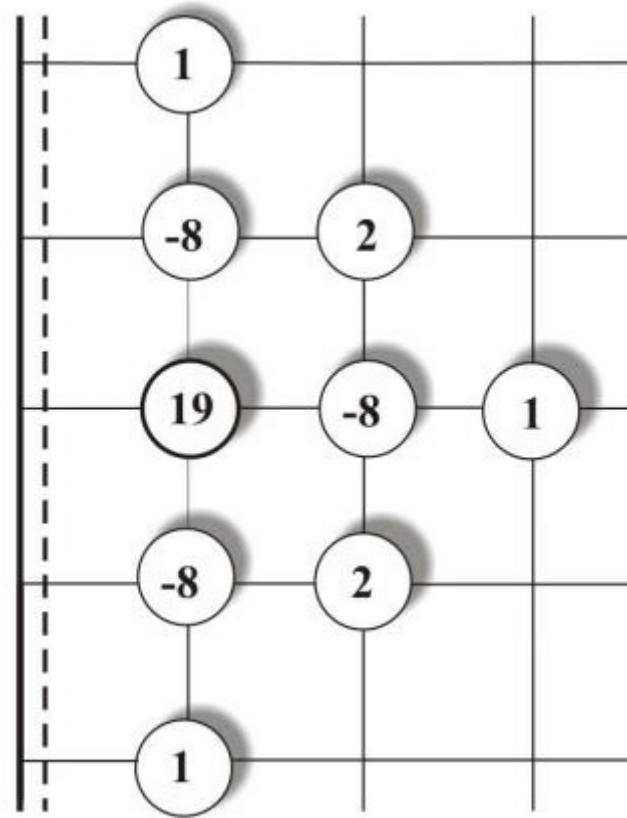
$$\bar{Q}_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} = 0$$

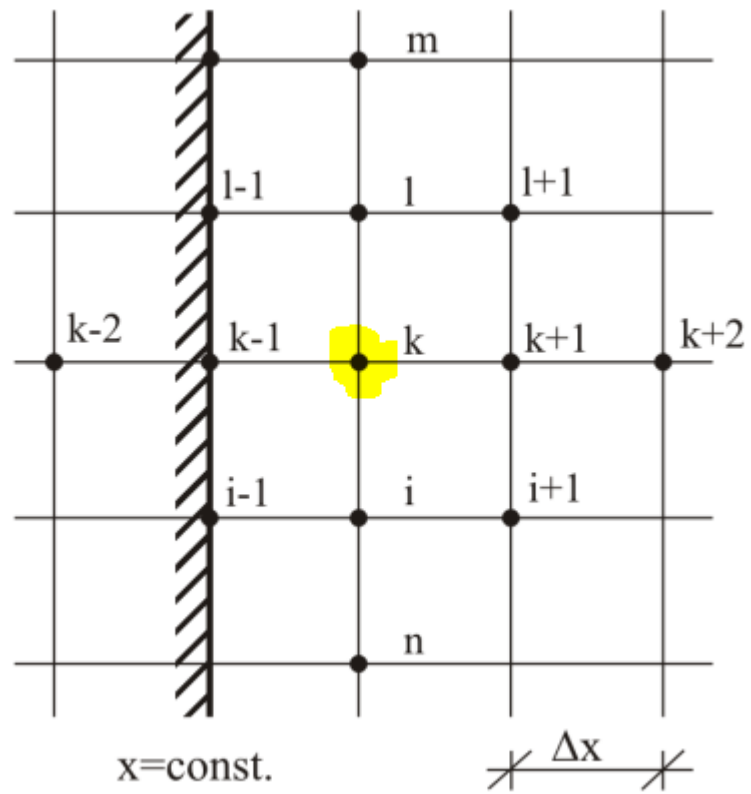


$$\begin{aligned}
 & 2(8 - 4v - 3v^2)w_k - 4(3 - v)w_{k+1} + 2w_{k+2} - 4(2 + v)(1 - v)(w_l + w_i) + \\
 & + 2(2 - v)(w_{l+1} + w_{i+1}) + (1 - v^2)(w_m + w_n) = \frac{q_k \Delta x^4}{D}
 \end{aligned}$$

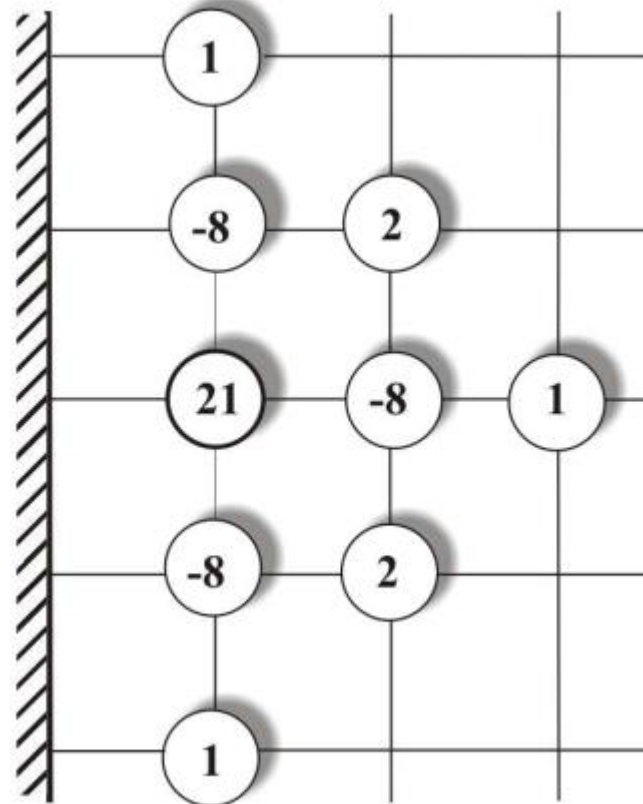


$$w = 0, \quad M_x|_{k-1} = 0$$





$$w = 0, \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{k-1} = 0:$$



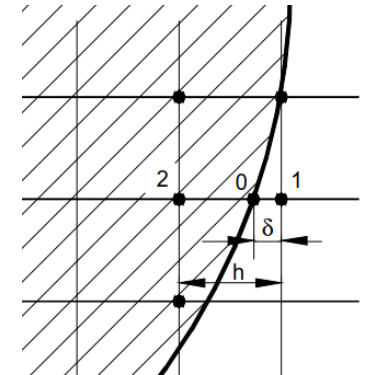
Finalnie: pasmowy układ równań algebraicznych

zalety-

łatwe do rozwiązania – Excel, Matlab...

łatwe - dla prostych kształtów i siatek prostokątnych

pasmove – dobrze oprogramowane, prosta algorytmizacja



wady –

kłopot a warunkami brzegowymi, są dodatkowe zmienne

ograniczenia geometrii

dla siatki „pomiędzy” trzeba interpolować.

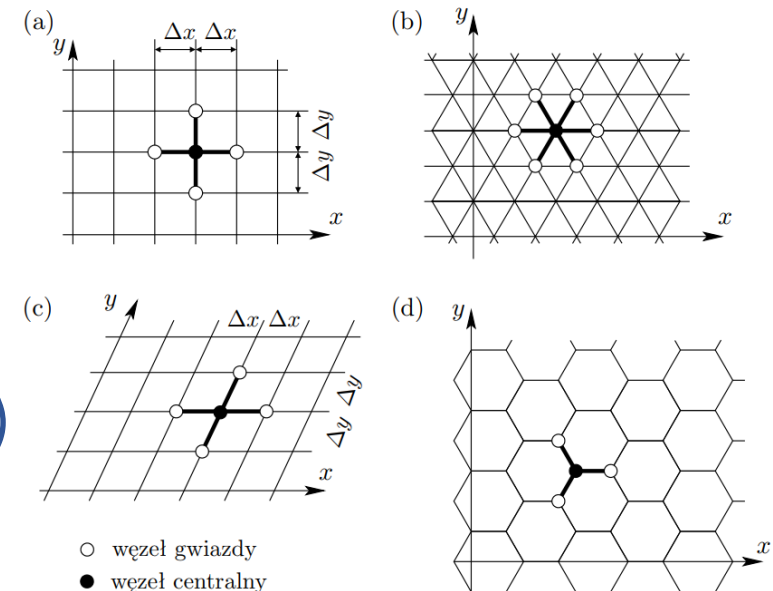
Problemy z brzegami nieprostokreslnymi

rozwój –

inne układy współrzędnych (biegunowe, ukośne) (J.Orkisz)

inne siatki – trójkątne (Z. Kączkowski)

zagadnienia stateczności i dynamiki (W. Nowacki)



„Kto w tym działa”?

Aleja zasłużonych....

USA I. Babuska, Melenk JT.Oden, A.Duarte, T.Liszka, W.Tworzydło T.Belytshko, W.K. Liu, S.Shen, J.S.Chen
J.K.Bathe, S.De, S.Atluri

EU O.C.Zienkiewicz E.Onate, S.Idelsohn A.Huerta, M.Griebel, M.Schweitzer, P.Bouillard, J.V.Sladek, P.Villon

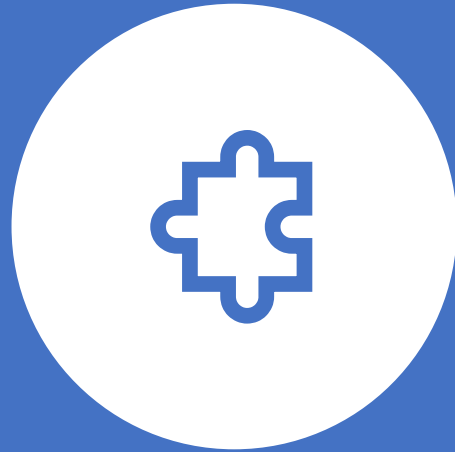
AZJA G.R.Liu , H. Noguchi

PL Z.Kączkowski, R.Tribiño, J.Cendrowicz , J.Kitowski, Cracow Group: J.Orkisz, T.Liszka, W.Tworzydło, J.Krok,
W.Karmowski, M.Pazdanowski, J.Magiera, S.Milewski, I.Jaworska

Pytanie „nr 7” na kolokwium

Metoda różnic skończonych należy do numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Stosuje się w niej przekształcenie zadanego równania.

1. Co uzyskuje się w wyniku tego przekształcenia (co jest faktycznie rozwiązywane: równanie różniczkowe, równanie algebraiczne, układ równań, pochodna, całka)?
2. Co (oprócz równania różniczkowego) jest potrzebne do rozwiązania zadania?
3. Co jest wynikiem obliczeń tą metodą? Czy rozwiązanie uzyskuje się w postaci jednej funkcji, w postaci kilku funkcji, w postaci liczby, czy w postaci zbioru liczb?
4. Wyjaśnij pojęcia „siatka”, „węzły”, oraz „warunki brzegowe”.
5. Co to są „warunki brzegowe”?
6. Co to są „warunki brzegowe Dirichleta” i „warunki brzegowe Neumanna”?



Metoda Elementów Brzegowych (MEB)

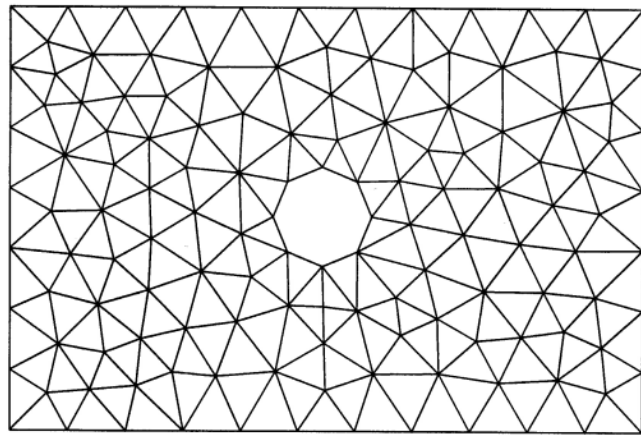
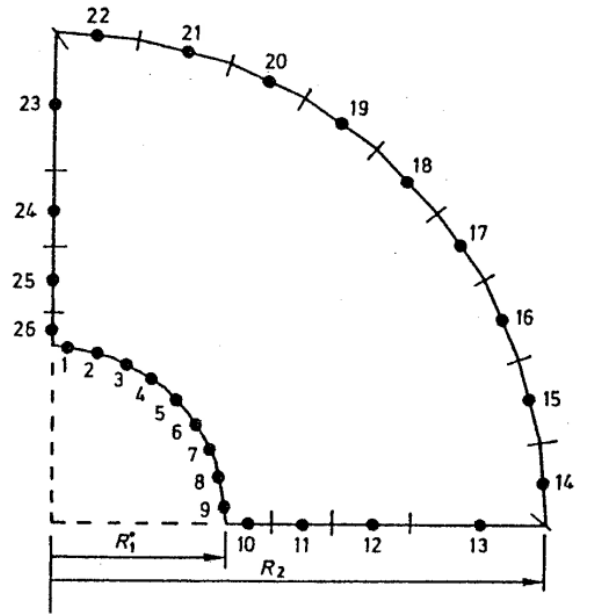
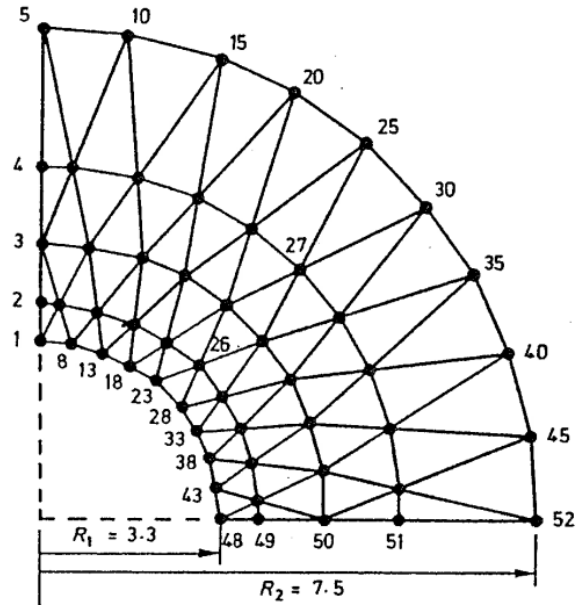
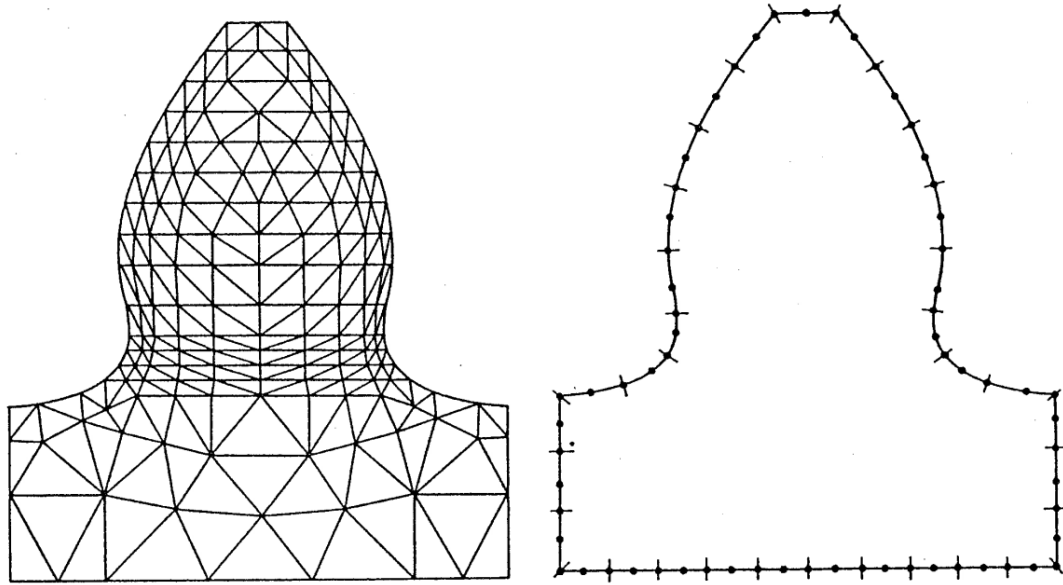
Boundary Element Method (BEM)

Metoda Elementów Brzegowych (początek ok. 1975)

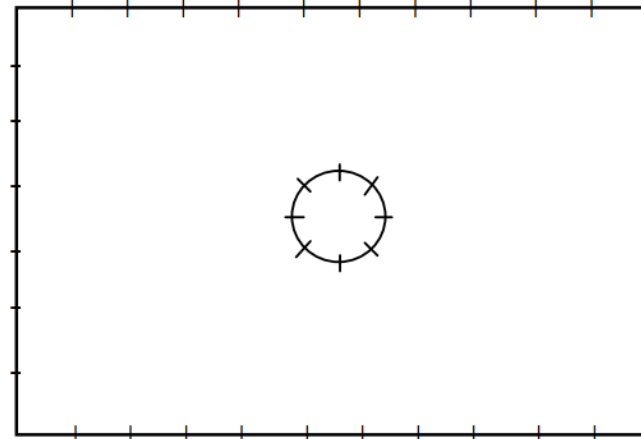
Prasanta Banerjee, Carlos Brebbia

Metoda elementów brzegowych oparta jest na **opisie zagadnienia przez równania całkowe** (dla continuum=ośrodka ciągłego: RC z jądrami Fredholma II rodzaju) – rozwiązywane w sposób przybliżony. Równania podlegają dyskretyzacji matematycznej i całkowane są po brzegu, opisanym tzw. elementami brzegowymi.

W wyniku takiego podejścia zagadnienie brzegowe sprowadzone zostaje do układu równań algebraicznych, w którym niewiadomymi są wartości poszukiwanej funkcji w węzłach siatki dyskretyzacyjnej – czyli węzłach leżących na brzegu obszaru.

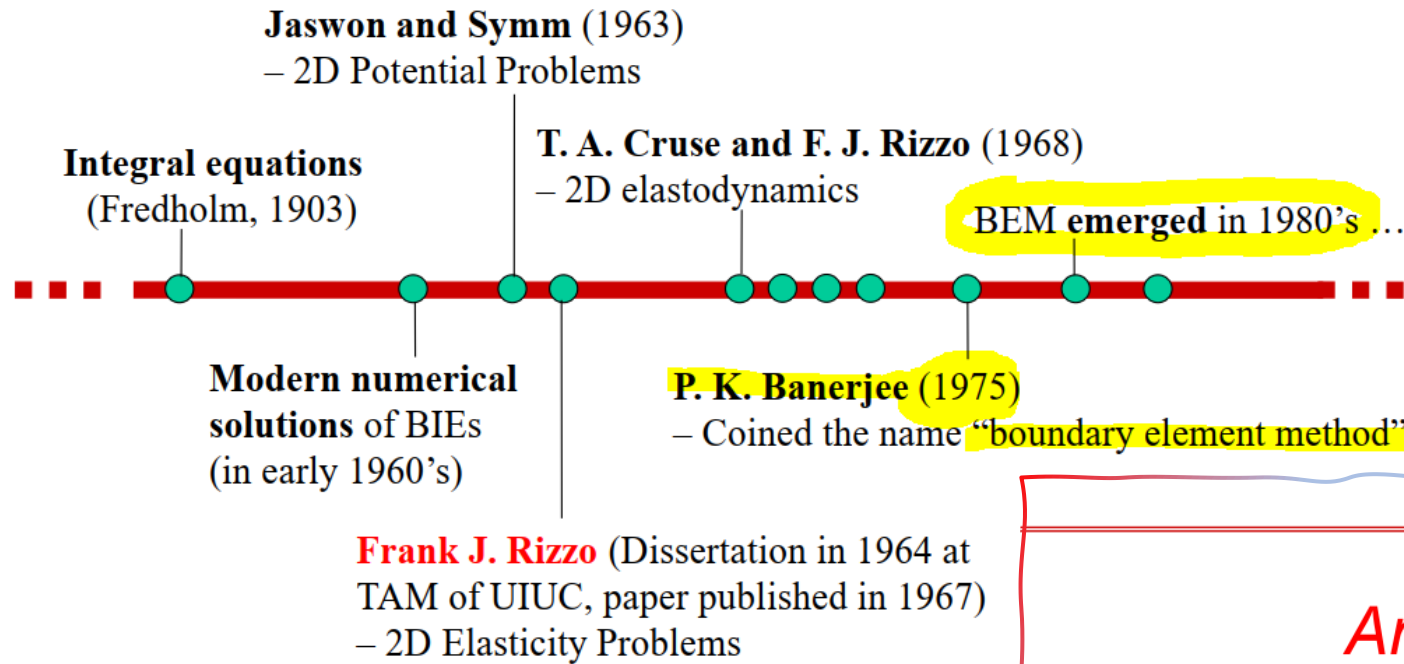


(FEM Discretization: 228 Elements)



(BEM Discretization: 44 Elements)

A Brief History of the BEM



An Introduction to the Boundary Element Method (BEM) and Its Applications in Engineering

Yijun Liu

Updated: October 20, 2018

Available at: http://www.yijunliu.com/Research/BEM_Introduction.pdf

Advantages and Disadvantages of the BEM

Advantages:

- Accuracy – due to the semi-analytical nature and use of integrals in the BIEs
- More efficient in meshing due to the reduction of dimensions
- Good for stress concentration and infinite domain problems
- Good for modeling thin shell-like structures/models of materials
- Neat ... (integration, superposition, boundary solutions for BVPs)

Disadvantages:

- Conventional BEM matrices are dense and nonsymmetrical
- Solution time is long and memory size is large (Both are $O(N^2)$)
- Used to be limited to for solving small-scale BEM models (Not anymore!)

The Solution:

- Various fast solution methods to improve the computational efficiencies of the BEM

Overview of the Fast BEM

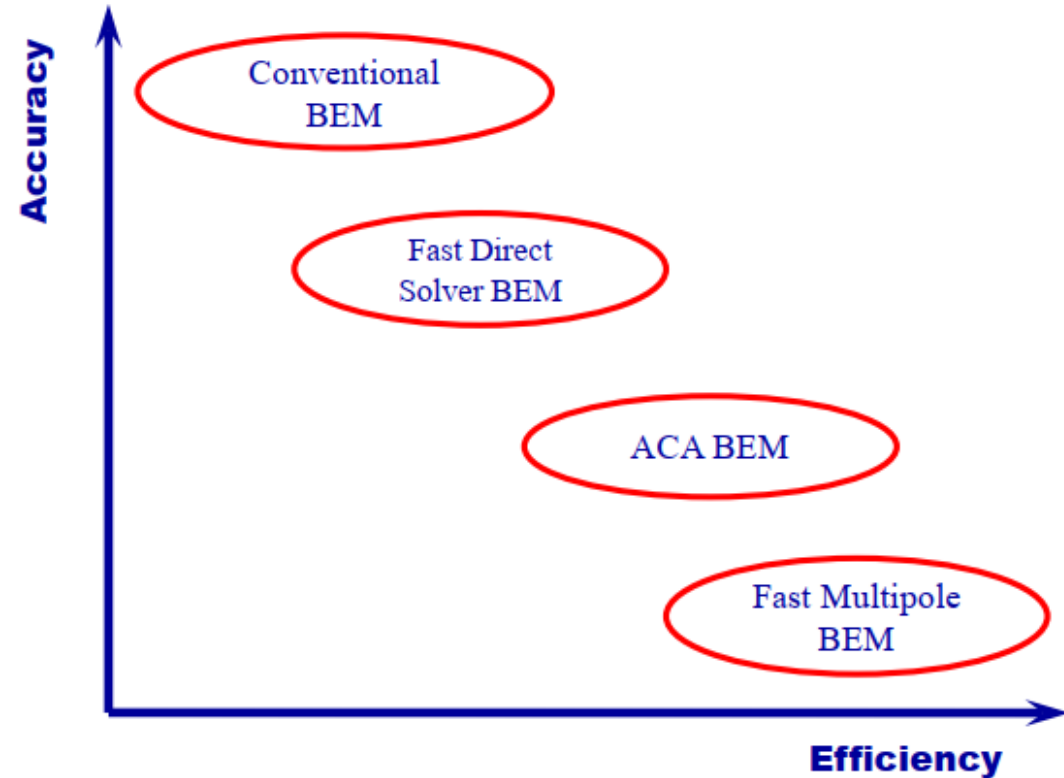
Methods:

- *Fast multipole method (FMM)* (Rokhlin and Greengard, 1980s; Nishimura, 2001)
- *Adaptive cross approximation (ACA)* method (Bebendorf, *et al.*, 2000)
- *Fast direct solvers* (Martinsson, Rokhlin, Greengard, Darve, *et al.*)

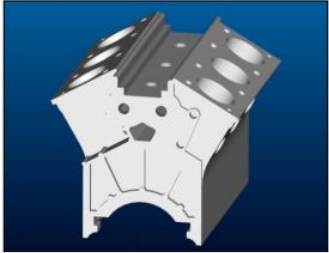
Techniques:

- *Domain decomposition* (new multidomain BEM, Liu & Huang, 2016)
- *Parallel computing* on CPU or GPU

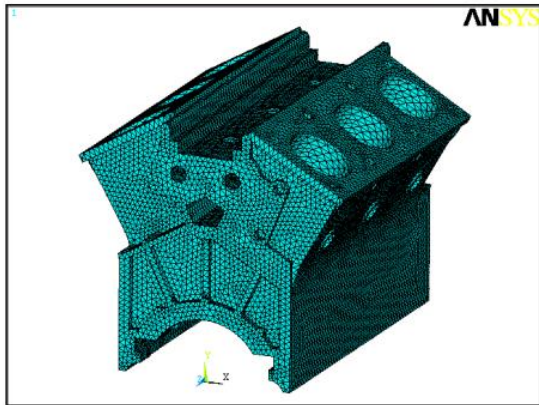
Reference: Y. J. Liu, S. Mukherjee, N. Nishimura, M. Schanz, W. Ye, A. Sutradhar, E. Pan, N. A. Dumont, A. Frangi and A. Saez, “Recent advances and emerging applications of the boundary element method,” *ASME Applied Mechanics Review*, **64**, No. 5 (May), 1–38 (2011).



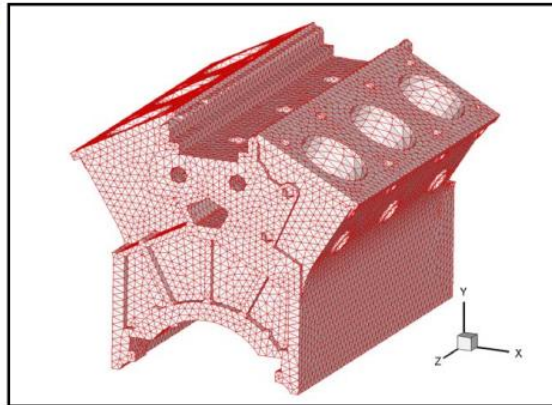
A Comparison of the FEM and BEM - An Engine Block Model



- Heat conduction of a V6 engine model is studied.
- ANSYS is used in the FEM study.
- Fast multipole BEM is used in the BEM study.
- A linear temperature distribution is applied on the six cylindrical surfaces



FEM (363,180 volume elements)

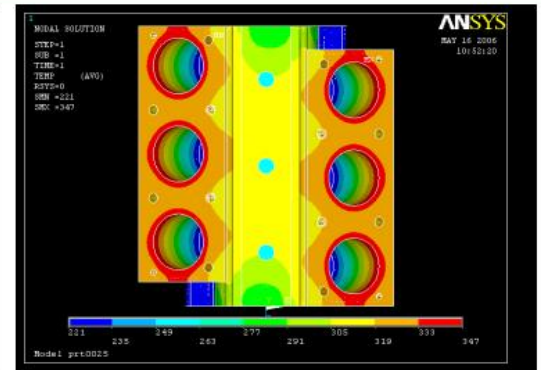
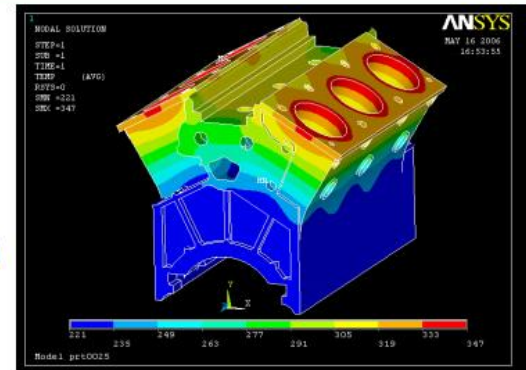


BEM (42,169 surface elements)

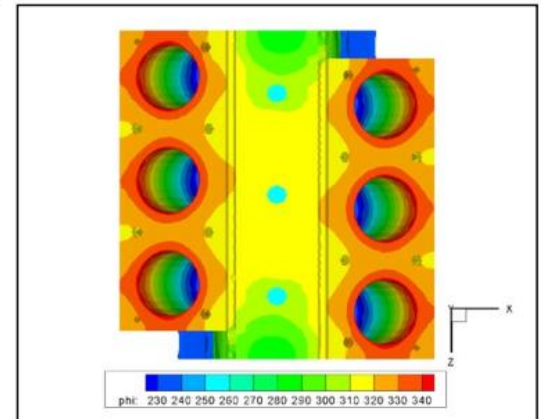
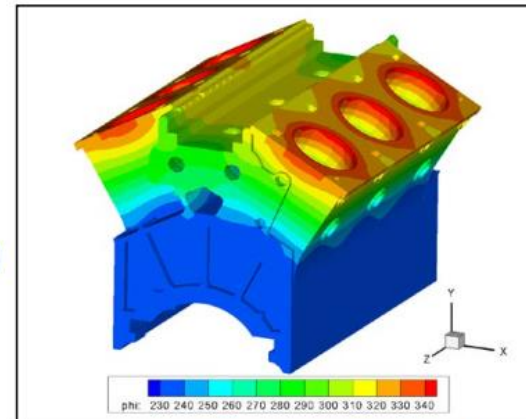
3

A Comparison of the FEM and BEM with An Engine Block Model (Cont.)

FEM
Results
(50 min.)



BEM
Results
(16 min.)



4

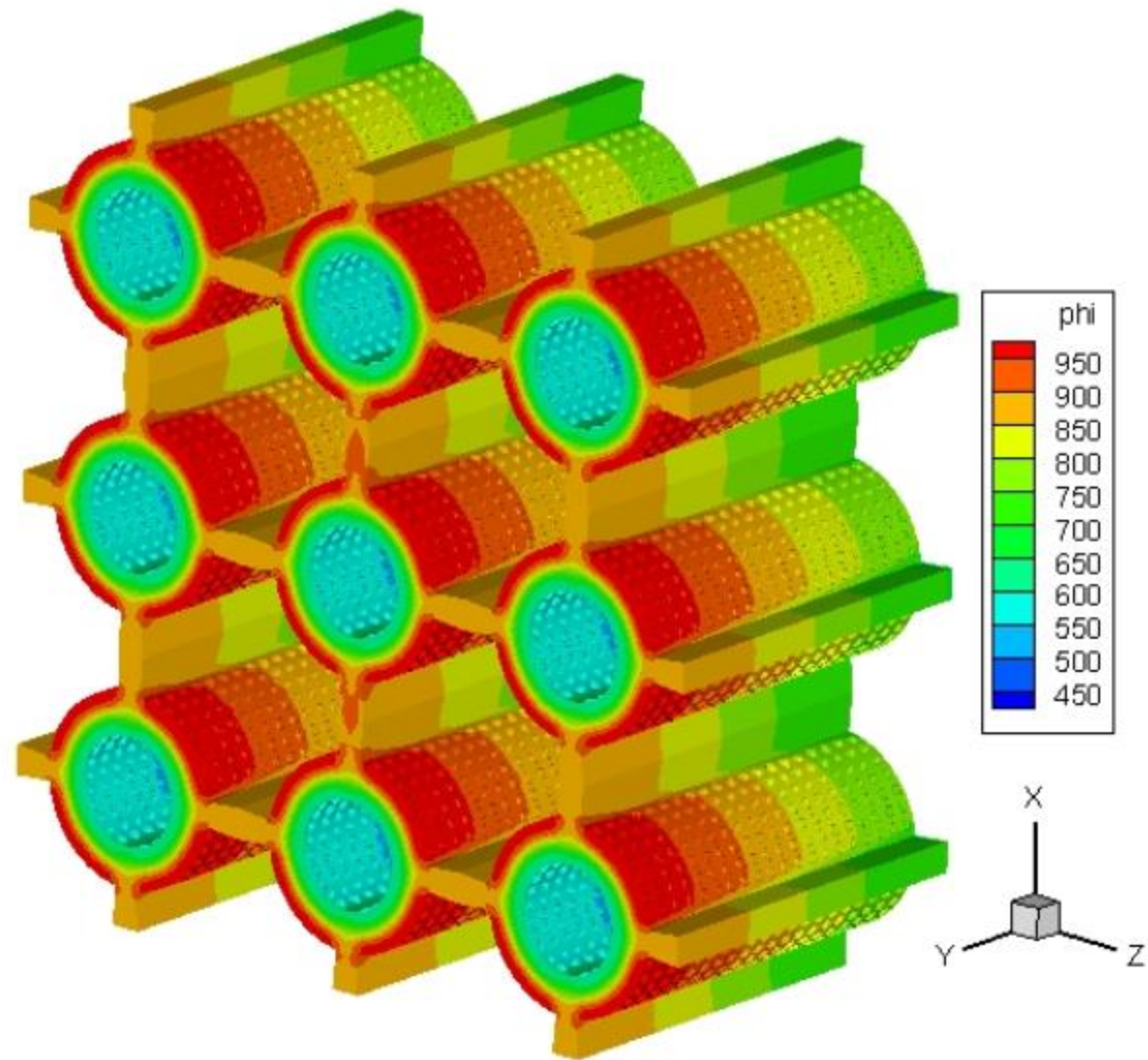
3-D Potential: Modeling of Fuel Cells

Thermal Analysis of Fuel Cell (SOFC) Stacks

There are 9,000 small side holes in this model

Total DOFs = 530,230,
solved on a desktop PC
with 1 GB RAM)

ANSYS can only model
one cell on the same PC



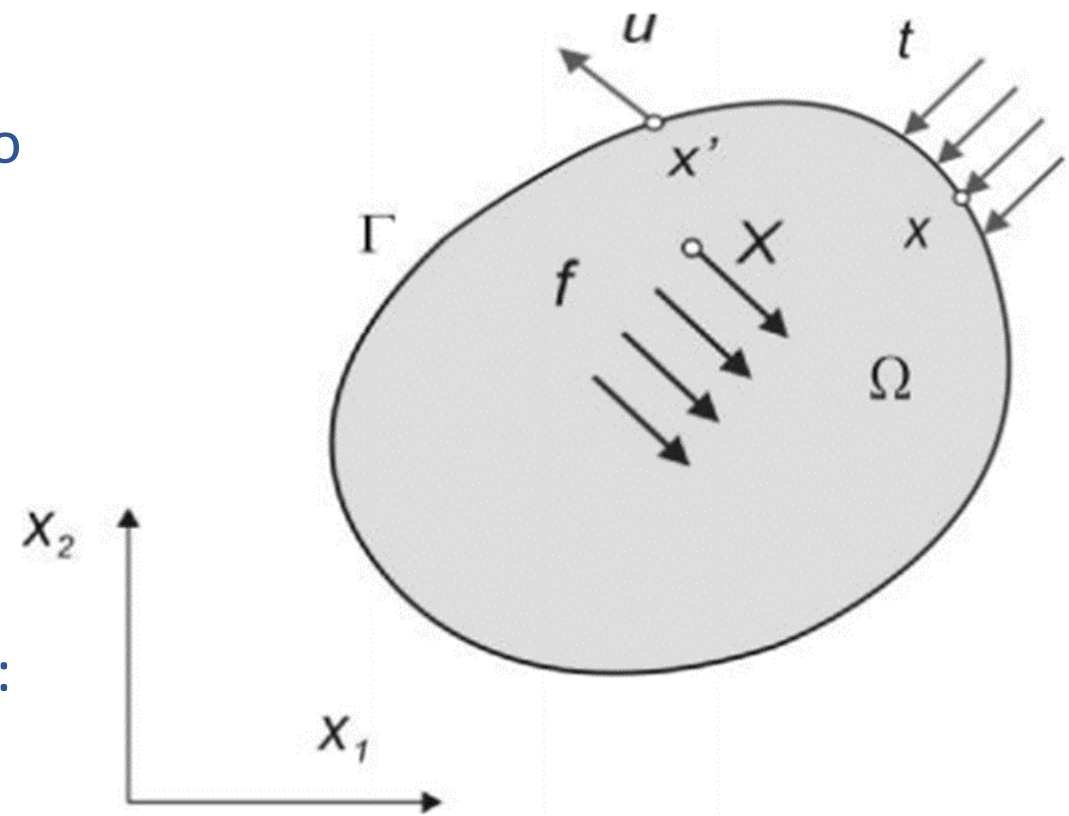
Sformułowanie MEB.

Rozważamy tarczę (2D, PSN) wykonaną z materiału jednorodnego, izotropowego i liniowosprężystego. Brzeg tarczy to Γ , a obszar zajmowany przez tarczę to Ω . Tarcza jest obciążona statycznie na brzegu zewnętrznym Γ siłami powierzchniowymi t_j , a obszar tarczy - siłami objętościowymi f_j .

Związek między obciążeniem tarczy, a jej przemieszczeniami u_j wg tzw metody bezpośredniej:

wzory Somigliany (następna strona)

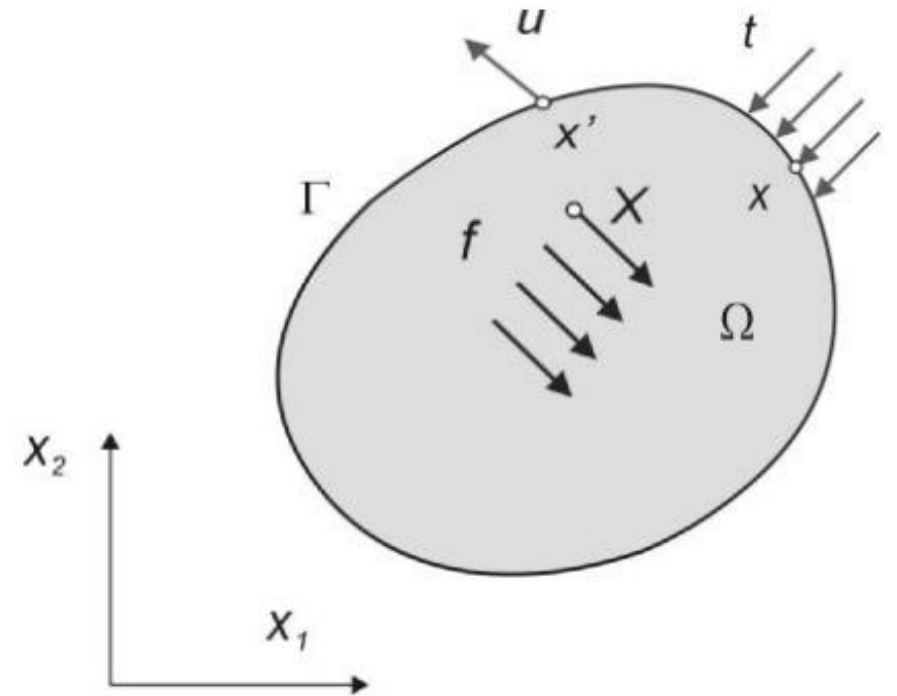
$$c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x',x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x',x)t_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}(x',X)f_j(X)d\Omega(X).$$

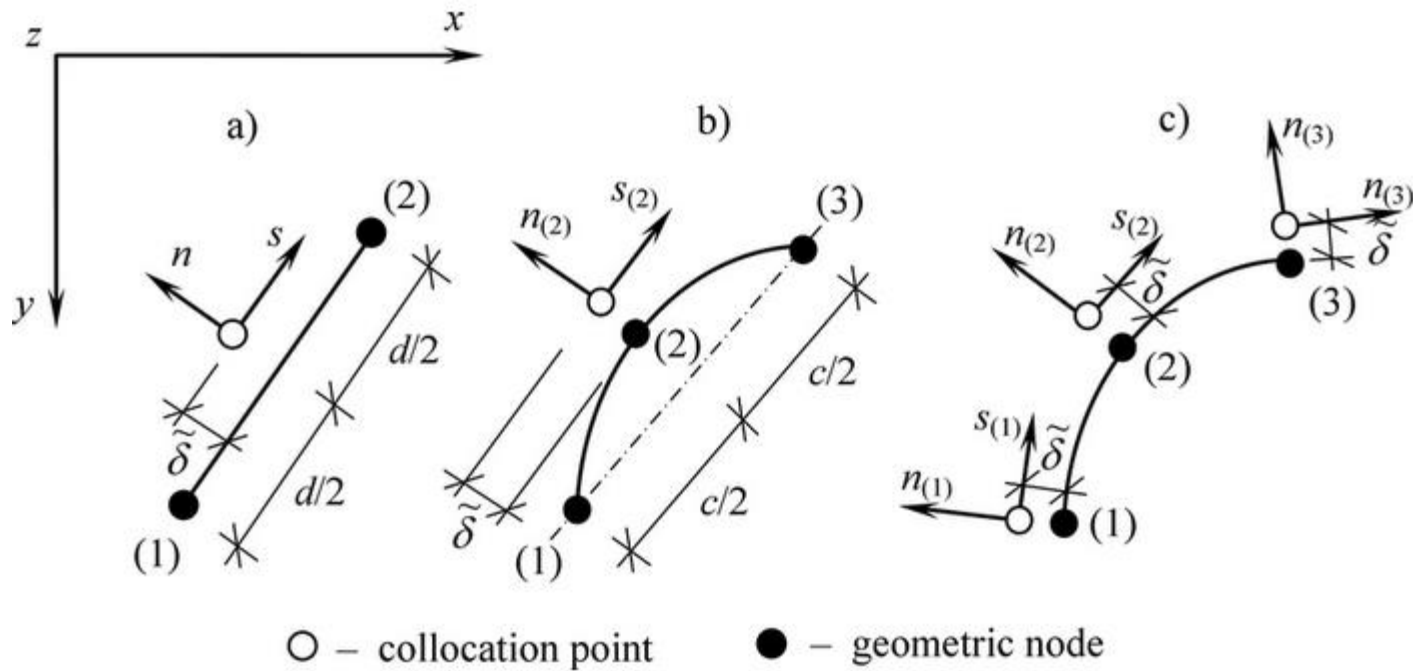
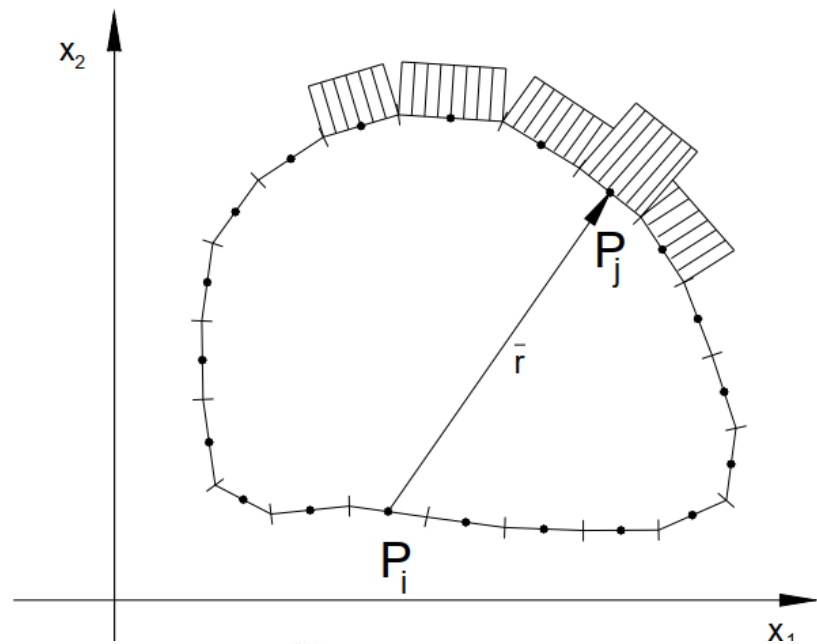


$$c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x',x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x',x)t_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}(x',X)f_j(X)d\Omega(X).$$

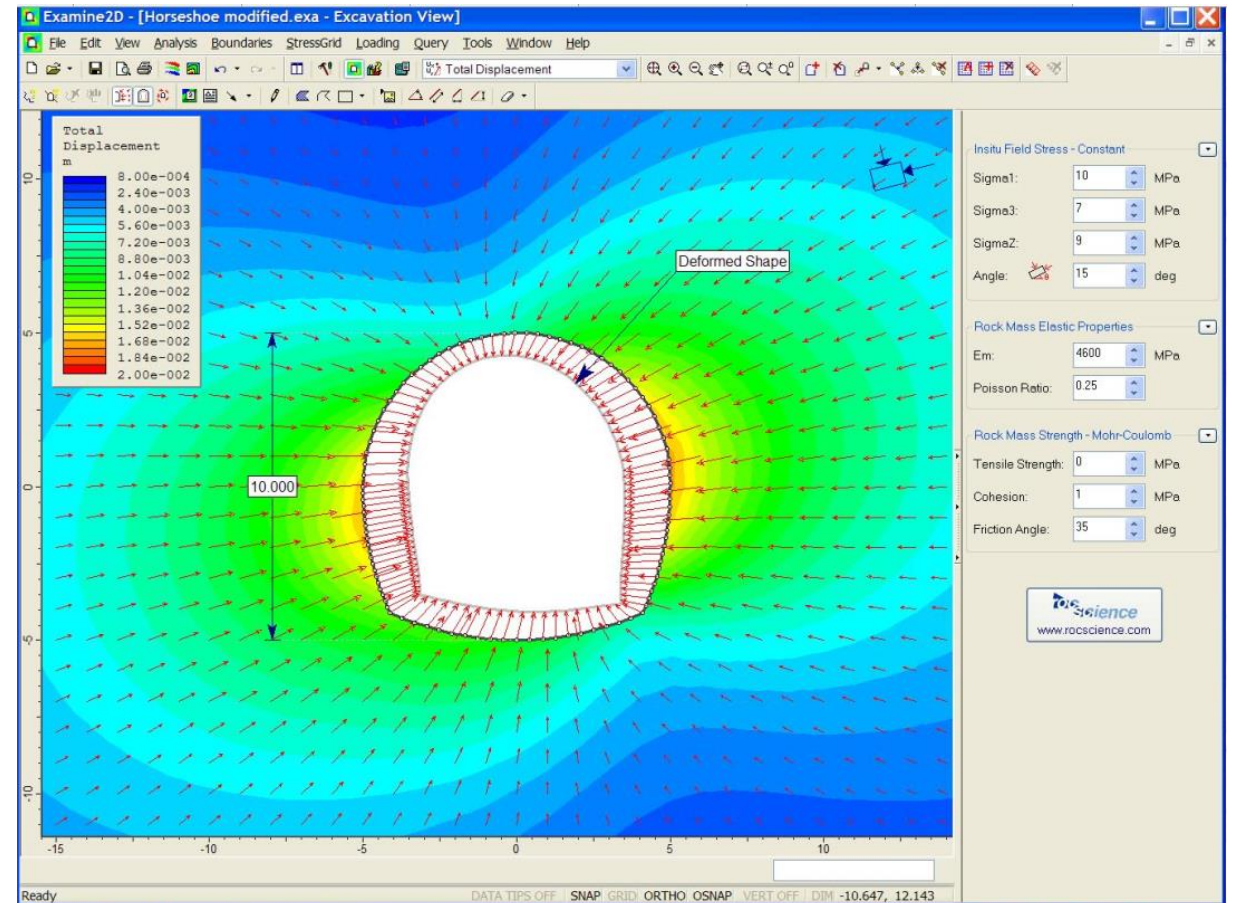
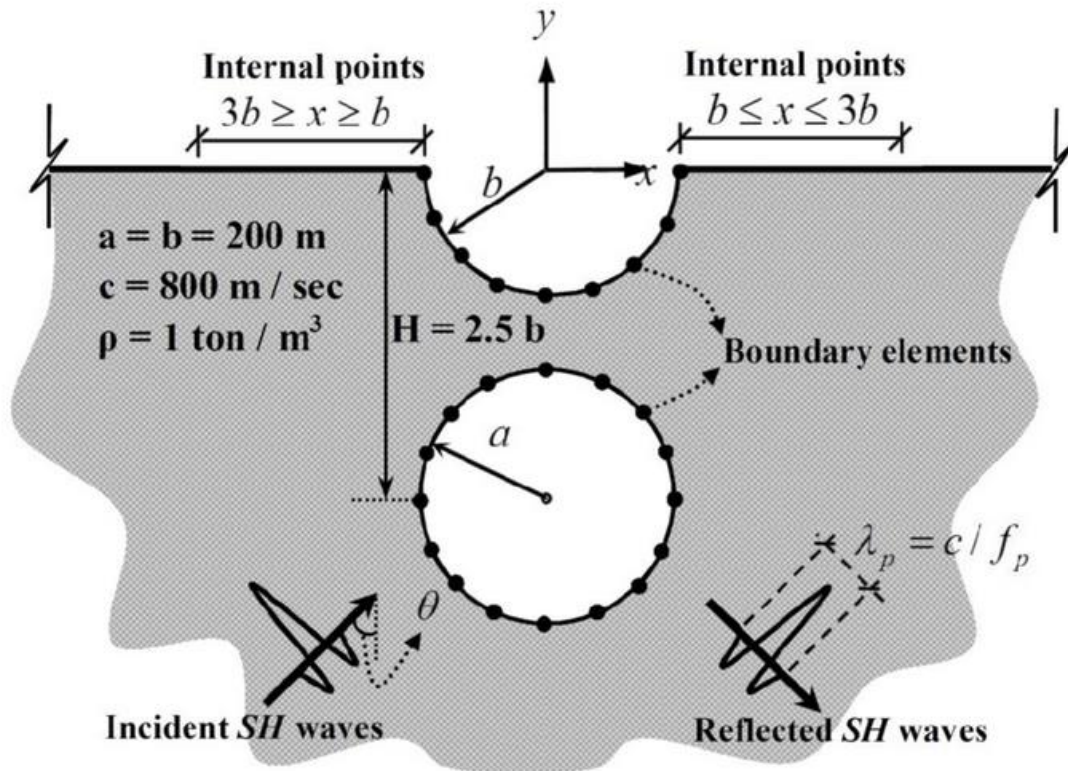
Oznaczenia:

x' jest punktem kolokacji, dla którego układane jest równanie całkowe (tzw. *punkt źródłowy*), x jest punktem brzegowym, a X punktem należącym do obszaru (wnętrza) ciała, c_{ij} jest stałą zależną od położenia punktu x' (równą 0; 1/2 lub 1), U_{ij} i T_{ij} to tzw. rozwiązania fundamentalne (Kelvina). W równaniach stosowana jest konwencja sumacyjna, a indeksy dla zagadnienia (2D) przyjmują wartości $i, j = 1, 2$.





Obszary półnieskończone w MEB



Algorytm obliczeń MEB

- Dyskretyzacja brzegu elementami (brzegowymi) o geometrii danej węzłami
- Przyjęcie funkcji kształtu modelujących przemieszczenia u_i oraz obciążenia p_i na elemencie – w zależności od parametrów (czyli od wartości funkcji w węzłach)
- Sformułowanie układu równań
$$[P]\{u\} = [U]\{p\}$$
- Przekształcenie układu równań do postaci
$$[K]\{x\} = \{F\}$$

i rozwiązanie układu (wyznaczenie przemieszczeń i reakcji)
- Obliczenie składowych tensora naprężeń na brzegu (ze znanych już przemieszczeń i obciążeń)

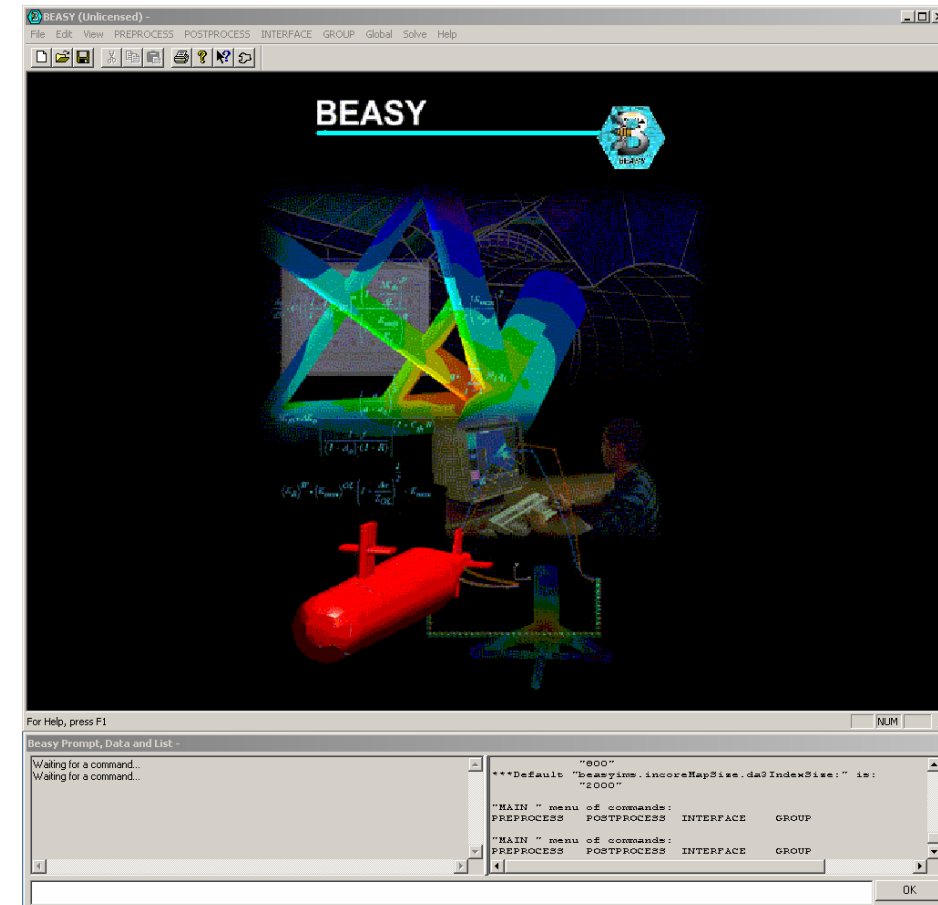
- i niestety, WEJŚCIE W SRODEK OBSZARU ...

- Drewniak J., Wprowadzenie do metody elementów brzegowych, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej Filii w Bielsku-Białej, 2000
- Burczyński T., Metoda elementów brzegowych w mechanice. Wspomaganie komputerowe CAD - CAM, WNT, Warszawa 1995
- Praskiewicz M., Analiza kontaktu statycznego kół walcowych o zębach prostych metodą elementów brzegowych, Rozprawa doktorska, Bielsko-Biała 2003

Opis systemu BEASY

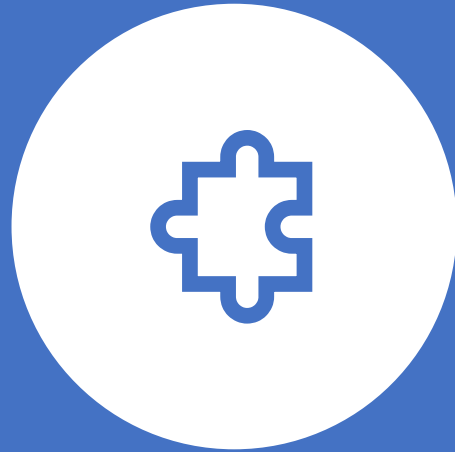
Program BEASY jest wszechstronnym systemem służącym do rozwiązywania zagadnień sprężystych, termicznych, zmęczenia i pęknięcia, a także korozji, drgań i innych za pomocą metody elementów brzegowych.

Po uruchomieniu programu otwierają się dwa okna: okno główne oraz okno dialogowe. Okno dialogowe służy do wprowadzania poleceń i ich parametrów oraz są w nim wyświetlane komunikaty systemu.



MEB

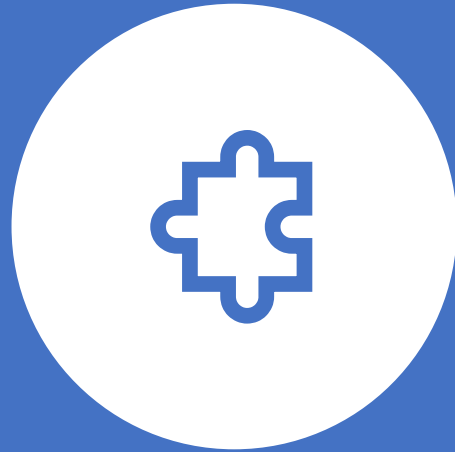
- generowane są macierze gęste i niesymetryczne, ale mniejsze
- MEB stosowana dla nieskończonych obszarów
- funkcje podcałkowe są osobliwe
- całkowanie numeryczne jest trudne
- stosowana do tych problemów liniowych, dla których potrafimy wskazać rozwiązanie fundamentalne



KONIEC

Metoda Elementów Brzegowych (MEB)

Boundary Element Method (BEM)



Metoda Elementów Skonczonych (MES)
Sformułowania energetyczne

Finite Element Method (FEM)

MES – ujęcie energetyczne

Sformułowania słabe - wariacyjne

- generowane są macierze gęste i niesymetryczne, ale mniejsze
- MEB stosowana dla nieskończonych obszarów
- funkcje podcałkowe są osobliwe
- całkowanie numeryczne jest trudne
- stosowana do tych problemów liniowych, dla których potrafimy wskazać rozwiązanie fundamentalne

VARIATIONAL METHODS IN ELASTICITY AND PLASTICITY

SECOND EDITION

KYUICHIRO WASHIZU

Professor of Aeronautics and Astronautics, University of Tokyo



PERGAMON PRESS

Oxford · New York · Toronto
Paris · Sydney · Braunschweig

$$cu_j(\xi) = \int_S [T_i(\mathbf{x})G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) - u_i T_{ikj}(\mathbf{x}, \xi)n_k] dS + \int_V F_i G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) dV$$

$$c = \begin{cases} 1, & \xi \text{ in } V \\ \frac{1}{2}, & \xi \text{ on } S \\ 0, & \xi \text{ outside } V \end{cases} \quad c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}(x', X)f_j(X)d\Omega(X)$$

$G_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ is the *displacement Green's function* that comes from the fundamental solution to the elasticity equations, and corresponds to the solution of the displacement field at point \mathbf{x} produced by a unit concentrated body force \mathbf{e} located at point ξ

$$u_i^G(\mathbf{x}) = G_{ij}(\mathbf{x}; \xi)e_j(\xi) \quad (3)$$

with $p_{ik} = T_{ijk}n_j$. Relation (1) gives the displacement of a given observational point ξ in terms of boundary and volume integrals. If point ξ is chosen to lie on boundary S then the expression will contain unknowns (displacements and tractions) only on the boundary. For this case (ξ on S), relation (2) indicates $c = 1/2$, but this is true only if the boundary has a continuous tangent (i.e., is smooth). Slight modifications are necessary for the case of non-smooth boundaries, see Brebbia and Dominguez (1992).

Units	Inputs				RMS Outputs	
	Young's Modulus	Mass Density	PSD Function	Acceleration Load	Deflection	Stress
SI (m,kg,sec)	6.89e10 Pa	2710 kg/m ³	1 g ² /Hz	9.807 m/s ²	1 m	1000 Pa
SI (mm,Mg,sec)	6.89e4 MPa	2.71e-9 Mg/mm ³	1 g ² /Hz	9807 mm/s ²	1000 mm	1.0e-3MPa
Imperial (in, snail, sec)	10.0 e6 psi	2.54e-4 snail/in ³	1 g ² /Hz	386.1 in/s ²	39.37 in	0.145 psi