

Metoda Elementów Skończonych II

MES – zadania dynamiki

Równanie dynamiki:

$$\begin{matrix} [M] & \{\ddot{q}\} & + & [C] & \{\dot{q}\} & + & [K] & \{q\} & = & \{F(t, \omega)\} \\ n \times n & n \times 1 & & n \times n & n \times 1 & & n \times n & n \times 1 & & n \times 1 \end{matrix}$$

Przypadki szczególne, różne typy analiz

Modal Response, Normal modes (*drgania własne*)

Frequency Response, Harmonic Response (*odpowiedź w dziedzinie częstotliwości*)

Transient Response, Time-history (*odpowiedź w dziedzinie czasu, analiza stanów nieustalonych*)

Random Response, Random Analysis (*odpowiedź na obciążenia losowe*)

Shock Analysis, Response spectrum (*odpowiedź na obciążenia udarowe*)

Metoda Elementów Skończonych II

MES – efekty dynamiczne, zmienne w czasie (Transient Response)

Matematycznie – sformułowanie „direct” lub „modal”

Przejdzie z RRZ na równania różnicowe – różne schematy całkowania

Metody niejawne (*Implicit time integration*) – bezwarunkowo stabilne (prawie wszystkie)

- Hilberta
- klasyka : β -Newmarka
- nowsza: HHT (Hilber, Hughes, Taylor)

Metody jawne (*Explicit time integration*) – warunkowo stabilne (kryterium CFL !!)

- central difference method
- LS-Dyna, Dytran, PAM-crash, Abaqus Explicit

Metoda Elementów Skończonych II

MES – (Transient Response) metody niejawne

Metody niejawne (*Implicit time integration*) - bezwarunkowo stabilne

- Hilberta, θ -Wilsona
- klasyka : β -Newmarka
- nowsza: HHT (Hilber, Hughes, Taylor)

Metoda β -Newmarka z parametrami

Newmark oryginalnie zaproponował $\gamma = 0.5$, $\beta = 1/4$, co daje schemat bezwarunkowo stabilny (średniego przyspieszenia, tzw. reguła trapezu – zob. następny slajd)

w chwili $t + \Delta t$:

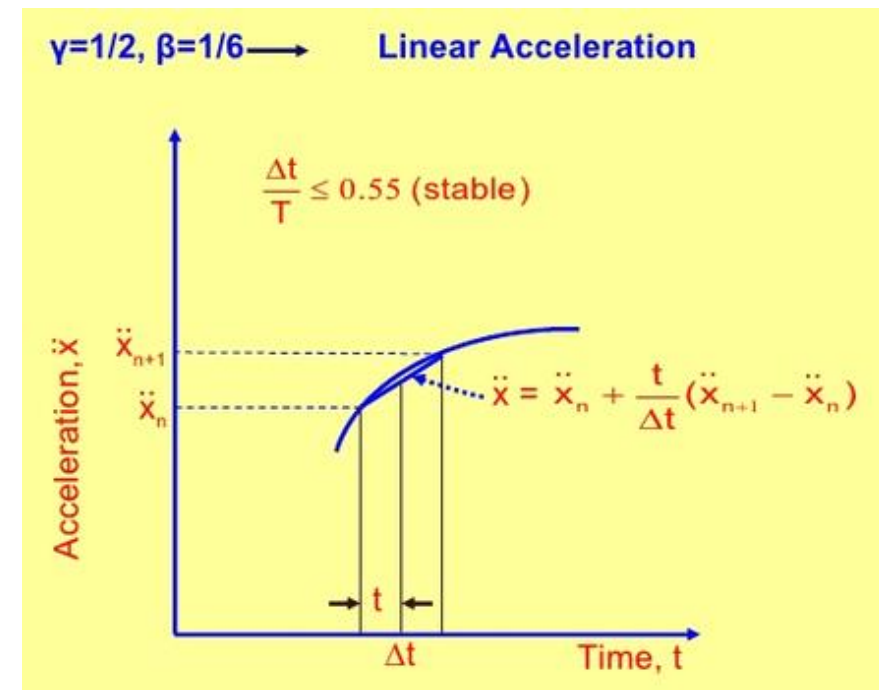
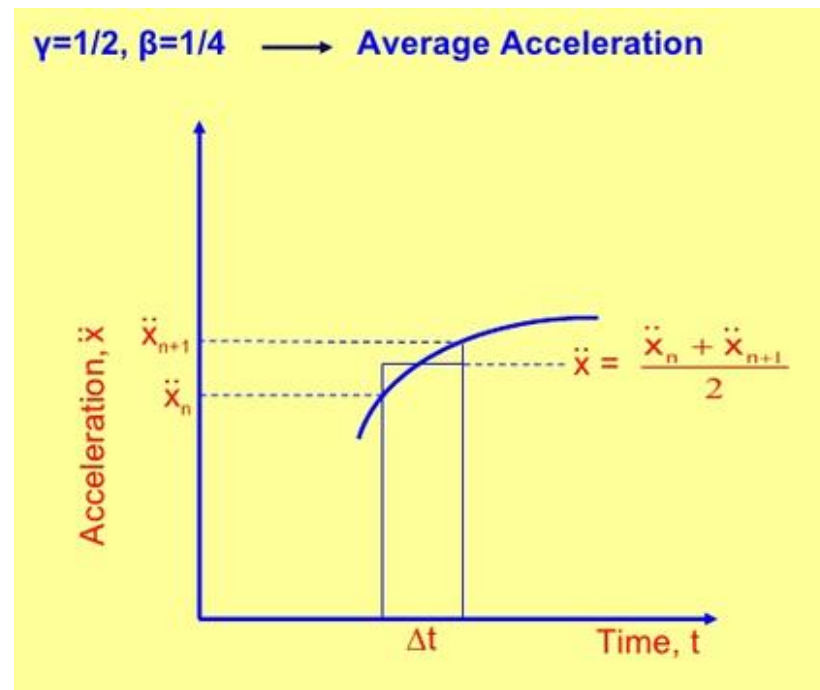
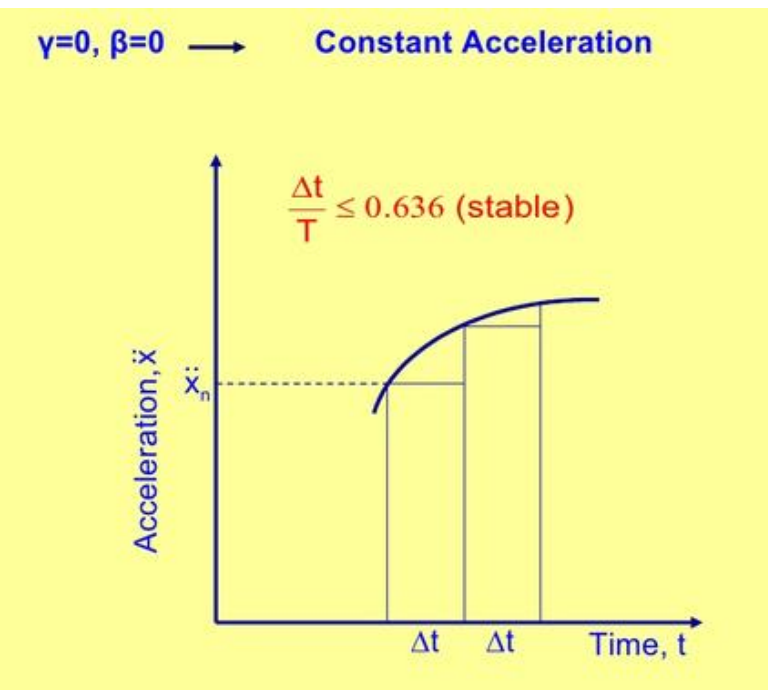
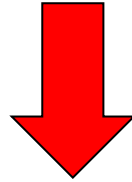
$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + [(1 - \gamma){}^t\ddot{U} + \gamma{}^{t+\Delta t}\ddot{U}]\Delta t$$

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + {}^t\dot{U}\Delta t + [(\frac{1}{2} - \beta){}^t\ddot{U} + \beta{}^{t+\Delta t}\ddot{U}]\Delta t^2$$

$$M {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + C {}^{t+\Delta t}\dot{U} + K {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}R$$

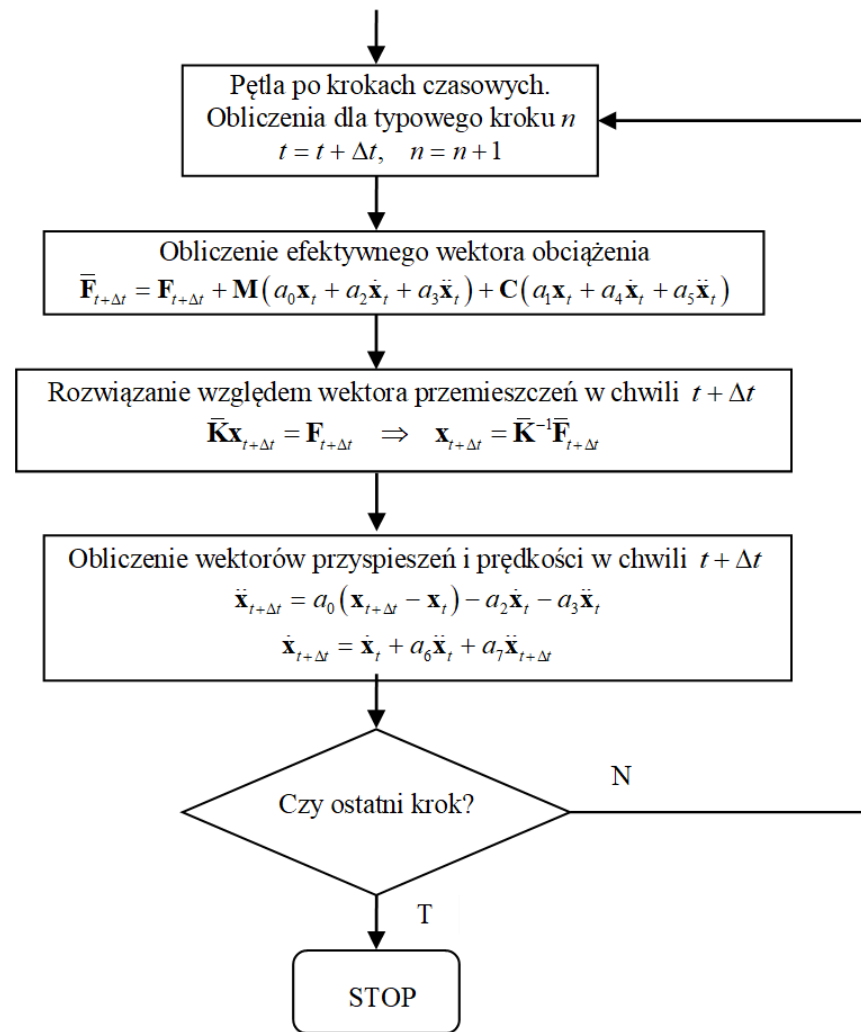
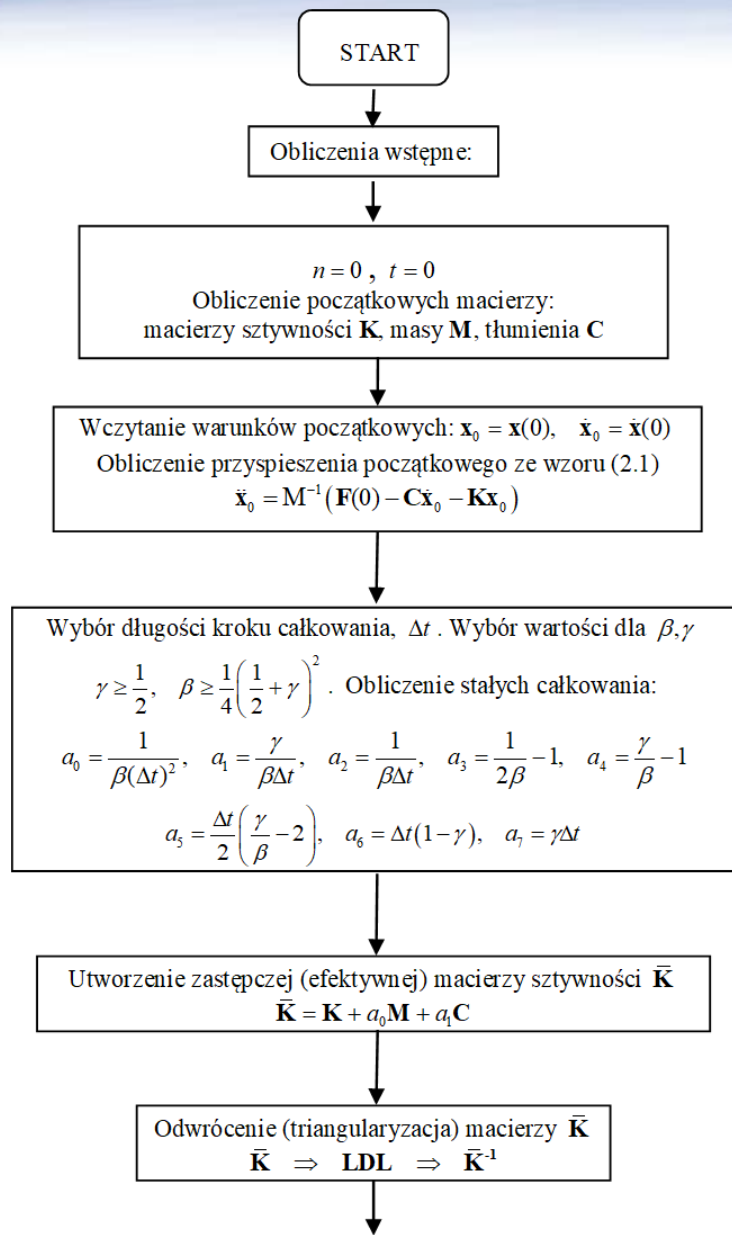
Metoda Elementów Skończonych II

MES – (Transient Response) metody niejawne



Czasem używane są inne oznaczenia parametrów Newmarka: zamiast $\gamma \rightarrow \delta$ oraz zamiast $\beta \rightarrow \alpha$

Metoda Elementów Skończonych II



METODY niejawną α -HHT

Metoda α -HHT (Hilber, Hughes, Taylor) jest uogólnieniem metody Newmarka. Przedstawia rodzaj liniowej kombinacji stanów dla czasu t oraz $t+\Delta t$. W równaniu zapisanym dla chwili $t+\Delta t$ współczynniki „wagowe” α (dla sił, przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń) określają udział zmiennych z chwili t i z chwili $t+\Delta t$. W przypadku, gdy parametr α jest zerowy, metoda sprowadza się do metody β -Newmarka.

Metoda dla pewnych α jest bezwarunkowo stabilna, ma dokładność drugiego rzędu. Wprowadza korzystne, niewielkie tłumienie numeryczne. Powoli staje się jedną z podstawowych metod w komercyjnych programach MES.

Metoda Elementów Skończonych II

MES – (Transient Response)) metody jawne

Metody jawne (*Explicit time integration*) – warunkowo stabilne (kryterium CFL !!)

- central difference method
- LS-Dyna, Dytran, PAM-crash, Abaqus Explicit

W chwili t :

$${}^t\ddot{U} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t-\Delta t}U - 2{}^tU + {}^{t+\Delta t}U)$$

$${}^t\dot{U} = \frac{1}{2\Delta t} (-{}^{t-\Delta t}U + {}^{t+\Delta t}U)$$

$$M{}^t\ddot{U} + C{}^t\dot{U} + K{}^tU = {}^tR$$

Co po podstawieniu pozwala wyznaczyć **następną** chwilę w zależności TYLKO od **poprzednich**

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C\right) {}^{t+\Delta t}U = {}^tR - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2} M\right) {}^tU - \left(\frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C\right) {}^{t-\Delta t}U$$

Metoda Elementów Skończonych II

Metoda jawnego całkowania

W literaturze stosowane są dwie odmienne definicje określenia „**metoda jawnego całkowania**”. W niniejszej pracy przyjęto za Kleiberem [113] i Belytschko [15], że jawność oznacza możliwość bezpośredniego obliczenia wektora przemieszczeń w chwili $t+\Delta t$ na podstawie znajomości przemieszczeń w chwili t oraz poprzednich. Może to w niektórych przypadkach oznaczać konieczność faktoryzacji efektywnej macierzy sztywności.

Niektórzy autorzy, np. Hughes [104], p. 493, stwierdzają natomiast wyraźnie, że metoda różnic centralnych jest jawna jedynie w przypadku, gdy macierze masowa i tłumienia mają formę diagonalną.

Kryterium stabilności CFL

Dla utrzymania stabilności obliczeń krok całkowania po czasie musi być mniejszy od pewnego krytycznego kroku czasowego Δt^L , zależnego od właściwości całego układu. Warunek ten nosi nazwę kryterium Couranta (lub Couranta – Friedrichsa - Lewy'ego, CFL):

$$\Delta t_{\sigma}^L = \frac{T_{\min}}{\pi} = \frac{2}{\omega_{\max}}$$

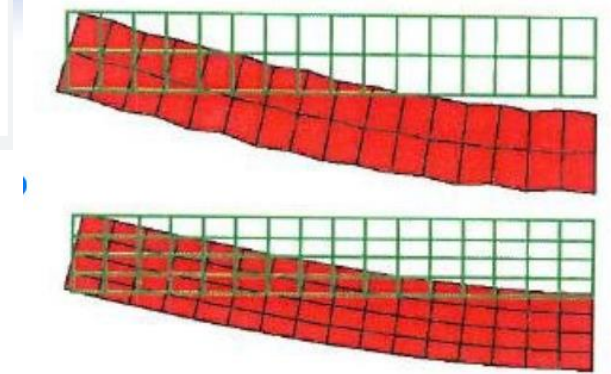
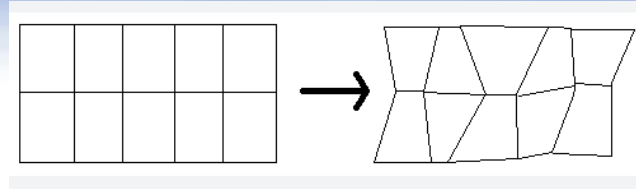
gdzie okres T_{\min} i częstość ω_{\max} dotyczą najwyższej wartości własnej układu, a górny indeks L w oznaczeniu kroku czasowego informuje, że wielkość kroku wynika z rozmiarów siatki Lagrange'a.

W przypadku występowania w zadaniu elementów typu Eulerowskiego zostaje uwzględniony także graniczny krok czasowy dla elementów domeny Eulera:

$$\Delta t_{\sigma}^E = \frac{\Delta x}{c}$$

gdzie Δx oznacza charakterystyczny wymiar elementu siatki Eulera, natomiast c jest lokalną prędkością dźwięku w elemencie (w ośrodku płynowym).

Specyfika modeli MES w Explicit



Kombinacja szczególnych rozwiązań w zadaniu dynamicznym:

1. Warunkowa stabilność metody Explicit (CFL) – zatem stosujemy **BARDZO** mały krok całkowania po czasie
2. Ogromna liczba kroków wymusza zastosowanie do **KRÓTKICH** zjawisk (milisekundy)
3. Przyspieszenie obliczeń zmusza do stosowania **BARDZO** uproszczonych elementów
4. Proste elementy wymuszają bardzo drobną siatkę podziału (co z kolei ułatwia lokalne efekty nieliniowe)
5. Proste elementy wymuszają **ZREDUKOWANE** całkowanie (mało dokładne)
6. Takie całkowanie daje model podatny na "hourglassing" (tzw. klepsydrowanie, zob. rysunki) – zatem trzeba stosować kilka warstw elementów
7. Krótkotrwałe zjawiska upoważniają do zaniedbania tłumienia
8. Z drugiej strony – sformułowanie Explicit „rozprzęga” układ równań – jest zatem „zestaw równań” a nie „układ równań” – **NIE MA** odwracania macierzy

ZASTOSOWANIA: zderzenia, wybuchy, pociski przebijające osłony balistyczne, obliczenia siedzeń i manekinów (także „skrzynka piwa”)

METODY REDUKCJI BAZY

Rozważając rozwiązanie równania dynamiki należy zwrócić uwagę na fakt, iż zwłaszcza w przypadku zadań stanów nieustalonych rozwiązanie będzie musiało być wykonane setki czy tysiące razy. Oczywiście, przy zachowaniu pewnych warunków (typu stała długość kroku czasowego) – można pewne powtarzalne elementy algorytmu zoptymalizować, zmniejszając koszty numeryczne. Tym niemniej przede wszystkim **sam rozmiar zadania** (liczony w stopniach swobody) **jest podstawowym czynnikiem** decydującym o pracochłonności rozwiązania. Zatem należy rozważyć metody matematyczne zmniejszając rozmiary zadania dynamicznego, przy zachowaniu siatki podziału. Są to tzw. metody redukcji, które omówiono krótko poniżej.

Metoda redukcji statycznej (tzw. **kondensacja statyczna, Guyana**) polega na wewnętrznym podziale wektorów i macierzy równania dynamiki na części zachowane do dalszej analizy (indeks „**a**”) oraz części, które zostają skompresowane (indeks „**o**”). Części podlegające „kompresji” (czyli redukcji albo kondensacji) stanowią zwykle większą część oryginału – do analizy pozostawia się niewielką (kilkuprocentową) część zmiennych. W przypadku analizy statycznej taka kondensacja jest operacją bezstratną – wyniki są dokładne. W przypadku analizy dynamicznej – prowadzi do uproszczeń, których skutki należy zminimalizować.

Kondensacja statyczna - Guyana

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{aa} & M_{ao} \\ M_{oa} & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_a \\ \ddot{u}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{aa} & B_{ao} \\ B_{oa} & B_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_a \\ \dot{u}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_{aa} & K_{ao} \\ K_{oa} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_a \\ F_o \end{Bmatrix}$$

gdzie dla przypadku statycznego część wykondensowana jest równa:

$$\{u_o\} = -[K_{oo}^{-1}]([K_{oa}]\{u_a\} + \{F_o\})$$

natomiast niewielkie równanie pozostające do analizy przyjmuje postać:

$$[K_{aa}]\{u_a\} = \{F_a\}.$$

Przy zapisie: $[G_o] = -[K_{oo}^{-1}][K_{oa}]$, $\{u_o^o\} = [K_{oo}^{-1}]\{F_o\}$

oraz $[K_{aa}] = [\bar{K}_{aa}] + [K_{ao}][G_o]$, $\{F_a\} = \{\bar{F}_a\} + [G_o^T]\{F_o\}$

mamy finalne rozwiązanie w postaci:

$$\{u_a\} = [G_o]\{u_a\} + \{u_o^o\}$$

Metoda redukcji dynamicznej (GDR)

(uogólniona metoda Guyana, GDR) wprowadza pewne przybliżenia dla tych części zadania, które zostały pominięte przy metodzie redukcji statycznej. Pozwala to na poprawę dokładności metody. W GDR, podobnie jak w metodzie Guyana, zachowana zostaje dokładna sztywność struktury. W zadaniach z istotnymi wielkościami przyspieszeń, błędy będą proporcjonalne do wykondensowanych mas.

Metoda ta jest dwukrokowa.

Pierwszy krok jest zwykłą kondensacją statyczną (metoda Guyana).

Drugi krok używa macierzy transformacji z operacji poprzedniej (stycznej) do oceny efektów masowych (bezwładnościowych) usuniętych stopni swobody. Kluczowym aspektem tego kroku jest określenie członów korekcyjnych w formie analogicznej do sposobu użytego w redukcji Guyana

Component Mode Synthesis (CMS)

metoda Craiga-Bamptona (C-B) – to metoda redukcji zadania dynamicznego, korzystna zwłaszcza przy łączeniu podstruktur (superelementów). Podobnie jak w zadaniu redukcji statycznej, wektor przemieszczeń jest dzielony na dwie części: niewielką część która ma być zachowana, oznaczoną u_R – są to np. podpory lub węzły, do których będą dołączone inne podstruktury, oraz na pozostałą, „wewnętrzna” część odkształcalną, która chwilowo ma być zredukowana („wykondensowana”) – część u_L .

$$\{u_a\} = \begin{Bmatrix} u_R \\ u_L \end{Bmatrix}$$

Craig-Bampton (CMS)

$$\begin{bmatrix} M_{RR} & M_{RL} \\ M_{LR} & M_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_R \\ \ddot{u}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{RR} & C_{RL} \\ C_{LR} & C_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_R \\ \dot{u}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RL} \\ K_{LR} & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_R \\ u_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_R \\ F_L \end{Bmatrix}$$

Transformacja redukcji Craig-Bampton ma dwa kroki:

po pierwsze zbiór stopni swobody u_L , jest zapisywany we współrzędnych uogólnionych (modalnych), Q_L . Oznacza to, że podlegający redukcji model jest transformowany z zapisu w niewiadomych czysto fizycznych - do zapisu o „hybrydowej” postaci wektora niewiadomych, który teraz składa się częściowo ze zmiennych fizycznych, u_L , a częściowo ze współrzędnych modalnych Q_L .

Craig-Bampton (CMS)

Drugi krok redukcji C-B polega na obcięciu modalnym całego zestawu zmiennych q_m do znacznie mniejszego zestawu zmiennych Q_L . Jest to rozwiązanie bardzo praktyczne, gdyż zwykle wyższe postacie modalne mają nikły wpływ na odpowiedź struktury. Przyjmuje się w praktyce inżynierskiej, że składowe modalne utrzymane w rozwiązaniu (po obcięciu) powinny mieścić się przynajmniej do częstości 1,5-2 razy wyższych, niż przewidywana częstość odpowiedzi struktury, albo 1,5-2 razy większych niż częstość wymuszenia.

$$\begin{Bmatrix} u_R \\ \vdots \\ u_L \end{Bmatrix} = [B\Phi] \begin{Bmatrix} u_R \\ \vdots \\ q_m \end{Bmatrix}, \quad m \ll L$$

gdzie oznaczono:

$$[B] = \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ \phi_R \end{bmatrix}, \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \phi_L \end{bmatrix}$$

Zatem nowy wektor niewiadomych ma postać

$$\begin{Bmatrix} u_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_R \\ \vdots \\ u_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \phi_R & \phi_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_R \\ \vdots \\ q_m \end{Bmatrix} \quad [u_L] = [\phi_R] \{u_R\} + [\phi_L] \{q_m\}$$

Metoda Elementów Skończonych II

MES – efekty dynamiczne, zmienne w czasie (Transient Response)

Matematycznie – sformułowanie „direct” lub „modal”

Przejście z RRZ na równania różnicowe – różne schematy całkowania

Metody niejawne (*Implicit time integration*) – bezwarunkowo stabilne (prawie wszystkie)

- Hilberta
- klasyka : β -Newmarka
- nowsza: HHT (Hilber, Hughes, Taylor)

Metody jawne (*Explicit time integration*) – warunkowo stabilne (kryterium CFL !!)

- central difference method
- LS-Dyna, Dytran, PAM-crash, Abaqus Explicit

Nieliniowości

Strukturalne i materiałowe

Metody rozwiązywania równań NL

MES – rozwiązywanie zadań (układy równań)

Układ równań **liniowych**

Metody bezpośrednie

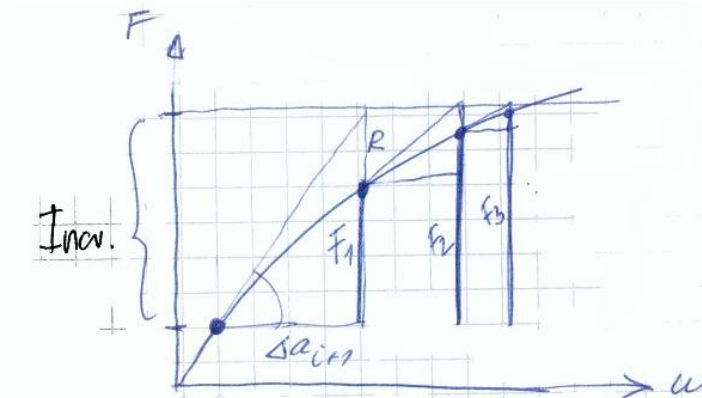
met. Gaussa (eliminacji)
metoda Frontalna
metoda Skyline
metoda SPARSE

Metody iteracyjne

metody gradientów sprzężonych (CG)
z uwarunkowaniem wstępnym (*pre-conditioners*)

Układ równań **nieliniowych**

metoda NR, mNR, arc length
met. QuasiNewton, BFGS



KROK – PRZYROST – ITERACJA

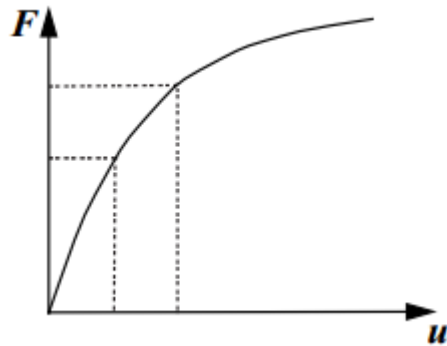
(Step – Increment – Iteration)

Nieliniowości

- ❖ **Kinematyczne** - duże ugięcia (w porównaniu do..) ...
duże obroty – nie ma addytywności !!
- ❖ **materiałowe** – plastyczność, hiperelastyczność, pełzanie
- ❖ **warunków brzegowych** – kontakt (numeryka, mało fizyki)

Nieliniowości geometryczne

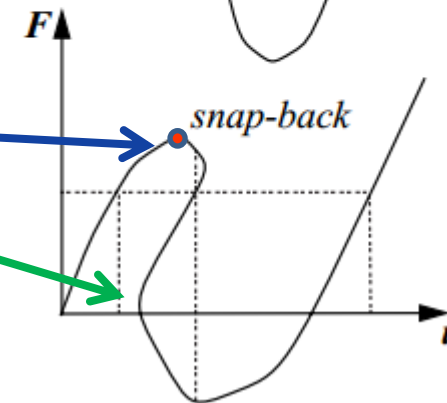
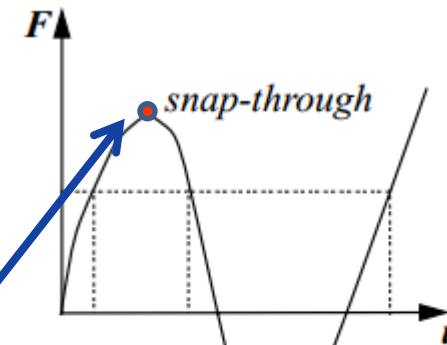
Nieliniowość – charakterystyka miękająca



Silne nielineowości ścieżki równowagi

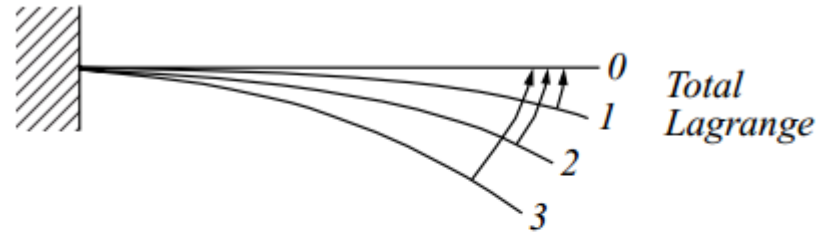
punkty krytyczne

punkty zwrotne

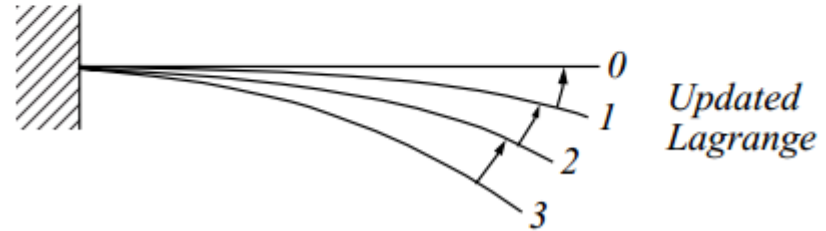


Nieliniowości geometryczne

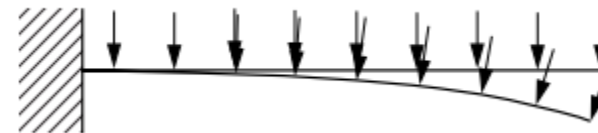
TL – Total Lagrange
(stacjonarny opis Lagrange'a)



UL – Updated Lagrange
(uaktualniony opis Lagrange'a)



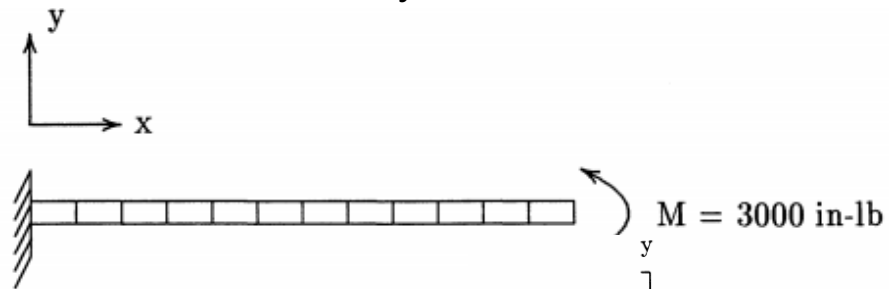
Siły śledzące – (np. ciśnienie)



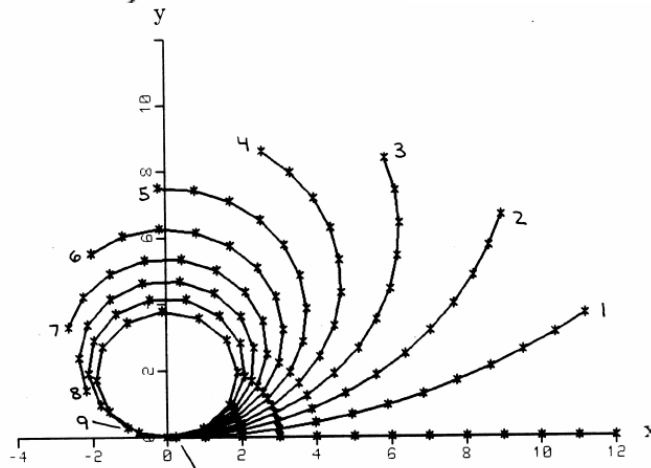
Nieliniowości geometryczne

Nieliniowości geometryczne w MES – test NAFEMS NL5
Elementy belkowe

materiał sprężysty,
duże przemieszczenia
duże obroty



MSC/NASTRAN Nonlinear Analysis



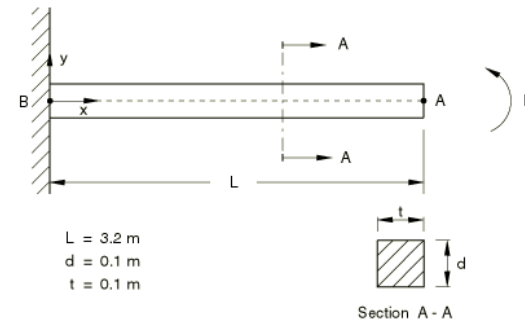
4.6.5 NL5: Straight cantilever with end moment

Product: Abaqus/Standard

Element tested

B22

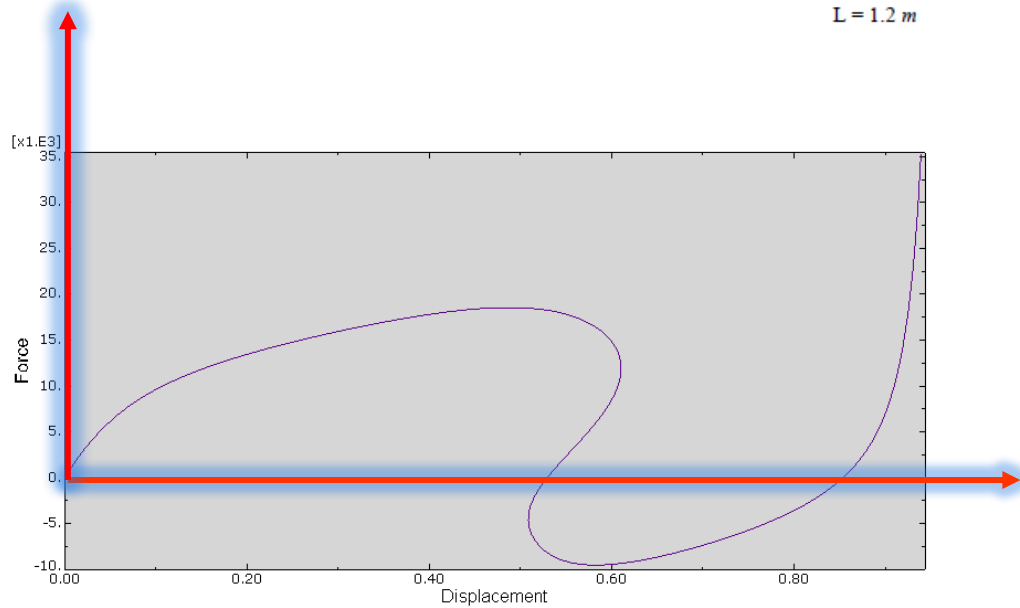
Problem description



inc	moment (in-lb)	θ_{end}
1	300	36.7°
2	600	73.3°
3	900	110.0°
4	1200	146.7°
5	1500	183.3°
6	1800	220.0°
7	2100	256.6°
8	2400	293.3°
9	2700	330.0°
10	3000	366.6°

Nieliniowości geometryczne

Nieliniowości geometryczne w MES –
przykład NAFEMS „Rama Lee”



Abaqus/CAE (ver. 6.11) Nonlinear Buckling Tutorial

Problem Description

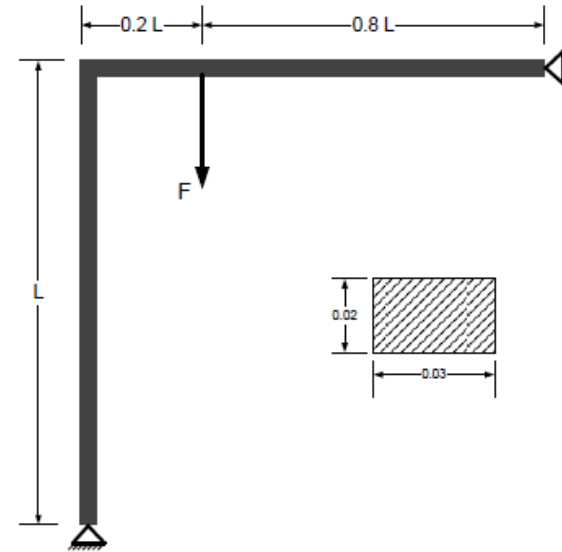
This is the NAFEMS' proposed benchmark (Lee's frame buckling) problem. The applied load is based on the normalized (EI/L^2) value of $F = 996.389 N$. The analysis will investigate post-buckling nonlinear behavior of the frame at the applied load location.

This tutorial will also describe x-y plotting capability in Abaqus/CAE, including combining variables to generate load-displacement plots.

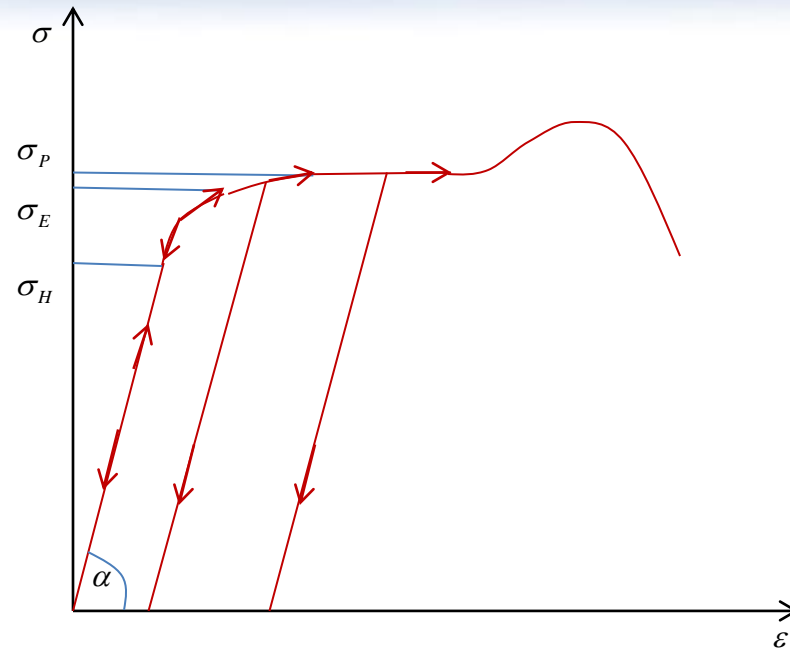
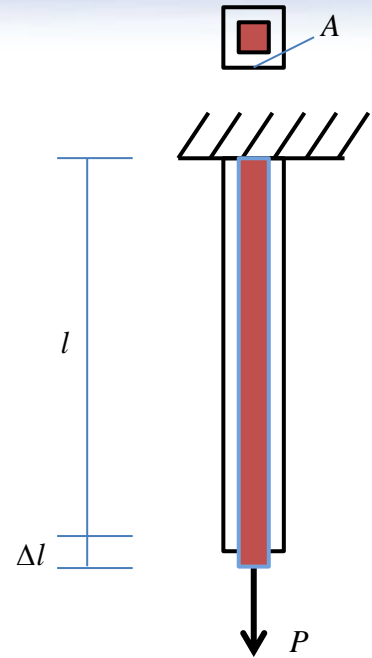
$$E = 71.74 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.0$$

$$L = 1.2 \text{ m}$$



Plastyczność - Model jednowymiarowy (1-D)



Naprężenie: $\sigma = \frac{P}{A} [\text{MPa}]$

$$1\text{Pa} = \frac{1\text{N}}{1\text{m}^2}$$

$$1\text{MPa} = 10^6 \text{Pa}$$

Odształcenie (względne): $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ [niemianowane]

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Prawo Hooke'a

E – Moduł Younga

$$E = \text{tg}\alpha$$

Stal: E = 2.1e5 MPa

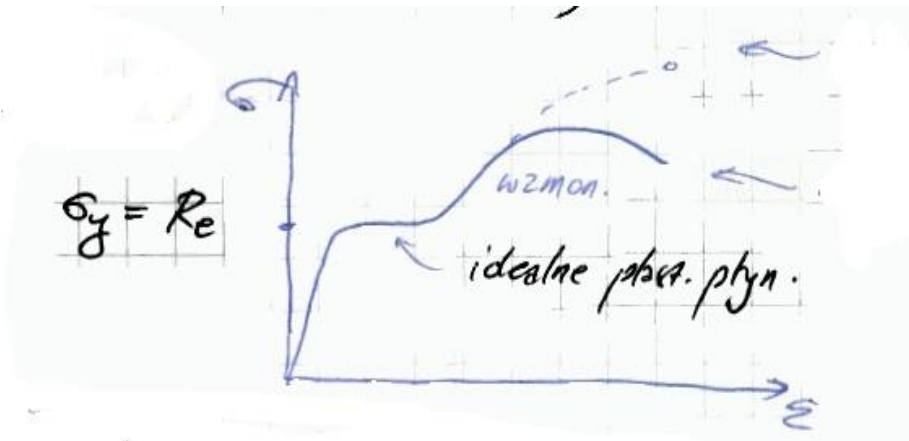
Efekty niesprężyste

PLASTYCZNOŚĆ

Zachowania **niesprężyste** → pełzanie, lepko sprężystość „plastyczność”

Plastyczność ≡ trwałe (nieodwracalne) odkształcenia (nie deformacje)

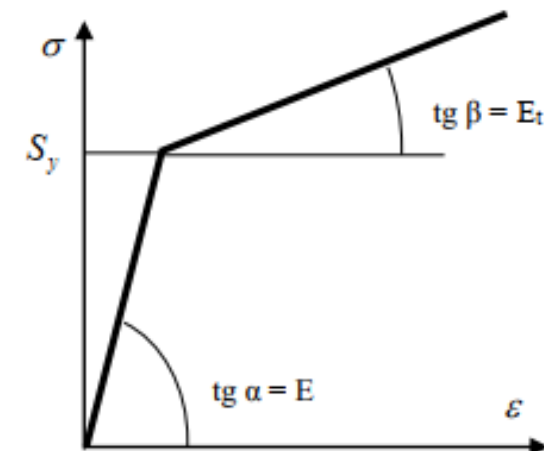
→ **ADDYTYWNOŚĆ** - podział odkształceń na część sprężystą i plastyczną
(generalnie – dekompozycja addytywna lub multiplikatywna)



Plastyczność

Zachowanie materiału charakteryzowane naturalnymi zjawiskami (procesami)

- ❖ warunek plastyczności (*yield function*) → kryteria uplastycznienia (Mises, Treska)
- ❖ prawo płynięcia (*flow rule*) → prawo opisujące rozwój odkształceń plastycznych po osiągnięciu kryterium uplastycznienia
- ❖ zasady umocnienia \equiv wzmocnienia → (*hardening rule*)
- ❖ zasady przy odwracaniu obciążenia → (*load reversal*)



Plastyczność

Warunek plastyczności

tensor naprężenia może uwzględniać anizotropię materiału (także uplastycznionego)

$$F(\sigma) = 0$$

Warunek plastyczności nie może zależeć od wyboru układu współrzędnych, zatem będzie funkcją skalarną argumentu tensorowego, a zatem w ogólności funkcją niezmienników:

$$F(I_1, I_2, I_3) = 0$$

a zauważając brak wpływu stanu hydrostatycznego na uplastycznienie

$I_1 \Rightarrow$ zerowy, odrzucamy go, zatem:

$$F(I_2, I_3) = 0$$

Plastyczność

Warunek plastyczności – interpretacja geometryczna w przestrzeni naprężeń:

$$F(\sigma_{ij}) \begin{cases} < 0 & \text{dla mat. sprężystego} \\ = 0 & \text{dla mat. uplastycznionego} \end{cases}$$



Huber (1904), Mises (1913), Hencky (1924)
ogólnie - HMH

Plastyczność

Kryterium przejścia materiału w stan plastyczny zależy wyłącznie od II niezmiennika

$$F(I_2^{Dev}) = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} - \bar{\sigma}_0 = 0$$

energia właściwa odkształcenia postaciowego, $\phi = \frac{1}{4G} s_{ij} s_{ij}$

$$I_2^{Dev} - \bar{\tau}_0^2 = 0$$

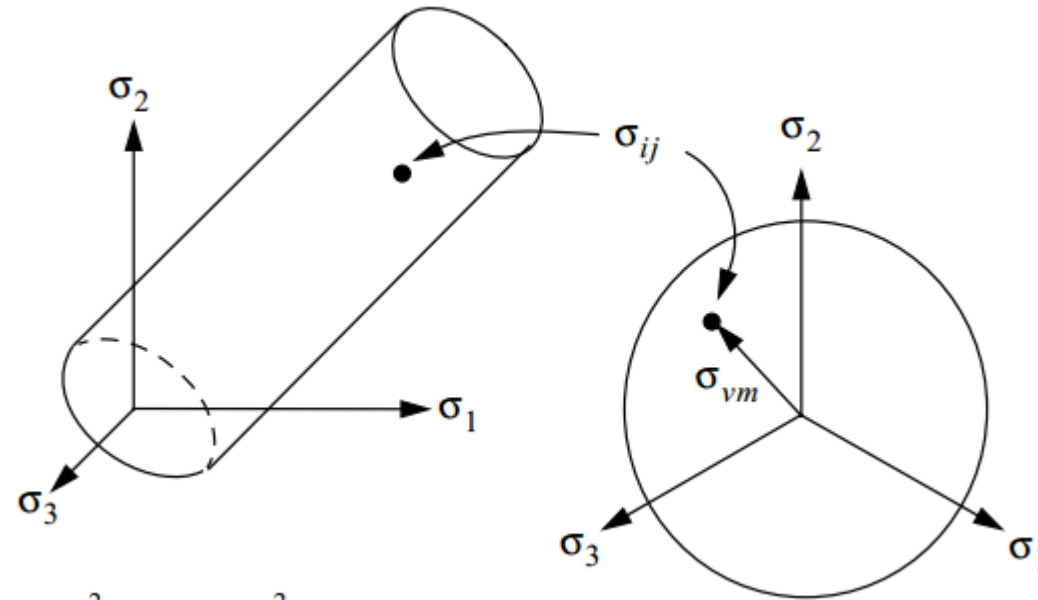
$\bar{\tau}_0^2$ – stała materiałowa (taka jak R_e)

Jak można wykazać, $\bar{\tau}_0 = \underline{\text{granicy plastyczności przy ścinaniu}}$

Warunek plastyczności Hubera (HMH)

Dla jednoosiowego rozciągania mamy: $\bar{\sigma}_0 = \sqrt{3}\bar{\tau}_0 = R_e = \sigma_{yield}$

W przestrzeni składowych
głównych tensora naprężenia:

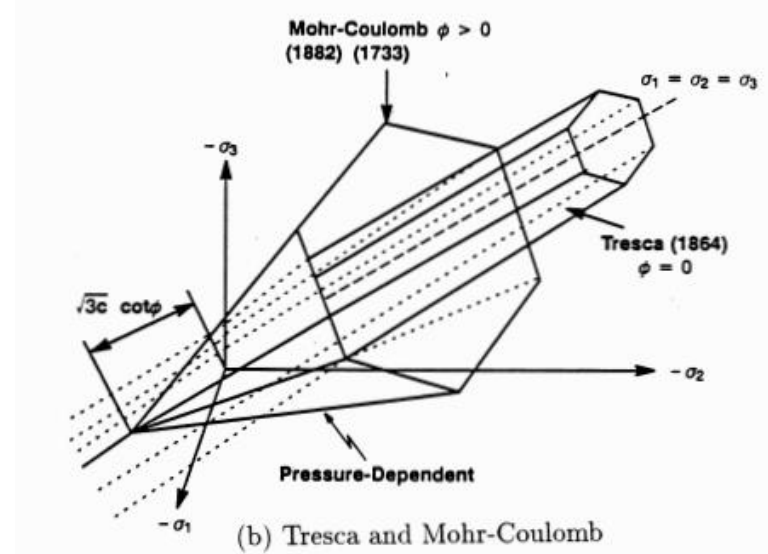
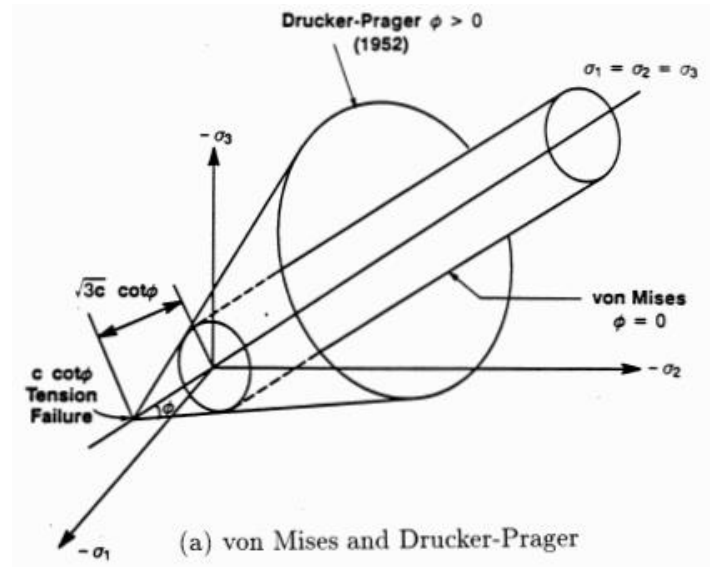


$$2\{F(\sigma_{ij})\}^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2$$

Plastyczność

Warunek plastyczności Treski (1868) – Guesta (1900)

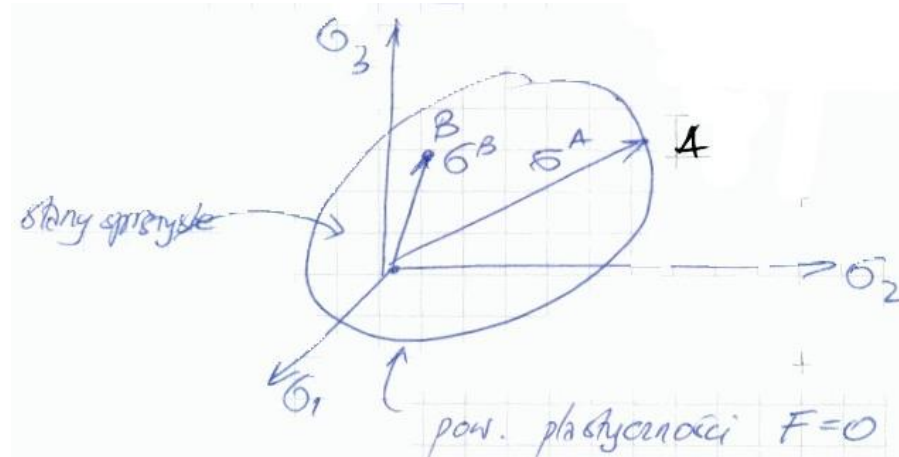
W przestrzeni składowych
głównych tensora naprężenia:



Plastyczność

Prawo płynięcia

Kryterium przejścia materiału w stan plastyczny jest osiągnięcie maksymalnego naprężenia stycznego stanu – (pewna wielkość materiałowa):

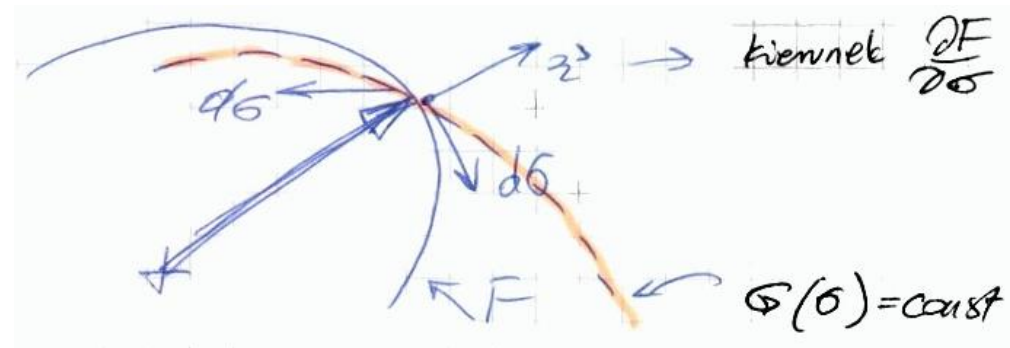


Obciążenie proste (monotoniczne) → proporcjonalnie

Plastyczność

Prawo płynięcia

Co się dzieje przy obciążaniu, jeśli osiągnąmy powierzchnię plastyczności?



$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot d\sigma < 0 \quad \text{odciążenie (kąt powyżej 90deg)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot d\sigma = 0 \quad \text{obciążenie}$$

Dla materiału idealnie plastycznego **nie ma wyjścia „na zewnątrz”**.

Stowarzyszone prawo płynięcia

Teoria płynięcia bazuje na założeniu istnienia potencjału plastycznego G , dla którego

$$d\varepsilon_p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad \leftarrow \text{prawo płynięcia}$$

G - jest to też pewna powierzchnia w przestrzeni naprężeń, a powyższy związek oznacza, że przyrosty odkształceń plastycznych są ortogonalne do powierzchni potencjału plastycznego G (są proporcjonalne do normalnej).

Bardzo często **utożsamia się** potencjał plastyczny G z warunkiem plastyczności F , otrzymując **stowarzyszone prawo płynięcia**

$$d\varepsilon_p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

Plastyczność

Wzmocnienie

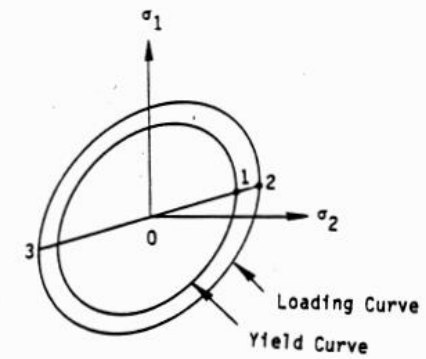
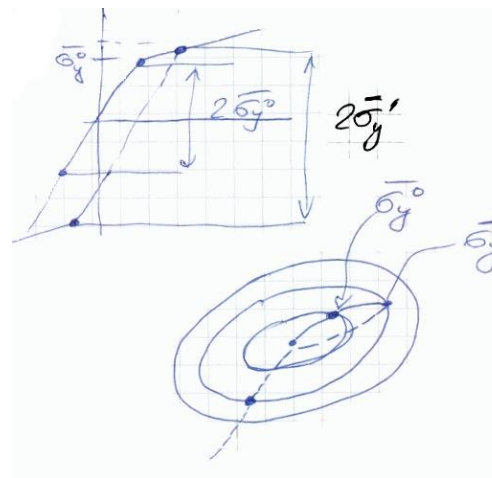
→

zasady przy przekraczaniu R_e

Izotropowe (Hill,1950)

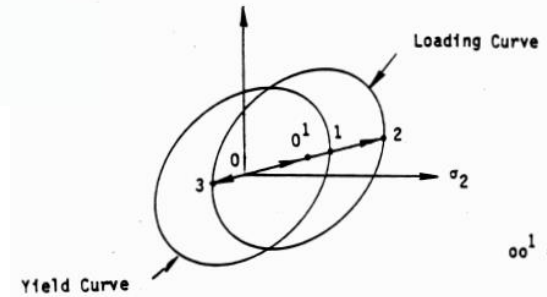
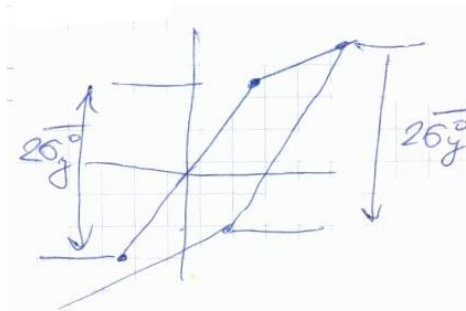
$$F = F(\sigma_{ij}, k)$$

$$I_2 - \bar{\tau}_s^2(k) = 0$$



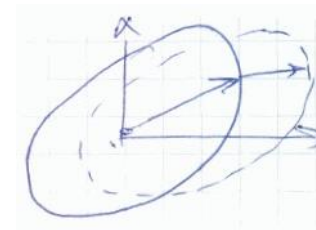
Kinematyczne (Prager,1955)

$$F = F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0$$



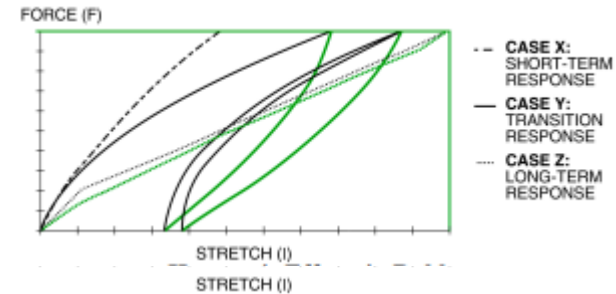
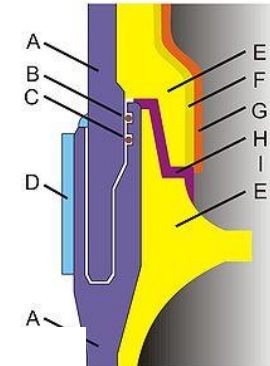
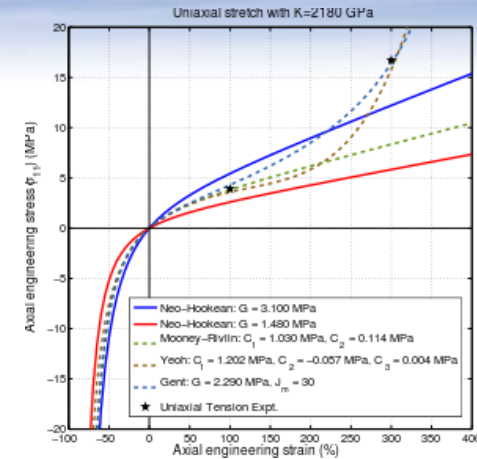
$$\sigma_0^1 = \alpha_{ij}$$

Efekt Bauschingera - istotny!!



Hiperelastyczność - elastomery

- Silnie nieliniowe, niesymetryczne charakterystyki
- Ściśliwość / nieściśliwość (elastomery pełne i piankowe)
- Zależność od temperatury (istotna!!) – STS-51, styczeń `86
- Zależność od czasu – relaksacja naprężeń, pełzanie, utrata szczelności
- Uszkodzenia i zniszczenie
- Sformułowania elementów
- Złożone stany (wieloosiowe) oraz kontakt („self”, „multi”) + tarcie



Elastomery

- Zależność od temperatury (istotna!!)
– STS-51L (Challenger), styczeń `86

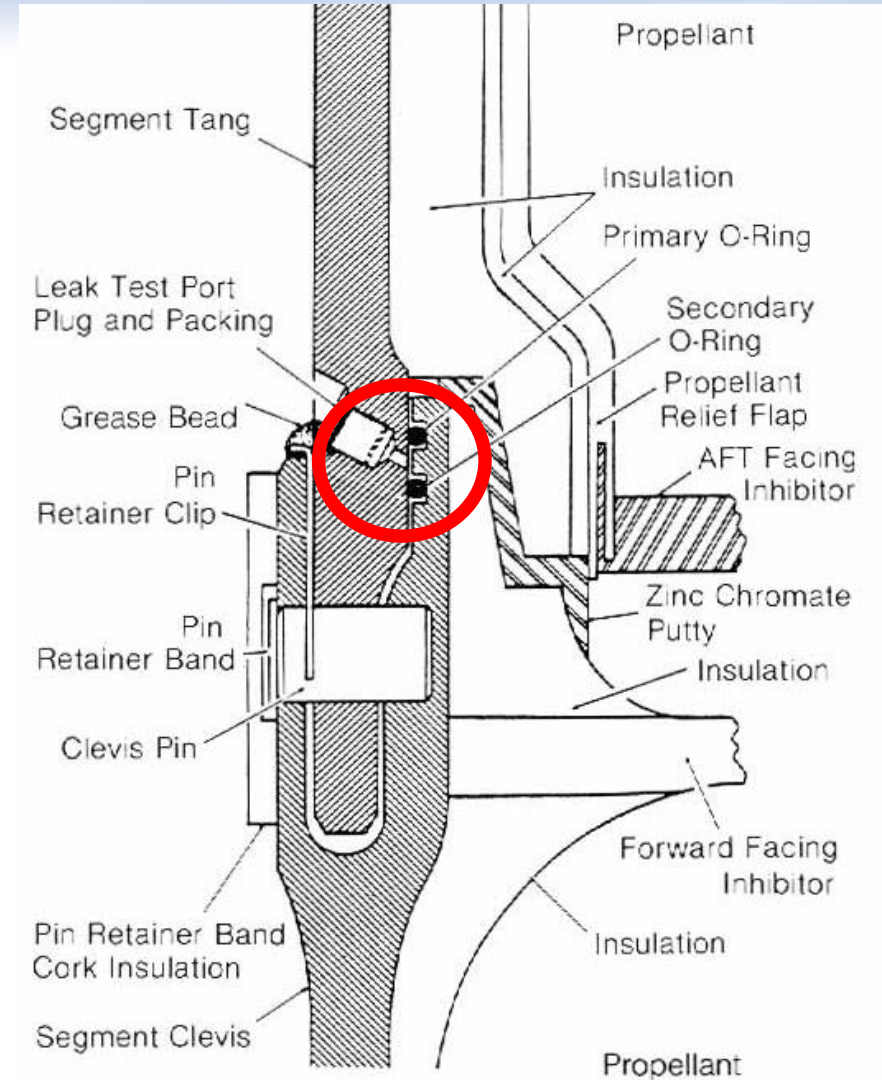


Figure 14
Solid Rocket Motor cross section shows positions of tang, clevis and O-rings. Putty lines the joint on the side toward the propellant.

Hiperelastyczność

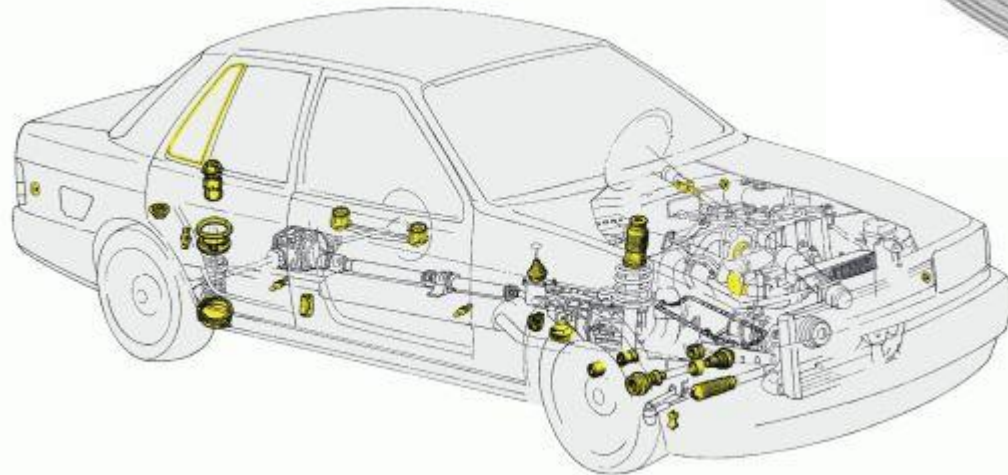
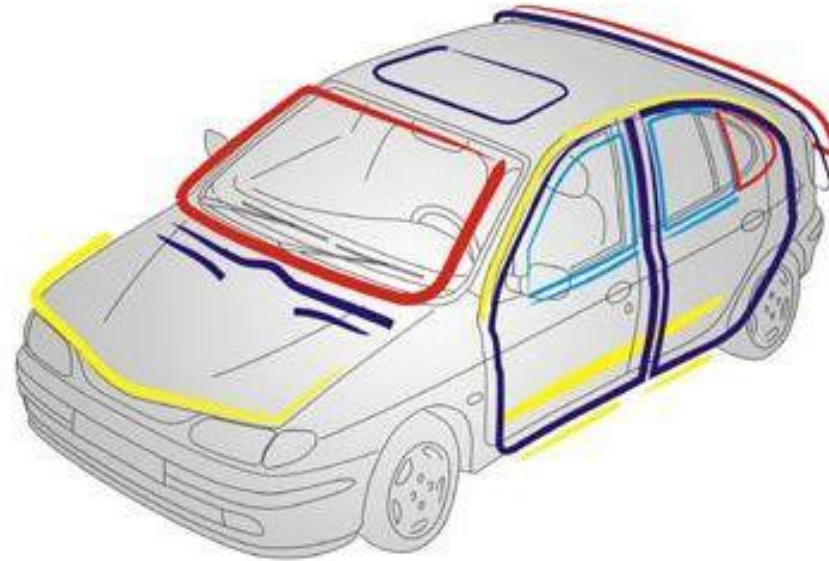


Hiperelastyczność

Gracz poziomu europejskiego (światowego?)

STOMIL / Sanok

symulacje – MSC.MARC



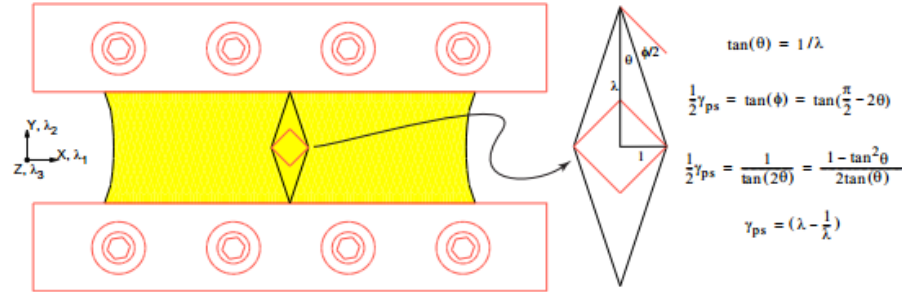
Pomiary - płaskie rozciąganie – proste ścinanie

a. odkształcenie

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda = L/L_0, \lambda_3 = t/t_0$$

b. naprężenie

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma, \sigma_3 = 0$$



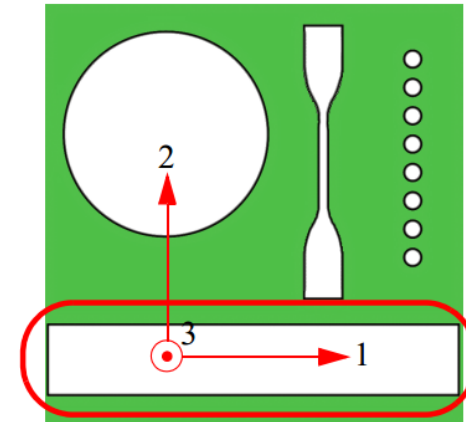
If $\lambda_1 = 1$, then $\lambda_2 = \lambda$ and $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda}$

Define a planar shear strain γ_{ps} :

$$\gamma_{ps} = 2 \tan(\phi) = \lambda - \frac{1}{\lambda}$$

Strain energy function:

$$W = \frac{1}{2} G \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right) = \frac{1}{2} G \gamma_{ps}^2$$



Pomiary – „curve fitting”

Hyperelastic Material Definition

Test Edit Graph

Test1

Type Uniaxial

Strain	Stress
0	0
0.568	1.828
1.184	2.519
2.475	3.598
3.789	4.679
4.929	5.922
6.449	9.046

Stress [MPa]

Strain

Test1 : Uniaxial

$G_0 = 2(C_{10} + C_{01}) = 3.11234 \text{ MPa}$
 $K_0 = 2/D_1 = 3112.34 \text{ MPa} \ (\nu = 0.4995!)$
 $\rightarrow E_0 = 2G_0(1 + \nu) = 9.3339077 \text{ MPa}$

Show Best Fit Material Model Curves

Model	RMS Error
<input checked="" type="checkbox"/> Arruda-Boyce	N/A
<input checked="" type="checkbox"/> Mooney-Rivlin	0.0650917
<input checked="" type="checkbox"/> Neo-Hookean	0.141049
<input checked="" type="checkbox"/> Polynomial Order 2	0.00333316
<input checked="" type="checkbox"/> Reduced Poly. Order 2	0.134512
<input checked="" type="checkbox"/> Yeoh	0.0619299

Select Material Model

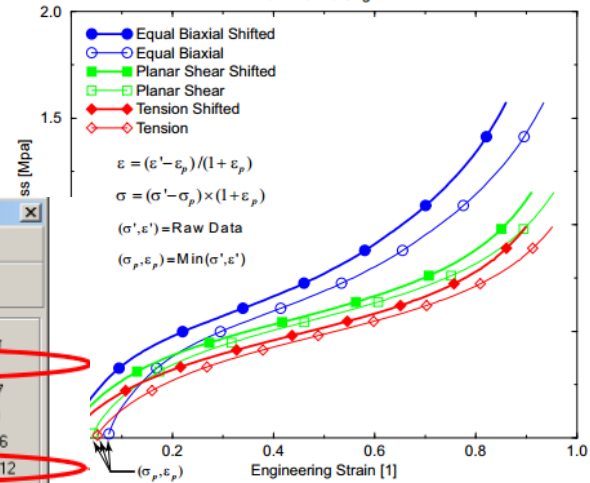
Automatic

Polynomial Order 2

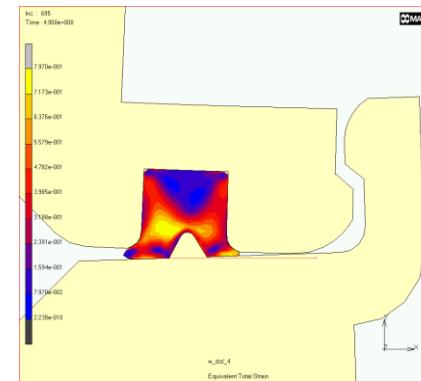
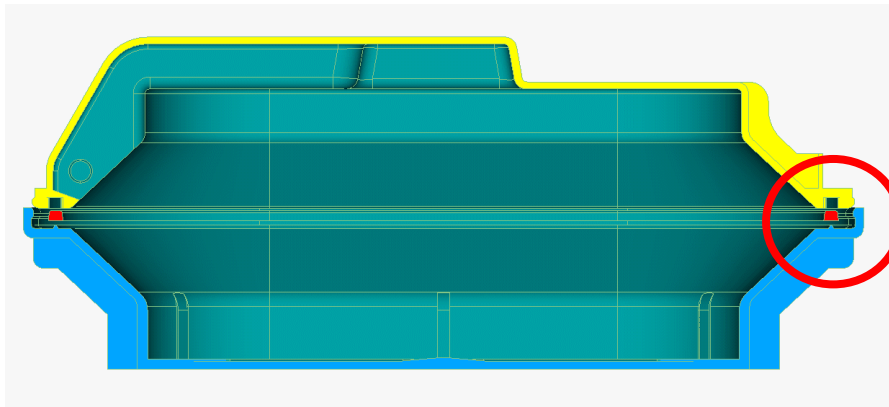
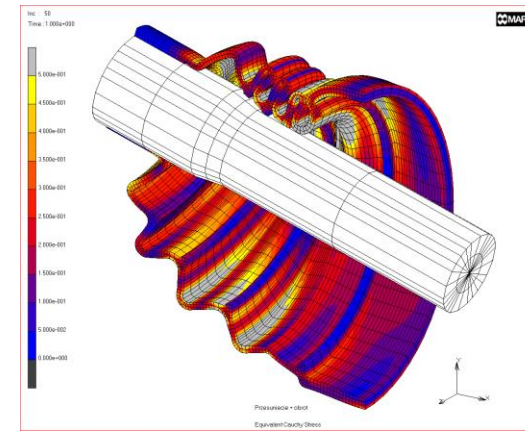
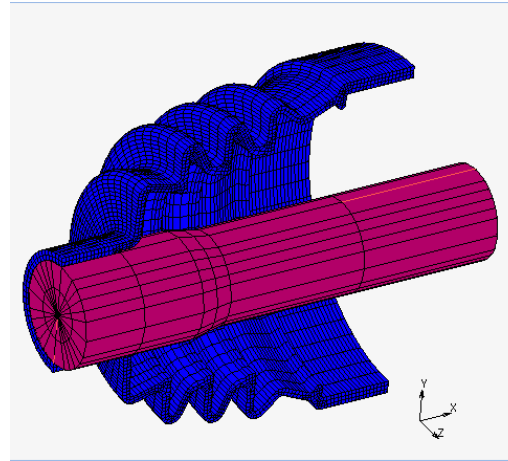
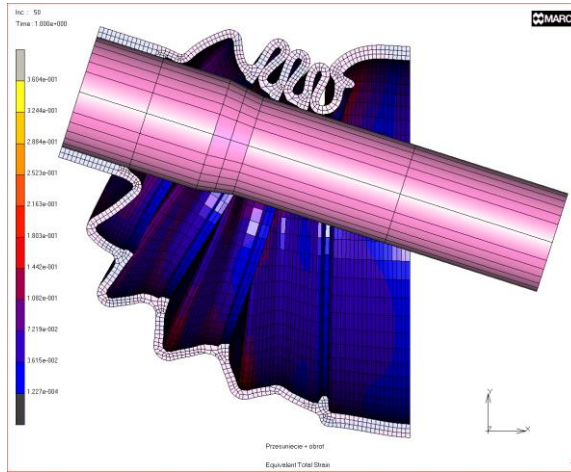
Use Best Fit Coefficients

C10	-1.82191	MPa
C01	3.37808	MPa
C20	0.0122782	MPa
C02	0.767321	MPa
C11	-0.0933846	MPa
D1	0	1/MPa
D2	0	1/MPa

OK Cancel



Symulacje MES



Technika elementów

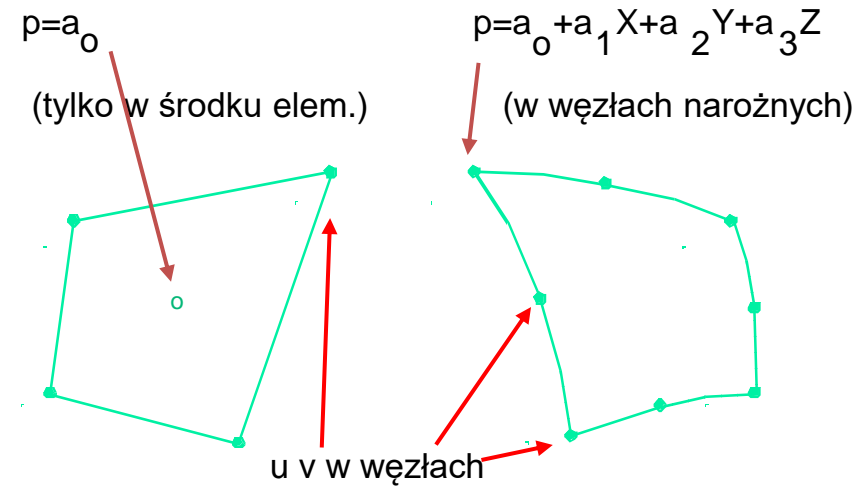
Sformułowanie hybrydowe (wielopolowe):

Elementy przemieszczeniowe z niezależnym polem ciśnienia wewnątrz elementu (tzw. sformułowanie *Hermanowskie* albo *u-p*)

Pola ciśnienia i przemieszeń opisywane niezależnie.

Pole ciśnienia

- Stałe w elementach pierwszego rzędu
- Liniowe w elementach kwadratowych.



MES w obliczeniach gumy

1. Sformułowania hybrydowe (dwupolowo, ciśnienie kondensowane statycznie)
2. Modele materiałowe
3. Identyfikacja parametrów (*curve fitting*)
4. *Remeshing* (regeneracja siatki z przeniesieniem wyników)
5. Cyclic loads → histereza
6. Zachowanie lepkosprężyste
7. Damage (uszkodzenia)

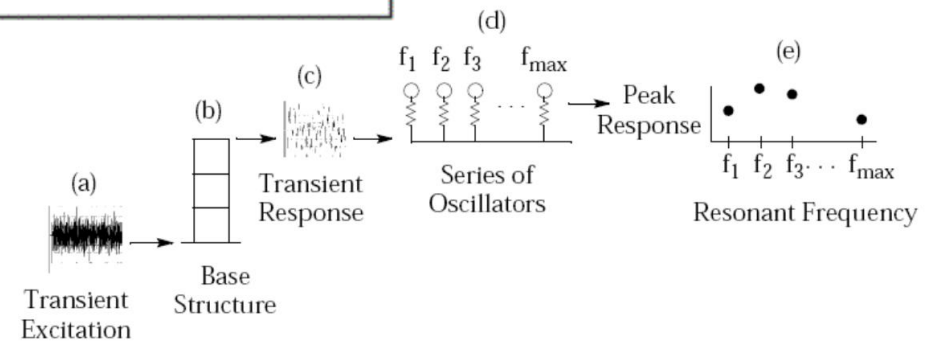
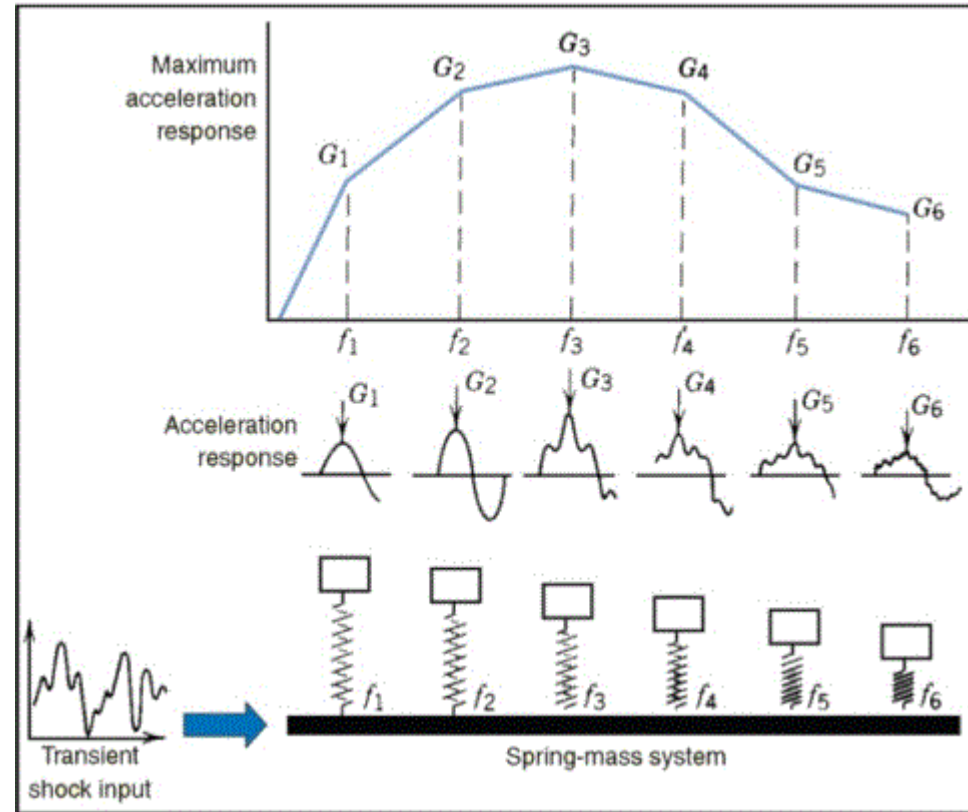
Do uwzględnienia / uwaga na:

Parametry modelu (np. MR) mogą zależeć od temperatury!!
Polynomial order!
Positive coefficients!
Experiment range!

Materiały „bio”

Metoda Elementów Skończonych II

MES – Spektrum odpowiedzi

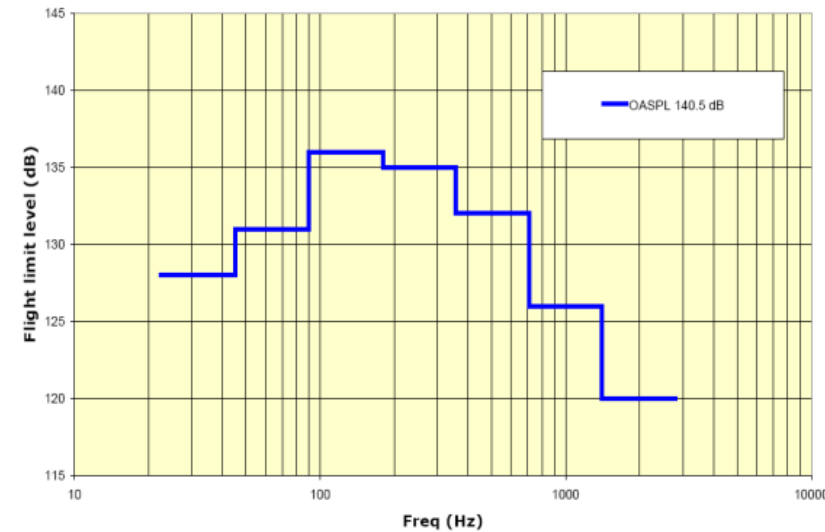


Metoda Elementów Skończonych II

MES – Obciążenie akustyczne (Acoustic noise)

Octave center frequency (Hz)	Flight limit level (dB) (reference: 0 dB = 2×10^{-5} Pa)
31.5	128
63	131
125	136
250	135
500	132
1000	126
2000	120
OASPL (20 - 2828 Hz)	140.5

Note: OASPL - Overall Acoustic Sound Pressure Level



Ariane 5 – Acoustic noise spectrum under the fairing

Np. dla Aluminium (różne układy jednostek)

Units	Inputs				RMS Outputs	
	Young's Modulus	Mass Density	PSD Function	Acceleration Load	Deflection	Stress
SI (m,kg,sec)	6.89e10 Pa	2710 kg/m ³	1 g ² /Hz	9.807 m/s ²	1 m	1000 Pa
SI (mm,Mg,sec)	6.89e4 MPa	2.71e-9 Mg/mm ³	1 g ² /Hz	9807 mm/s ²	1000 mm	1.0e-3MPa
Imperial (in, snail, sec)	10.0 e6 psi	2.54e-4 snail/in ³	1 g ² /Hz	386.1 in/s ²	39.37 in	0.145 psi